Matematika A2a

2012/13/II. U0, W0 kurzus

2. zárthelyi dolgozat

2013. 05. 02. 8.15–9.45

Név: ____________________

Neptun kód: ______________

Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$:

1. Konvergens-e, illetve abszolút konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ sor? *(6+6 p.)*

2. Konvergenciakritériumok segítségével döntse el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e vagy sem. *(6+6 p.)*

   a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}(2n+3)!}$

   b. $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$

3. Tekintsük az *(6+5 p.)*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} - y + 1, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 1, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

függvényt.

   a. Határozza meg a függvény parciális deriváltjait minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, ha azok léteznek.

   b. Mely $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontokban differenciálható az f függvény?

4. Számolja ki az *(10 p.)*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x,y,z) \mapsto x^3 + y^4\,\mathrm{e}^{2z}$$

függvény $a = (1,2,0) \in \mathbb{R}^3$ pontbeli $v \in \mathbb{R}^3$ iránymenti deriváltját, ahol a v vektor egyállású a $(3,2,1)$ vektorral.

5. Határozza meg az *(15 p.)*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$$

függvény lokális szélsőértékeit.

Matematika A2a
2012/13/II. U0, W0 kurzus
2. zárthelyi dolgozat
2013. 05. 02. 8.15–9.45

Név: ____________________

Neptun kód: ______________

Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$:

1. Konvergens-e, illetve abszolút konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$ sor? *(6+6 p.)*

Legyen $a_n=\dfrac{n}{n^2+1}$. A sor Leibniz-típusú, ugyanis

a. váltakozó előjelű;

b. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0$;

c. az a_n sorozat monoton csökkenő mert $a_n\ge a_{n+1}$ egyenlőtlenségből

$$\frac{n}{n^2+1}\ge\frac{n+1}{n^2+2n+2}\quad\to\quad n^3{+}2n^2{+}2n\ge n^3{+}n^2{+}n{+}1\quad\to\quad n^2{+}n\ge 1$$

adódik.

Mivel minden Leibniz-sor konvergens, ezért a sor konvergens.
A sor nem abszolút konvergens, ugyanis minden $N\in\mathbb{N}^+$ esetén

$$\sum_{n=1}^{N}\left|(-1)^n\frac{n}{n^2+1}\right|=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n^2+1}\ge\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n},$$

és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$.

2. Konvergenciakritériumok segítségével döntse el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e vagy sem. *(6+6 p.)*

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+2}(2n+3)!}$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}4^n\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$

a. Legyen $a_n=\dfrac{2^n}{3^{n+2}(2n+3)!}$. Ekkor a

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{3^{n+3}(2n+5)!}}{\dfrac{2^n}{3^{n+2}(2n+3)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3(2n+4)(2n+5)}=0,$$

vagyis a hányadoskritérium alapján a $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ egyenlőtlenségből adódik a sor konvergenciája.

b. Legyen $a_n = 4^n\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{n^2}$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 4\left(\frac{n}{n+2}\right)^n = 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^n} = \frac{4}{\mathrm{e}^2}.$$

Mivel $\mathrm{e} > 2$, ezért a gyökkritérium alapján a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ egyenlőtlenségből adódik a sor konvergenciája.

3. Tekintsük az *(6+5 p.)*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} - y + 1, & \text{ha} \quad (x,y)\neq(0,0);\\ 1, & \text{ha} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvényt.

a. Határozza meg a függvény parciális deriváltjait minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban, ha azok léteznek.

b. Mely $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontokban differenciálható az f függvény?

a. Az $(x,y)\neq(0,0)$ pontban a függvény parciális deriváltjai

$$(\partial_x f)(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$(\partial_y f)(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2)-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} - 1 = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} - 1.$$

A $(0,0)$ pontban a függvény parciális deriváltja a definíció alapján

$$(\partial_x f)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0$$

$$(\partial_y f)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h+1-1}{h} = -1.$$

b. Ha a függvény differenciálható lenne az origóban, akkor ott a deriváltját a parciális deriváltak adnák meg, vagyis

$$(\mathrm{D}f)(0,0) = \begin{pmatrix}(\partial_x f)(0,0) & (\partial_y f)(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}$$

teljesülne. A derivált definíciója alapján ekkor a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-((\mathrm{D}f)(0,0))(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$$

egyenlőségnek kellene teljesülnie, ami a jelen esetben az

$$\lim_{r\to 0}\frac{\frac{r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2} - r\sin\varphi + 1 - 1 + r\sin\varphi}{r} = \cos\varphi\sin^2\varphi = 0$$

egyenletet jelenti a polárkoordinátákra való áttérés után. Azonban a $\cos\varphi\sin^2\varphi = 0$ egyenlőség nem teljesül, vagyis a függvény nem lehet differenciálható az origóban.

4. Számolja ki az *(10 p.)*

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \qquad (x,y,z)\mapsto x^3+y^4\,\mathrm{e}^{2z}$$

függvény $a=(1,2,0)\in\mathbb{R}^3$ pontbeli $v\in\mathbb{R}^3$ iránymenti deriváltját, ahol a v vektor egyállású a $(3,2,1)$ vektorral.
A $v=\dfrac{(3,2,1)}{\|(3,2,1)\|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3,2,1)\in\mathbb{R}^3$ vektor egyállású a $(3,2,1)$ vektorral, és $\|v\|=1$. Mivel az f függvény

$$\partial_x f=3x^2 \qquad \partial_y f=4y^3\,\mathrm{e}^{2z} \qquad \partial_z f=2y^4\,\mathrm{e}^{2z}$$

parciális deriváltjai mindenhol folytonosak, ezért a függvény mindenhol differenciálható, vagyis képezhető a

$$(\operatorname{grad} f)(a)=(3,32,32)$$

vektor. Az iránymenti derivált ekkor kiszámolható az alábbi módon.

$$(\mathrm{D}_v f)(a)=\langle(\operatorname{grad} f)(a),v\rangle=\langle(3,32,32),\frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,1)\rangle=\frac{9+64+32}{\sqrt{14}}=\frac{105}{\sqrt{14}}$$

5. Határozza meg az *(15 p.)*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto x^3+y^3-3xy$$

függvény lokális szélsőértékeit.
A függvénynek azon $P\in\mathbb{R}^2$ pontokban lehet szélsőértéke, melyekre $(\mathrm{D}f)(P)=0$, vagyis $(\partial_x f)(P)=0$ és $(\partial_y f)(P)=0$ teljesül.

$$\left\{\begin{array}{l}(\partial_x f)(x,y)=3x^2-3y=0\\(\partial_y f)(x,y)=3y^2-3x=0\end{array}\right\} \quad\to\quad \left\{\begin{array}{l}y=x^2\\x=y^2\end{array}\right\} \quad\to\quad \left\{\begin{array}{l}x=x^4\\y=x^2\end{array}\right\}$$

Tehát a függvénynek a $P_1=(0,0)$ és $P_2=(1,1)$ pontban lehet lokális szélsőértéke.
A függvény második deriváltja

$$(\mathrm{D}^2 f)(x,y)=\begin{pmatrix}(\partial_x\partial_x f)(x,y) & (\partial_x\partial_y f)(x,y)\\(\partial_y\partial_x f)(x,y) & (\partial_y\partial_y f)(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x & -3\\-3 & 6y\end{pmatrix}.$$

Mivel az $A=(\mathrm{D}^2 f)(P_1)=\begin{pmatrix}0 & -3\\-3 & 0\end{pmatrix}$ mátrixra $\det A<0$ teljesül, ezért a mátrix egyik sajátértéke pozitív, a másik negatív, vagyis az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke a P_1 pontban.
Mivel a $B=(\mathrm{D}^2 f)(P_2)=\begin{pmatrix}6 & -3\\-3 & 6\end{pmatrix}$ mátrixra $\det B>0$ teljesül, ezért a mátrix sajátértékei azonos előjelűek vagyis az f függvénynek lokális szélsőértéke van a P_2 pontban. Mivel $B_{11}>0$, ezért mindkét sajátérték pozitív ($\lambda_1=3$, $\lambda_2=9$), ezért az f függvénynek lokális minimuma van a P_2 pontban.