MECHANIKA

Vonatkoztatási rendszer: azon test, ill. testek által meghatározott rendszer, amelyekhez viszonyítjuk a kiszemelt test mozgását. Koordináta-rendszert rendelünk hozzá (Descartes).
Pontszerű test: anyagi pontnak, tömegpontnak vagy pontszerű testnek nevezzük az olyan idealizált testet melynek nincs kiterjedése, de van tömege.
Merev test: a testek kiterjedését is figyelembe vesszük, de a deformációt nem. Pontjai egymáshoz képest változatlan helyzetűek.
Rugalmas test: olyan test, melynek mind a kiterjedését, mind a deformációját figyelembe vesszük, de a deformáció nem maradandó.
Képlékeny test: figyelembe vesszük a kiterjedést és a maradandó deformációt is.

A mechanika felosztása:

a,

- anyagi pont mechanikája (egy tömegpontot modellezünk)
- több anyagi pontból álló pontrendszerek
- merev testek
- rugalmas testek
- képlékeny testek

b,

- kinematika: a mozgásukat önmagukban, keletkezésükre való tekintet nélkül írja le
- dinamika (kinetika): figyelembe veszi a mozgásokat befolyásoló tényezőket, a testek közötti kölcsönhatásokat
- statika: a testek egyensúlyi feltételeit vizsgálja

ANYAGI PONT KINEMATIKÁJA

Az anyagi pont helyét Descartes-féle koordinátarendszerben x,y,z koordinátákkal lehet meghatározni. Minden koordináta függhet az időtől:

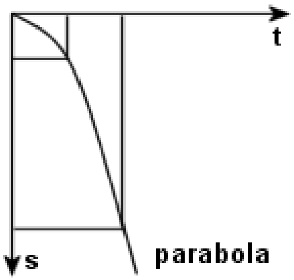
r(X(t), Y(t), Z(t))

Kinematikai mozgásegyenlet -> pálya leírása

Egyenes vonalú egyenletes mozgás: egyenes vonalú egyenletes mozgást végez az anyagi pont, ha egyenes vonalú pályán, állandóan ugyanabban az irányban halad, és egyenlő időközök alatt egyenlő utakat tesz meg.

$$\Delta s = c \cdot \Delta t \;=>\; c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Szabadesés, gyorsulás: légüres térben minden test egyformán esik, ez a függőleges irányú mozgás a szabadesés.



$$s = k \cdot t^2, k \cong 5\frac{m}{s^2}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \; átlagsebesség$$

$$\bar{v} = \frac{k(t+\Delta t)^2 - kt^2}{\Delta t} = \frac{2kt\Delta t + k\Delta t^2}{\Delta t} = 2kt + k\Delta t$$

határátmenet: $\Delta t \to 0$

$\bar{v} \to 2kt$: szabadon eső test pillanatnyi sebessége (idővel egyenesen arányosan növekszik)

$\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ átlaggyorsulás

$\bar{a} = \dfrac{2k(t+\Delta t)+2kt}{\Delta t} = 2k \Rightarrow$ szabadon eső test gyorsulása időben állandó, értéke 2k, jele g

tartománya: (egyenlítőtől) $9{,}78\dfrac{m}{s^2} \le g \le 9{,}83\dfrac{m}{s^2}$ (sarkokig)

Szabadesés törvényei:

$$s = \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$
$$v = g\cdot t$$
$$a = g = \acute{a}lland\acute{o}$$

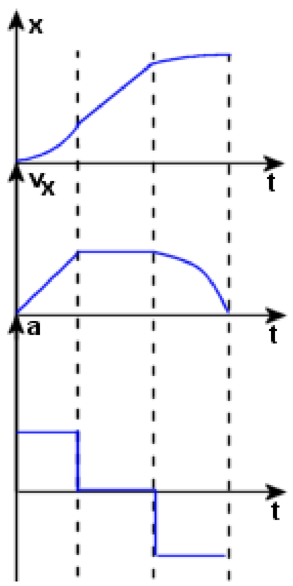
A SEBESSÉG ÉS A GYORSULÁS TETSZÉS SZERINTI EGYENES VONALÚ MOZGÁSOKNÁL

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \qquad \text{(differencia-hányados)}$$
$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}$$
$$v = |v_x| = \frac{ds(t)}{dt}$$

Egyenes vonalú, x-tengely menti mozgásoknál a sebesség (v_x) a mozgó pont x koordinátájának, a sebesség (v) nagysága pedig az útnak idő szerinti deriváltja.

Egyenes vonalú, x-tengely menti mozgásoknál a gyorsulás a mozgó pont v_x sebességének idő szerinti deriváltja (az x koordináta második – idő szerinti – deriváltja).

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$



pl.: $s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow v = at \Rightarrow a = a$

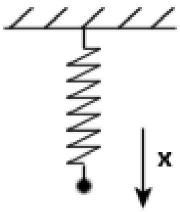
Általánosabb eset:

t = 0-ban x_0, v_0

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v_x = v_0 + at$$

Harmonikus rezgőmozgás:



$$x_t = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

ω_0**:** saját körfrekvencia
α : kezdőfázis
A: amplitúdó (egyensúlyi helyzetből való maximális kitérés)

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

f_0: sajátfrekvencia (egységnyi idő alatt megtett rezgésszám)
T_0: periódusidő (egy teljes rezgés ideje)

$$v(t) = -A\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

$$a(t) = -A\omega_0^{\ 2} \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Vektor: a tér adott irányú, irányítású és hosszúságú szakasza

Vektor differenciálása skaláris mennyiség szerint:

$$\frac{d\underline{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{A}(t+\Delta t) - \underline{A}(t)}{\Delta t}$$

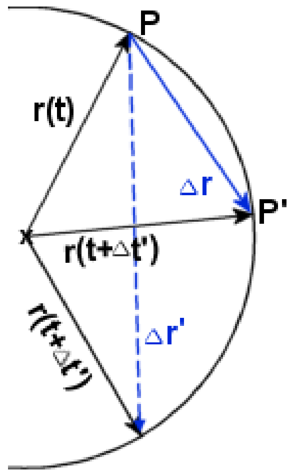
$$\frac{d(\underline{A}\underline{B})}{dt} = \frac{d\underline{A}}{dt}\underline{B} + \frac{d\underline{B}}{dt}\underline{A}$$

A sebesség és a gyorsulás általános definíciója:

Anyagi pont helye: $\underline{r}(t) = x(t)\cdot \underline{i} + y(t)\cdot \underline{j} + z(t)\cdot \underline{k}$

Sebességvektor („sebesség"): a helyvektor idő szerinti differenciálhányadosa

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$



$$\Delta s = PP'ív \cong |\Delta \underline{r}| = \overline{PP'} \Rightarrow \frac{|\Delta \underline{r}|}{\Delta t} \cong \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \frac{ds}{dt}$$

A sebesség iránya mindig a pálya érintőjének iránya, a sebesség nagysága az út idő szerinti deriváltja.

A gyorsulásvektor („gyorsulás"): a sebességvektor idő szerinti deriváltja vagy a helyvektor idő szerinti második deriváltja.

$$a = \frac{d\underline{v}}{d\underline{t}} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2}$$

Minden olyan mozgást amelynél a gyorsulásvektor nem zérus, gyorsuló mozgásnak nevezünk. Mivel görbe vonalú mozgásoknál a sebesség iránya feltétlenül változik, ezért minden görbe vonalú mozgás egyben gyorsuló mozgás is.

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}$$

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$

Anyagi pont legáltalánosabb mozgása felbontható 3 egyenes vonalú mozgásra.

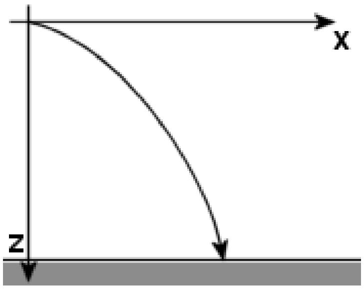
a, $\underline{v}(t_1) - \underline{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \underline{a}(t)dt$

b, $\underline{r}(t_1)-\underline{r}(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\underline{v}(t)dt$

c, $s=\int_{t_0}^{t_1}\underline{v}(t)dt$

<u>Hajítás, egyenletesen gyorsuló mozgások:</u>

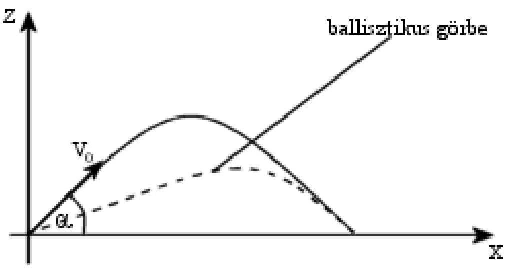
Vízszintes hajítás:



vízszintesen hajított test mozgása összetehetőleg vízszintes egyenes menti egyenletes mozgásból és a függőleges irányú szabadesésből

$$\left.\begin{array}{l} x=vt\Rightarrow t=\dfrac{v}{x} \\ z=\dfrac{1}{2}gt^2 \end{array}\right\} \quad z=\frac{1}{2}g\frac{v^2}{x^2}$$

Ferde hajítás:



t = 0-ban: $x=0, z=0, v_x=v_o\cdot\cos\alpha, v_z=v_o\cdot\sin\alpha$

A szuperpozíció elve alapján:

$v_x=v_o\cdot\cos\alpha \qquad v_z=v_o\cdot\sin\alpha$

$x=v_o\cdot t\cdot\cos\alpha \qquad z=v_o\cdot t\cdot\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$

$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=v_o\cdot\cos\alpha \quad \dot{z}=\frac{dz}{dt}=v_o\cdot\sin\alpha-gt$

$a_x=\ddot{x}=\dot{v}_x=0$

$a_z=\ddot{z}=\dot{v}_z=-g$

Ha 0°<α<180° az emelkedési idő:

$v_z(t)=v_0\cdot\sin\alpha-gt=0\Rightarrow t_e=\dfrac{v_o\cdot\sin 2\alpha}{g}$

A kiindulási síkba (t_h: hajítási idő) $t_h=\dfrac{(2v_o\cdot\sin\alpha)}{g}=2t_e$ idő múlva ér

hajítási távolság: $x(t_h)=v_o\cdot\cos\alpha\cdot\dfrac{2v_o\cdot\sin 2\alpha}{g}$ (α=45° esetén a maximális)

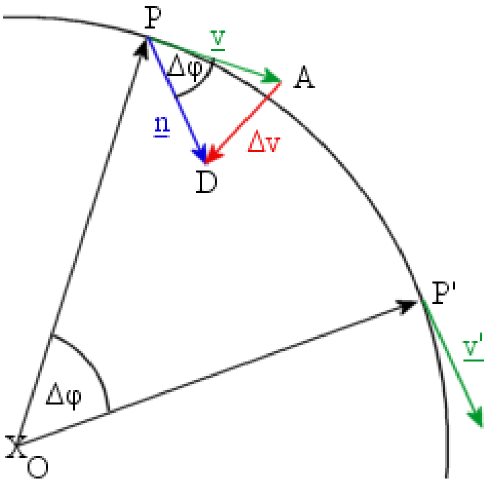
ballisztikus görbe: figyelembe veszi a légellenállást

KÖRMOZGÁS

Egyenletes körmozgás: ha a tömegpont a körpályán egyenlő időközök alatt egyenlő utakat tesz meg mindig ugyanolyan körülfutási irányban

Gyorsulás:

Geometriai értelmezés:



$\Delta \underline{v} = \underline{v}' - \underline{v} = \overrightarrow{AD}$

PAD egyenlő szárú háromszög

$|\underline{v}| = |\underline{v}'|$

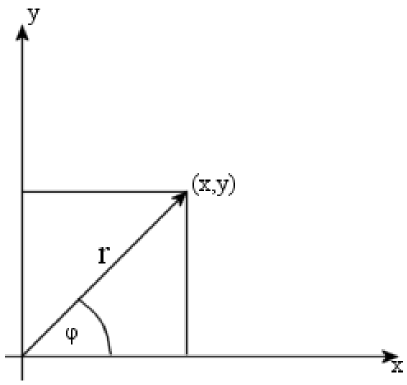
PAD szög $= 90° - \dfrac{\Delta\varphi}{2} \rightarrow \underline{a} \perp \underline{v}$ - re (O felé mutat)

PP' ív $= \Delta s$

$$|\Delta \underline{v}| \cong v \cdot \Delta\varphi = v \cdot \frac{\Delta s}{\Delta r} \; (\Delta s = \Delta r \varphi) \rightarrow \frac{|\Delta \underline{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} a_{cp} = \frac{v}{r} \cdot v = \frac{v^2}{r}$$

Egyenletes körmozgásnál a gyorsulás a kör középpontja felé irányul, és nagysága $a_{cp} = \dfrac{v^2}{r}$.

Síkbeli polárkoordináták:



$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

Egyenletes körmozgás:

$t = 0$-ban $\varphi = 0°$ r állandó $\varphi = \omega \cdot t$

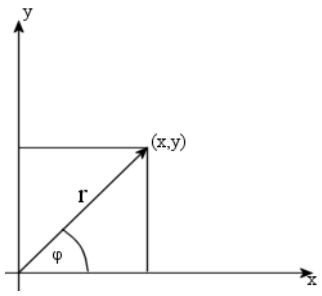
ω (szögsebesség) : egységnyi idő alatt megtett szögelfordulás (radiánban) mértékegység: $\frac{1}{s}$

általában: $\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$v \cdot t = r \cdot \varphi = r \cdot \omega \cdot t \rightarrow v = r \cdot \omega$

a_{cp} vektori alakja : $\underline{a}_{cp} = -\omega^2 \cdot \underline{r}$

Analitikus értelemben:



$$x = r \cdot \cos\varphi = r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$
$$y = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$v_x = -r \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$a_x = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$
$$v_y = r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$
$$a_y = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

a_x és a_y is az origó felé mutat, ebből következően az eredőjük is
$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{\sin^2(\omega \cdot t) + \cos^2(\omega \cdot t)} = r \cdot \omega^2$

Tetszés szerinti körmozgás:

r = állandó
$\varphi = \varphi(t)$
$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
szögsebesség: egységnyi időre vonatkoztatott szögelfordulás
szöggyorsulás (β): egységnyi időre vonatkoztatott szögsebesség változás
$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{d^2 t}$
Ha β állandó, akkor egyenletesen gyorsuló körmozgásról van szó.
A nem egyenletes körmozgásnál az a gyorsulás nem a kör középpontja felé mutat, hanem felbontandó a már ismert $\underline{a}_{cp} = -\omega^2 \cdot \underline{r}$ centripetális (normális) gyorsulásra, és az erre merőleges, az érintő ($\underline{v}$ sebesség irányába) mutató $\underline{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$ érintőleges (tangenciális/pályamenti) gyorsulásra.
$\underline{a} = \underline{a}_{cp} + \underline{a}_t$ (vektoriális összeg)
$a_t = r \cdot \beta = r \cdot \dot{\omega}$

A SEBESSÉG ÉS A GYORSULÁS KOMPONENSEI KÜLÖNBÖZŐ KOORDINÁTA RENDSZEREKBEN

1. Derékszögű:

$\underline{r} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}$

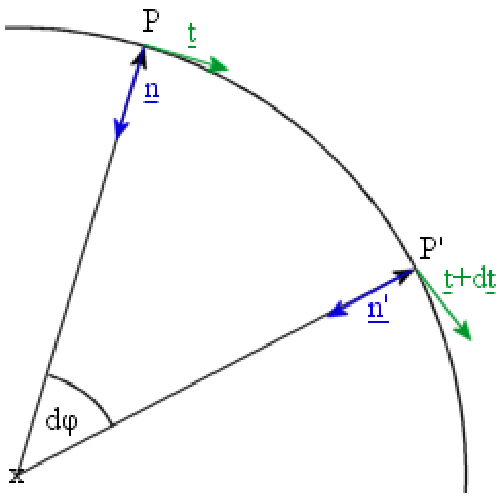
$\underline{v} = \dot{x} \cdot \underline{i} + \dot{y} \cdot \underline{j} + \dot{z} \cdot \underline{k}$

$\underline{a} = \ddot{x} \cdot \underline{i} + \ddot{y} \cdot \underline{j} + \ddot{z} \cdot \underline{k}$

$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

$v = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

2. Érintőleges és normális komponensek



$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$ (binormális)

$\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$ a pálya természetes koordináta-rendszere

A pálya P pontjában az érintő irányába eső egységvektor $\underline{t}$. Az erre merőleges, és a simuló síkban levő főnormálisnak a konkáv oldal felé mutató egységvektora legyen $\underline{n}$.

Simuló sík: a térgörbe P_0 pontbeli simuló síkja a görbe 3 nem egy egyenesbe eső és általában P_0-tól különböző pontján áthelyezett sík határhelyzete midőn a három pont P_0-hoz konvergál, feltéve, hogy ez a határhelyzet létezik.

Ívhossz-paraméter:

Természetes paraméterezés: a paraméter értéke és a görbe hossza megegyezik

ívhossz: $s = \int_0^t |\dot{r}(u)| du$

Sebesség:

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = t \cdot v \qquad \left(\frac{d\underline{r}}{ds} = \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{1}{v} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|} = t\right.$$

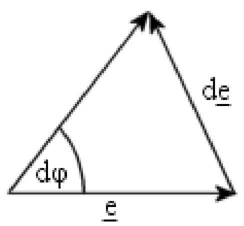
$$\boxed{v_t = v = \dot{s}, \; v_n = 0, \; \mathrm{v_b} = 0}$$

Gyorsulás:

$$\underline{a} = \underline{\dot{v}} = \frac{d(v\underline{t})}{dt} = \dot{v}\underline{t} + v\underline{\dot{t}}$$

egységvektor idő szerinti deriváltja, merőleges lesz az egységvektorra

Általában egységvektorra:



$$90° - \frac{d\varphi}{2} \xrightarrow{d\varphi \to 0} 90° \to \underline{e}(t) \perp \frac{d\underline{e}}{dt}$$

$\underline{e}(t)^2$ = áll

$$2\underline{e}(t) \cdot \underline{\dot{e}}(t) = 0$$

$$\Delta\underline{e} \cong \Delta\varphi\underline{n} \to \underline{\dot{e}} = \frac{d\varphi}{dt}\underline{n}$$

Speciálisan tehát a $\underline{\dot{t}}$ vektor két szomszédos $\underline{t}$ vektor síkjában, azaz a simuló-síkban van, vagyis $\underline{\dot{t}} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \underline{n} = \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \underline{n}$

$$d\varphi R = ds$$

$$d\varphi = \frac{ds}{R}$$

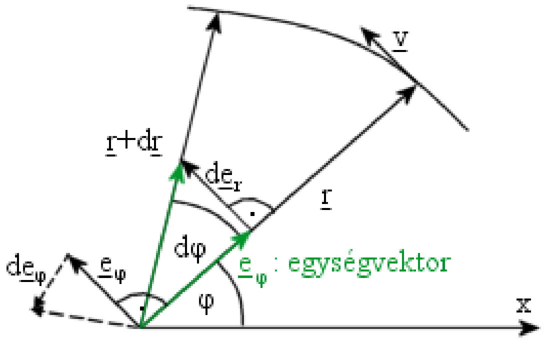
$$\underline{\dot{t}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \underline{n}$$

R: görbületi sugár

$\underline{\dot{t}}$-t beírva az $\underline{a} = \dot{v}\underline{t} + v\underline{\dot{t}}$-be: $\underline{a} = \dot{v}\underline{t} + \frac{v^2}{R}\underline{n}$

$$\boxed{a_t = \dot{v}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}, \quad a_b = 0}$$

3. Felbontás síkbeli polárkoordinátákba



$$\underline{v}=\dot{\underline{r}}=\frac{d(\mathrm{r}\cdot \mathrm{e_r})}{dt}=\dot{r}e_r+r\dot{\varphi}e_\varphi \Rightarrow v_r=\dot{r}\ \text{(radiális)}$$

$$\dot{\underline{e}}_r=\frac{d\varphi}{dt}e_\varphi=\dot{\varphi}\cdot e_\varphi$$

$$\underline{a}=\ddot{\underline{r}}=\dot{\underline{v}}=\ddot{r}\underline{e}_r+\dot{r}\dot{\underline{e}}_r+(\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\underline{e}_\varphi+r\dot{\varphi}\cdot\dot{\underline{e}}_\varphi$$

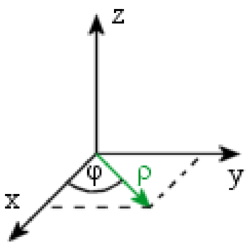
$$(\text{"Legyen"}\dot{\underline{e}}_r=\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi,\quad \dot{\underline{e}}_\varphi=-\dot{\varphi}\cdot\underline{e}_r)$$

$$\underline{a}=(\ddot{\underline{r}}-r\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})e_\varphi$$

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$$

$$a\varphi=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}$$

4. Felbontás hengerkoordinátákba



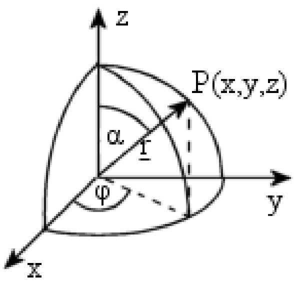
$$x=\rho\cdot\cos\varphi,\quad x=\rho\cdot\sin\varphi,\quad z=z$$

3. eset alapján:

$$v_\rho=\dot{\rho},\quad v_\varphi=\rho\cdot\dot{\varphi},\quad v_z=\dot{z}$$

$$a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2,\quad a_\varphi=\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi},\quad a_z=\ddot{z}$$

A sebesség felbontása térbeli polárkoordinátákba (gömbi koordinátákba)



(x, y, z) → (r, α, φ)

A sebesség felbontása céljából tekintsük a P pontnak egy igen kicsi *dr* elmozdulását amely után a pont koordinátái *(r+dr, α+dα, φ+dφ)*. A *dr* elmozdulás öszetehető 3 egymásra merőleges kis elmozdulásból:

- a rádiusz-menti kis *dr* elmozdulásból
- a meridián-kör menti *rdα* elmozdulásból
- a szélességi körön $r\cdot\sin\alpha\cdot d\varphi$

$$\boxed{v_r=\dot{r},\quad v_\alpha=r\cdot\dot{\alpha},\quad v_\varphi=r\cdot \mathrm{s}}$$

REZGÉSEG ÖSSZETEVÉSE ÉS FELBONTÁSA

Egymással párhuzamos, egyenlő frekvenciájú harmonikus rezgések összetevése

$x_1 = a_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha_1)$

$x_2 = a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha_2)$

$x = x_1 + x_2$ (szuperpozíció elve)

$x = a_1 \cdot (\sin \omega t \cdot \cos \alpha_1 + \cos \omega t \cdot \sin \alpha_1) + a_2 \cdot (\sin \omega t \cdot \cos \alpha_2 + \cos \omega t \cdot \sin \alpha_2) =$

$= (a_1 \cdot \cos \alpha_1 + a_2 \cdot \cos \alpha_2) \cdot \sin \omega t + (a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2) \cdot \cos \omega t$

a, A megoldást $x = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$ alakban keressük

$x = a \cdot \cos \alpha \cdot \sin \omega t + a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \omega t$

(1) $a_1 \cdot \cos \alpha_1 + a_2 \cdot \cos \alpha_2 = a \cdot \cos \alpha$

(2) $a_1 \cdot \sin \alpha_1 + a_2 \cdot \sin \alpha_2 = a \cdot \sin \alpha$

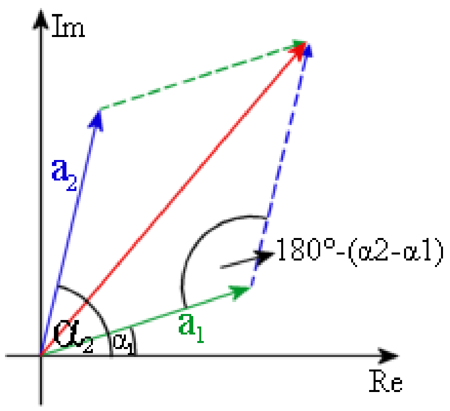
$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow a = a_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + 2a_1a_2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + a_1^2 \sin^2 \alpha_1 + a_2^2 \sin^2 \alpha_2 +$

$+ 2a_1a_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \Rightarrow a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow tg\alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}$

b, A megoldást a komplex számsíkon keressük



$x_1 = a_1 \cdot \cos(\omega t + \alpha_1)$

$x_2 = a_2 \cdot \cos(\omega t + \alpha_2)$

cosinus-tételből:

$a^2 = a_1^2 + a_1^2 - 2a_1a_2 \cdot \cos(180° - (\alpha_2 - \alpha_1)) =$

$= a_1^2 + a_1^2 - 2a_1a_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_1^2 - 2a_1a_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$

Két, egyirányú, ω körfrekvenciájú harmonikus rezgés eredője ugyancsak ω körfrekvenciájú harmonikus rezgés.

$a = a_1 + a_2$, ha $\alpha_1 - \alpha_2 = m \cdot 2\pi \qquad m = 0,1,2...$

$a = |a_1 - a_2|$ ha $\alpha_1 - \alpha_2 = (2k+1)\pi \qquad k = 0,1,2...$

$a_1 = a_2 \rightarrow a = 0$ a két rezgés kioltja egymást

Egyirányú, különböző frekvenciájú harmonikus rezgések:

$$x = a_1 \cdot \cos \omega_1 t + a_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \delta)$$

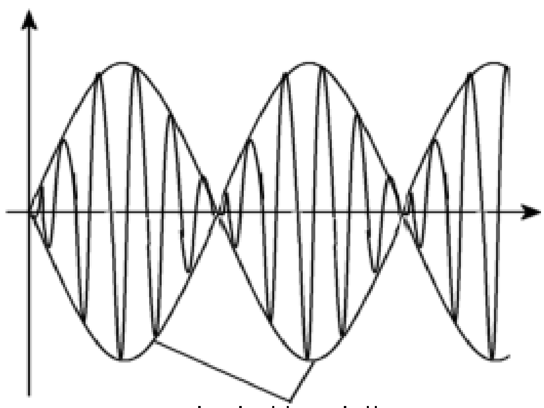
Mikor lesz periodikus?

$\omega_1 t = m \cdot 2\pi, \omega_2 t = n \cdot 2\pi \Rightarrow \dfrac{\omega 1}{\omega 2} = \dfrac{m}{n}$ (ha ez racionális szám akkor periodikus a rezgés)

spec. eset.:
$a_1 \approx \omega_2$ és $a_1 = a_2 = a$

$$x = a \cdot \cos \omega_1 + a \cdot \cos(\omega_2 t + \delta) = 2a \cdot \cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t - \frac{\delta}{2}) \cdot \cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t + \frac{\delta}{2})$$

$$|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1 + \omega_2$$



Az első tag lassan változik, így olyan rezgésnek tekinthető, melynek körfrekvenciája $\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ és amplitúdója periodikusan változik.
Két közel azonos hangfrekvenciájú hangvilla esetén a jelenség előállítható (lebegés)

$I \sim A^2$ (intenzitás ~ amplitúdó), tehát $\cos^2(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t - \dfrac{\delta}{2})$ periodusának megfelelően változik a hangintenzitás

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot T_e = \pi \Rightarrow \frac{2\pi f_1 - 2\pi f_2}{2} \cdot T_e = \pi \Rightarrow (f_1 - f_2) T_l = 1 \Rightarrow f_l = |f_1 - f_2|$$

Egymásra merőleges, egyenlő frekvenciájú, harmonikus rezgések

$$x = a \cdot \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = \frac{x}{a} \Rightarrow \sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x}{a}}$$

$$y = b \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

$$(\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T})$$

$$\frac{y}{b} = \cos \omega t \cdot \cos \delta - \sin \omega t \cdot \sin \delta = \frac{x}{a} \cdot \cos \delta \pm \sqrt{1 - \frac{x}{a}} \cdot \sin \delta$$

$$(\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cdot \cos \delta)^2 = (1 - \frac{x^2}{a^2}) \sin^2 \delta$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \delta - 2 \frac{xy \cdot \cos \delta}{ab} = \sin^2 \delta - \frac{x^2 \cdot \sin^2 \delta}{a^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{xy}{ab} \cdot \cos \delta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \delta \text{ (ellipszis egyenlete)}$$

Két, egymásra merőleges, egyenlő frekvenciájú, harmonikus rezgés eredője elliptikus rezgés, elliptikus poláros rezgés.

Néhány speciális eset:

a,

δ=0 vagy π (lineáris, vagy lineárisan poláros rezgés)

$$(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{a} x, \text{ha } \delta = 0, \ \ y = -\frac{b}{a} x, \text{ha } \delta = \pi,$$

b,

$$\delta = \frac{\pi}{2} \text{ vagy } \delta = \frac{3\pi}{2} \qquad (\cos^2 \delta = 0, \sin^2 \delta = 1)$$

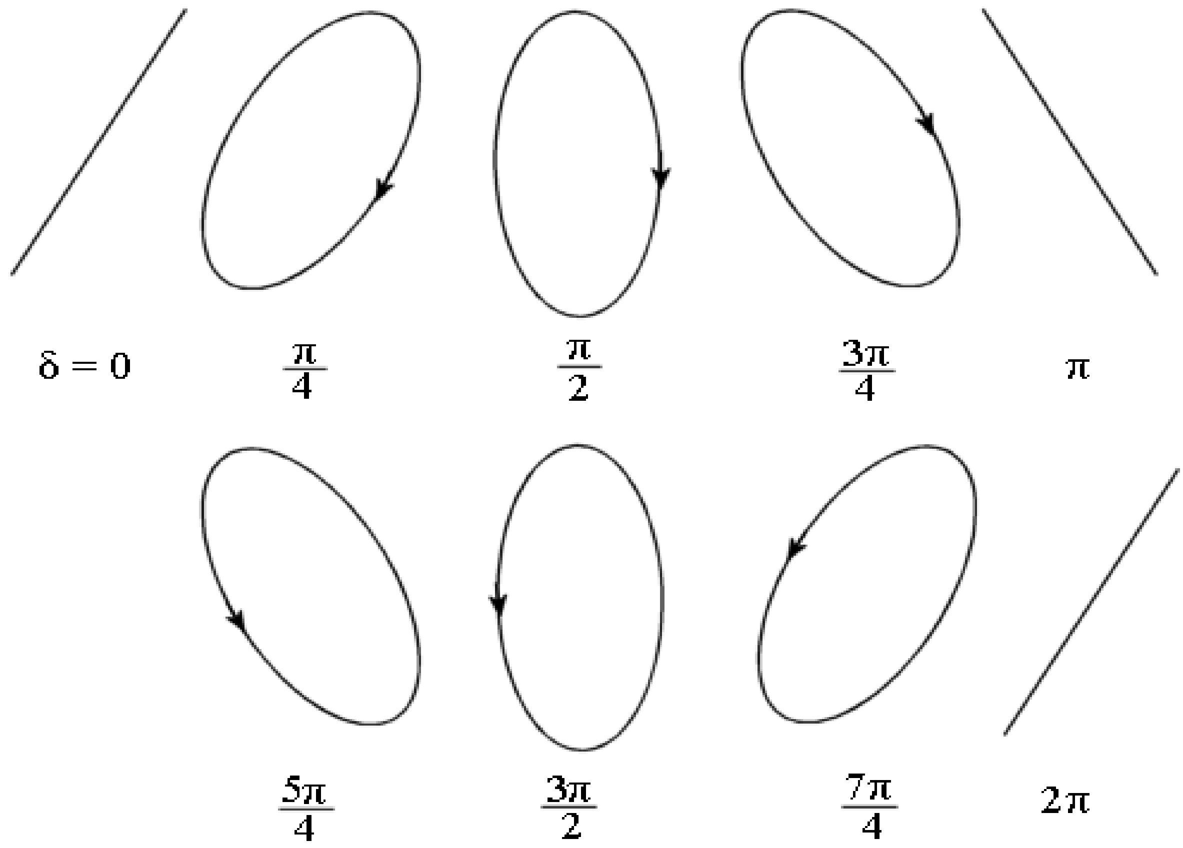
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ellipszis főtengelyei a koordináta tengelyek.

c,

$$\delta = \frac{\pi}{2} \quad \text{vagy} \quad \delta = \frac{3\pi}{2} \quad \text{és} \quad \text{a} = \text{b}$$

pálya: kör → cirkuláris rezgés (körben poláros) pályák:



EGYMÁSRA MERŐLEGES, KÜLÖNBÖZŐ FREKVENCIÁJÚ, HARMONIKUS REZGÉSEK ÖSSZETEVÉSE

Közel egyenlő frekvenciájú rezgések:

$x = a \cdot \cos\omega_1 t, \quad y = b \cdot \cos(\omega_2 t + \delta) = b \cdot \cos(\omega_1 t + \varepsilon \cdot t + \delta)$ ahol $\varepsilon = \omega_1 - \omega_2$

ε kicsi ω_1, ill ω_2-höz képest, ezért olyan egyenlő frekvenciájú rezgéseknek tekinthetők, amelyeknek az $\varepsilon t + \delta$ fáziskülönbsége az idővel lassan változik, vagyis változó tengelyű ellipszist kapunk.

A mozgás periodikus, ha $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ racionális szám (ekkor a pályagörbe zárt)

Egy példa lényegesen különböző frekvenciákra:

$x = a \cdot \cos\omega t$

$y = b \cdot \cos 2\omega t$

$y = b \cdot (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) = b \cdot (2\cos^2 \omega t - 1) = b \cdot (2\frac{x^2}{a^2} - 1)$ (parabola)

Rezgések felbontása harmonikus rezgésekre:

Periodikus rezgés felbontható sin és cos függvények segítségével:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f;$$

Fourier tétel :

$$\mathrm{F(t)} = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos \omega t + a_2 \cdot \cos 2\omega t + \ldots + b_1 \cdot \sin \omega t + b_2 \cdot \sin 2\omega t + \ldots$$

$$\mathrm{F(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot \omega t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cdot \cos(n\omega t)dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cdot \sin(n\omega t)dt \quad \text{(ortogonális függvények)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega t) \cdot \cos(n\omega t)dt = \frac{T}{2} \\[2em] \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(m\omega t) \cdot \sin(n\omega t)dt = \frac{T}{2} \end{array}\right\} \text{ha n=m, egyébként 0-ák}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(m\omega t) \cdot \cos(n\omega t)dt = 0 \qquad \forall \text{ n, m esetre}$$

DINAMIKA

Newton-féle axiómák:

(csak tömegpontra vonatkoznak)
Azokat az alaptörvényeket, ill. alapfeltevéseket, amelyekre a mechanika tételeit építjük lényegében a Newton-féle axiómák tartalmazzák. Helyességűk közvetlenül nem dönthető el.

I. Axióma: *Tehetetlenség törvénye*
Van olyan rendszer, melyben egy teljesen magára hagyott pontszerű test (=nincs más testekkel kölcsönhatásban) nyugalomban vagy egyenes vonalú, egyenletes mozgásban van. Az ilyen rendszert inercia rendszernek nevezzük és a mechanika további törvényeit erre vonatkoztatjuk. Eddigi tapasztalataink szerint az állócsillagokhoz rögzített rendszer inercia rendszernek tekinthető.

II. Axióma: *Dinamika alapegyenlete*
A testnek egy más testre gyakorolt hatását, amely a test sebességének megváltozásában, a test gyorsulásában nyilvánul meg, erőhatásnak vagy erőnek nevezzük.
Az erő és a gyorsulás közti összefüggésben szerepet kell játszania egy további, magára a mozgó testre jellemző, a test tehetetlenségét kifejező fizikai mennyiségnek, a tehetetlen tömegnek.
Pontszerű test *„a”* gyorsulása egyenesen arányos a testre ható, a gyorsulásával egyirányúnak választott *„$\underline{F}$”* erővel és fordítva arányos a test *„m”* tömegével:

$\underline{F} = m \cdot \underline{a}$ (arányossági tényezőt 1-nek választjuk)

Dinamikai tömegmérés:
(rugóra először egy m_1 tömegű testet akasztva kitérítjük nyugalmi helyzetéből és megmérjük gyorsulását, ill. a periódus idejét, majd ugyanezt elvégezzük m_2 tömegű testtel)

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{T_2^2}{T_1^2}$$

Őskilogramm: 90% platina, 10% iridium henger
víznél: 1,00028 dm^3 (4°C-on, normál nyomáson)

Sztatikai tömegmérés:
$\underline{G} = m \cdot \underline{g}$
Ugyanazon a helyen a testek súlya tömegükkel arányos, de ugyannak a testnek a súlya a hellyel változik. Itt nem a testek tehetetlensége játszik szerepet, hanem a gravitációs kölcsönhatás (súlyos tömeg)

Tapasztalat:
$m_{1s} = m_{2s} \Rightarrow m_{1t} = m_{1t} \Rightarrow \frac{m_{1s}}{m_{1t}} = \frac{m_{2s}}{m_{2t}}$ (tehetetlen tömeg arányos a súlyos tömeggel, ill. a megválasztott mértékegység-rendszerben egyenlő)

Galilei: minden testnek ugyanaz a gyorsulása

$G = m_s \cdot g_F$ (g_F a földrajzi helytől függ)

Newton II.:

$$m_t \cdot a = F = G = m_s \cdot g_F \rightarrow \text{szabadesésre} : m_t \cdot a = m_s \cdot g_F \rightarrow \frac{m_s}{m_t} = \frac{a}{g_F} = \frac{g}{g_F}$$

$\frac{g}{g_F}$ = állandó, amit úgy választottunk meg, hogy (1-nek), hogy $m_t = m_s$

III. Axióma: *Kölcsönhatás törvénye (hatás-ellenhatás elve)*
Ha az egyes tömegpont a kettes tömegpontra erőt gyakorol, akkor a kettes tömegpont is hat az egyes tömegpontra ugyanakkora, ellentétes irányú erővel
$\underline{F}_{12} = - \underline{F}_{21}$

IV: Axióma: *Az erőhatások függetlenségének elve (szuperpozíció elve)*
Ha ugyanarra az anyagi pontra egy időben több erő hat, ezek együttes hatása teljesen egyenértékű a vektori eredőjük hatásával, vagyis az erők egyetlen erővel helyettesíthetők.
$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \underline{F}_4 + ... + \underline{F}_n$

Kiegészítés Newton II. axiómájához:
mozgásmennyiség (impulzus): $\underline{I} = m \cdot \underline{v}$

$$\underline{F} = \frac{d\underline{I}}{dt} = \frac{d(m\underline{v})}{dt}$$

Munka, kinetikus energia, mozgási energia tétele:

$m \cdot \underline{\ddot{r}} = \underline{F}$ (skalárisan szorozzuk $\underline{\dot{r}}$ - el)

$$m\underline{\ddot{r}}\underline{\dot{r}} = \underline{F}\underline{\dot{r}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\underline{\dot{r}}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\frac{dr}{dt} \xrightarrow{\text{integrálás}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{d\underline{r}}{dt}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} Fdr$$ ($\underline{F}$ erő munkavégzése)

Az erő elemi munkája:
$\underline{F}d\underline{r} = Fdr \cdot \cos\alpha$

Időegységre eső munka a teljesítmény: $\underline{F} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{F} \cdot \underline{v}$

Mozgási v. kinetikus energia: $F_m = \frac{1}{2}mv^2 = T$

Munkatétel: $A = \int_1^2 \underline{F}d\underline{r} \xrightarrow{*} T_2 - T_1 = A$

Az anyagi pont kinetikus energiájának megváltozása egyenlő az anyagi pontra ható összes erők munkájával.

példa:

1. $\underline{F} \perp \underline{r} \rightarrow A = 0 \rightarrow T_1 = T_2$

2. szabadesés: $\frac{1}{2}mo^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$

$$A = \int_0^h -mgdr = -mgh$$

Anyagi pont mozgásegyenlete:

$\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ (!!! csak inerciarendszerben !!!)

$m \cdot \ddot{\underline{r}} = \underline{F}$ (másodrendű differenciál egyenlet)

derékszögű koordináta-rendszerben:

$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z$

$\underline{r}$ = ? (kezdeti feltételek megadása)

pl.: $t = 0$ –ban

$(\underline{r}, \dot{\underline{r}})$ vagy $(\underline{r}, \ddot{\underline{r}})$ vagy $(\dot{r}, \ddot{r})$ adhatják meg

Konzervatív erőtér. Potenciális energia. A mechanikai energia tétele

általános esetben: $\underline{F} = \underline{F}(\underline{v}, \dot{\underline{v}}, t)$

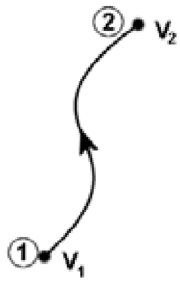
Ha $\underline{F}(\underline{r}, t) = \underline{F}(x, y, z, t)$ akkor ez erőtér.

A tér minden pontjához egy bizonyos időpillanatban egyértelműen meghatározott erő tartozik. Ezt a fajta erőtípust erőtérnek nevezzük. Konzervatív erőtérnek hívjuk az időben állandó erőteret akkor, ha van olyan *v=v(r)* egyértékű skaláris függvény (potenciál, v potenciális energia), amelynek negatív gradiense az erő, azaz ha
$F = -grad\, V$, vagyis

$$F_x = -\frac{\delta V}{\delta x}; F_y = -\frac{\delta V}{\delta y}; F_z = -\frac{\delta V}{\delta z}$$

Konzervatív erőtér tulajdonságai:

1.



$$\int_1^2 \underline{F} d\underline{r} = -\int_1^2 gradV d\underline{r} = -\int_1^2 dV = V_1 - V_2$$

$$-gradV d\underline{r} = (F_x, F_y, F_z)(dx, dy, dz) = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -(\frac{\delta V}{\delta x}dx + \frac{\delta V}{\delta y}dy + \frac{\delta V}{\delta z}dz) = -dV$$

Ez az integrál útfüggetlenül, ugyanazt az eredményt adja.

2. $\oint \underline{F} d\underline{s} = 0$

3. Örvénymentes

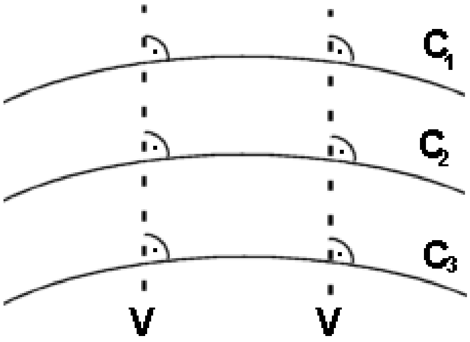
A potenciál fizikai jelentése:

A potenciál csak egy additív állandó erejéig van meghatározva, ezért a potenciál értékét egy önkényesen választott nullpontban 0-nak vehetjük. ($\underline{r}_0$-ban)

$$V(\underline{r}) = -\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{F} d\underline{r} = \int_{\underline{r}}^{\underline{r}_0} \underline{F} d\underline{r}$$

Potenciál jelentése: a tér egy $\underline{r}$ pontjában a potenciál azzal a munkával egyenlő, amelyet a tér erői ellenében végeznünk kell, míg az anyagi pontot a nullpontból az $\underline{r}$ pontba visszük (kvázisztatikus mozgás = szinte gyorsulás nélkül, csak az erőtér ellenében dolgozunk, nem gyorsítjuk).

Szintfelület: $V(x,y,z) = C$



<u>Példák:</u>

1. A Föld nehézségi erőtere:

$$F_x = 0; F_y = 0; F_z = -mg$$

$V = m \cdot g \cdot z$ (homogén térrészben)

2. A gravitációs erőtér

az általános tömegvonzás Newton-féle törvény alapján:

$\underline{F}_{(M)} = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r}{r}$ (negatív, mert vonzásban nyilvánul meg)

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

M által kifejtett m-re ható erő vektoriálisan:

$$\alpha = \gamma \cdot M \cdot m$$

$$\underline{F}_x = -\frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{x}{r}; \underline{F}_y = -\frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{y}{r}; \underline{F}_z = -\frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{z}{r}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\underline{r}(x, y, z)$

$\boxed{V = -\frac{\alpha}{r}}$ potenciál függvény, ugyanis:

$$-\frac{\delta V}{\delta x} = -\frac{\delta V}{\delta r} \cdot \frac{\delta r}{\delta x} = +(-\frac{\alpha}{r^2}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = -\frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = F_x$$

3. A mechanikai energia tétele

$$T_2 - T_1 = \int_1^2 \underline{F}d\underline{r} = \text{konzervatív erőtér esetén} = V_1 - V_2 \rightarrow \boxed{V_1 + T_1 = V_2 + T_2 = \textit{állandó}}$$

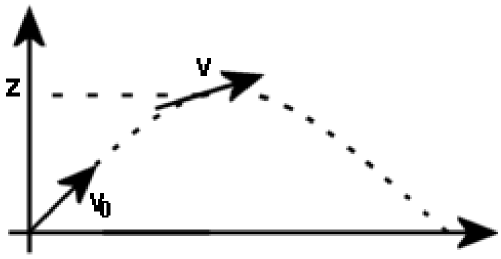
<u>A tömegpontra vonatkozó mechanikai energia-megmaradás tétele:</u>

Konzervatív erőtérben az anyagi pont kinetikus és potenciális energiájának összege állandó. Az összeget teljes mechanikai energiának nevezzük.

pl.:

derékszögű koordináta-rendszerben: $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) = \text{állandó}$

ideális hajítás (nincs légellenállás)



$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \rightarrow$$

$$\rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gz$$

Tehát a sebesség csak a z-től függ.

<u>Nem konzervatív erő:</u> definíció szerint minden olyan erő, amely függ az időtől, vagy a sebességtől. Csak helytől függő erők esetén ezek az ún. örvényes erők.

<u>Centrális erők:</u> az anyagi pontra ható erőt centrálisnak nevezzük, ha az erő vektorának egyenese mindig egy meghatározott ponton (a centrumon) megy keresztül. Az erő nagysága tetszőleges lehet.

Centrális erők (folytatás):

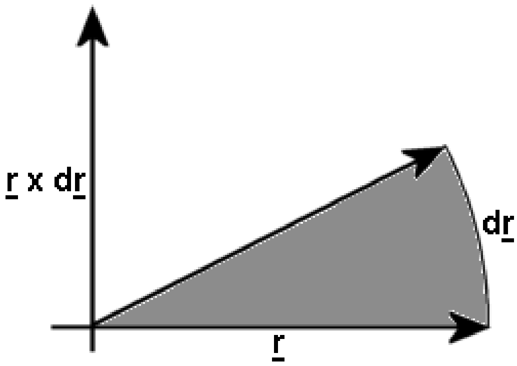
$$m\underline{\ddot{r}} = \underline{F}$$

$$m\underline{\ddot{r}} \times \underline{r} = \underline{F} \times \underline{r}$$

de centrális erő esetén az $\underline{r}$ és $\underline{F}$ egybeesik → keresztszorzatuk 0

$$\frac{d}{dt}(\underline{r} \times \underline{\dot{r}}) = \underline{\dot{r}} \times \underline{\dot{r}} + \underline{\ddot{r}} \times \underline{r} = 0 + 0 \Rightarrow \underline{r} \times \underline{\dot{r}} = \text{állandó vektor}$$

jelentése:



$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\underline{r} \times \underline{\dot{r}}) \quad \text{felületi sebesség (állandó)}$$

Bármilyen centrális erő hatása esetén az anyagi pont felületi sebessége állandó, azaz <u>síkgörbe</u> a pálya, és a rádiuszvektor egyenlő időközök alatt egyenlő területeket súrol (Kepler II.).

<u>Szűkebb értelemben vett centrális erő:</u> amikor az erő nagysága csak r-től függ (nem vektor), a centrumtól való távolságtól.

pl.:

$$\underline{F} = f(r) \cdot \frac{\underline{r}}{r}$$

ennek van potenciálja: $V = -\int_{r_0}^{r} f(r)dr$

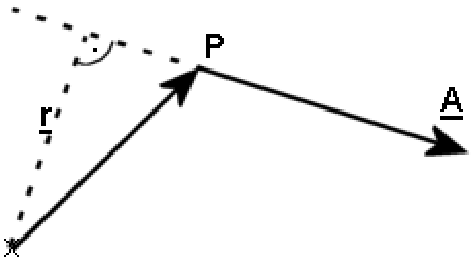
r_0 = nullpotenciálú hely

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f(r) \cdot \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = f(r)\frac{x}{r} = F_x$$

$$F = -grad\, V$$

Az erő és az impulzus momentuma (nyomatéka):



Egy P kezdőpontú $\underline{A}$ vektornak az O pontra vonatkozó nyomatékán értjük az $\underline{r}\ x\ \underline{A}$ vektorszorzatot, ahol $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$

Forgatónyomaték: $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$
Impulzusnyomaték (perdület): $\underline{N} = \underline{r} \times \underline{I} = \underline{(\underline{r} \times m\dot{\underline{r}})}$

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$$

$$m\underline{r} \times \ddot{\underline{r}} = \frac{d}{dt} m(\underline{r} \times \dot{\underline{r}}) = \underline{r} \times \underline{F}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{r} + m\dot{\underline{r}}) = \frac{d}{dt}(\underline{r} + \underline{I}) = \frac{d}{dt}\underline{N} = \underline{M}$$

Az impulzusmomentum idő szerinti deriváltja a forgatónyomatékkal egyenlő (anyagi pont impulzus-momentum tétele).

Centrális erőknél:
$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{0} \Rightarrow \frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{0} \to \underline{N}$ = állandó (impulzusmomentum-megmaradásának tétele)

Speciális problémák az anyagi pont dinamikájából:

Egyenes vonalú, x-tengely menti mozgások:
(1) $m\ddot{x} = F$, kezdeti feltétel: t = 0-ban x = x_0, v = v_0

a, *F = F(t)*:

(1)-ből t szerinti integrálással: $\dot{x} = v = \frac{1}{m}\int_0^t F(t)dt + v_0 = \frac{1}{m}A(t) + v_0$

$x = \frac{1}{m}\int_0^t A(t')dt' + v_0 t + x_0$ a kezdeti feltételeket kielégíti

b, *F = F(x)*:

Ennek mindig van potenciálja (mert centrális és csak a centrumtól mért távolságtól függ az erő nagysága)

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} V(x')dx'$$

konzervatív erőtér → igaz a mechanikai energia megmaradása

$$\frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2 + V(x) = E = \text{állandó}$$

$$(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{2}{m}(E - V(x)) \rightarrow dt = \sqrt{\frac{m}{2(E - V(x))}}dx$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \rightarrow t = t(x) \text{ inverz fv - el} \rightarrow x = x(t)$$

A kezdeti feltétel kiegészítése: $E = \frac{1}{2}mv_0^2 - V(x_0)$

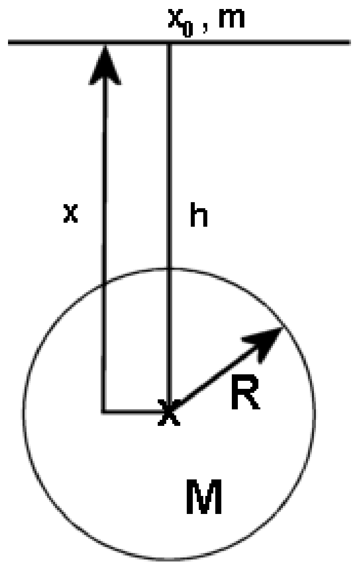
<u>c, $F = F(v)$:</u>

$$m\frac{dv}{dt} = F(v) \rightarrow dt = \frac{m \cdot dv}{F(v)} \rightarrow t = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)} \rightarrow \text{inverz fv.- el } v = v(t) \Rightarrow x = \int_0^t v(t)dt + x_0$$

<u>Esés nagy magasságból:</u>

Feltételek:

- Földet nyugvónak tekintjük
- légellenállástól eltekintünk



ekkor:

$$(1) \quad m\ddot{x} = -\gamma\frac{mM}{x^2}$$

$$(2) \quad my = \gamma\frac{mM}{R} \rightarrow \gamma M = R^2 y$$

(1)-be (2)-t beírva:

$$m\ddot{x} = -m\frac{R^2 y}{x^2}$$

Ez csak a helytől függ (b-eset), van potenciálfüggvénye:

$$V = -\int_{\infty}^{x} -\frac{mR^2 y}{x^2}dx = -\frac{mR^2 y}{x}$$

Mechanikai energiával:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{mR^2 y}{x^2} = \text{állandó} = -\frac{mR^2 y}{x_0}$$

$$v^2 = (\frac{dx}{dt})^2 = 2R^2 y(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}) \rightarrow dt = \frac{1}{R\sqrt{2y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}}dx \rightarrow t = \frac{1}{R\sqrt{2y}}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}}dx$$

pl.:

meteor becsapódása:

$$x_0 = \infty, x = R$$

$$energiatétellel : v = \sqrt{2gR)} \cong 11{,}2 \frac{km}{s}$$

2004. március 16.

<u>Harmonikus rezgőmozgás:</u>

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$x(t)$$

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

<u>Csillapodó rezgőmozgás:</u>

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$$

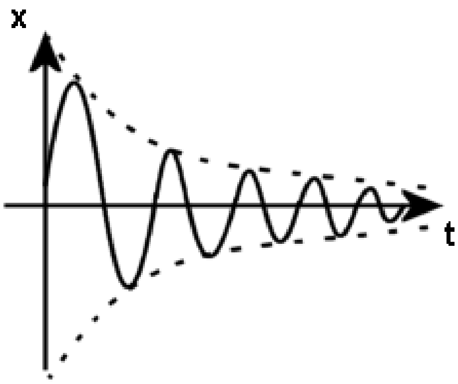
$$x = A \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\beta = \frac{k}{2m}$$

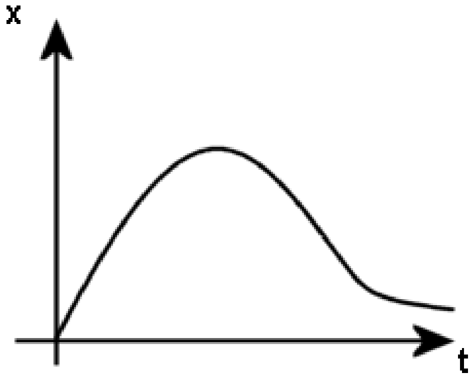
$$\omega_0 = \frac{D}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

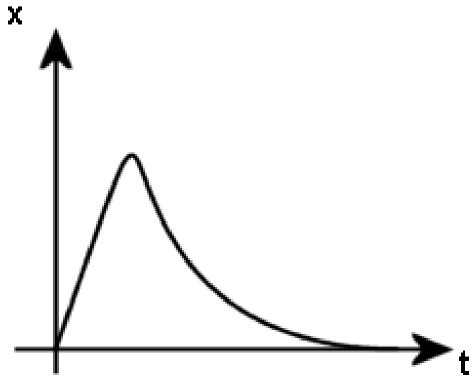
1. Ha $\omega_0 > \beta \rightarrow$ rezgőmozgás



2. $\omega_0 < \beta \rightarrow$ súrlódás nagy
aperiodikus mozgás



3. $\omega_0 = \beta \rightarrow$ aperiodikus határeset



Mozgásegyenlet:
$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0 \cdot \cos \omega t$
komplex amplitúdók módszerét alkalmazzuk az időben stacionárius állapot megadására
$\omega_0 = \dfrac{D}{m}; \beta = \dfrac{k}{2m}; f_0 = \dfrac{F_0}{m}$
$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cdot \cos \omega t \rightarrow f_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t)$
Próbafüggvény: $x = A \cdot \exp[i \cdot (\omega t + \vartheta)] = \hat{A} \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t)$
$\hat{A}$ és ϑ nem a kezdőfeltételektől függ, hanem az állandósult állapotra jellemző.

A próbafüggvény behelyettesítésével:
$\dot{x} = \hat{A} \cdot i \cdot \omega \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t)$
$\ddot{x} = \hat{A} \cdot i^2 \cdot \omega^2 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) = -\hat{A} \cdot \omega^2 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t)$
behelyettesítve:
$$-\hat{A} \cdot \omega^2 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) + 2 \cdot \beta \cdot \hat{A} \cdot i \cdot \omega \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) + \omega_0^2 \cdot \hat{A} \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) = f_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t)$$
$$-\omega^2 \cdot \hat{A} + i \cdot 2\beta \cdot \omega \cdot \hat{A} = f_0$$

$$\hat{A} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \cdot 2\beta \cdot \omega} = f_0 \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \cdot 2\beta \cdot \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \omega^2}$$

$$A^2 = \hat{A} \cdot \hat{A}^* = f_0^2 \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \omega^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \omega^2)^2} = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

<u>A dinamika alapegyenlete mozgó vonatkoztatási rendszerben:</u>

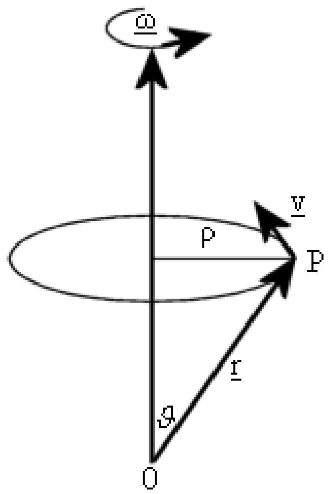
(K inerciarendszerben mozog K' vonatkoztatási rendszer)

A vonatkoztatási rendszereket merev testekhez rögzítjük, vagy azt is mondhatjuk, h. merev testeknek képzeljük el,

A szögsebesség vektor:

$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$

$v = \omega \cdot (r \cdot \sin \vartheta) = \omega \cdot \rho$



$\underline{\omega}$: a kezdőpontból mérjük fel $|\omega|$-et olyan irányítással, hogy az ω végpontjából nézve a forgás az óramutató járásával ellentétes legyen, vagyis $\underline{\omega}$ iránya a forgással jobbmenetű csavart alkosson.

$\underline{\omega}$ jogosan tekinthető vektornak, mert 2ω vektorra nézve a vektori összeadás szabály érvényes.

A hosszadalmas analitikai eljárás helyett egy szemléletesebbet választunk.

a,

Ha t időpillanatra következő dt idő alatt K' rendszer önmagával párhuzamosan eltolódik d$\underline{r}_0$-al, akkor 0'-nek minden más K'-ben rögzített P($\underline{r}$') pontnak a sebessége a t időpillanatban $\frac{d\underline{r}_0}{dt}$, amelyet transzlációs sebességnek nevezünk.

b,
Ha pedig K' egy, a változatlan 0 kezdőpontban átmenő ω szögsebességgel elfordul, a K'-ben rögzített P(r') pont pillanatnyi sebessége K-ban $\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}'$ lesz.

Vezetési sebesség:

$$v_v = \frac{d\underline{r}_0}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

A K' legáltalánosabb elmozdulása a fenti elemi transzlációból és rotációból tevődik össze, így általános érvényű.
Deriválások megkülönböztetése a vonatkoztatási rendszerben:

$\frac{d'}{dt}$: K'-beli deriválás (i', j', k')

Ha most a P anyagi pont K'-ben nem nyugszik, hanem $\underline{v}' = \frac{d'r'}{dt}$ sebességgel mozog, akkor P pont sebessége K-ban ennyivel nagyobb lesz a vezetési sebességhez képest.

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d'\underline{r}'}{dt} + \frac{d\underline{r}_0}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

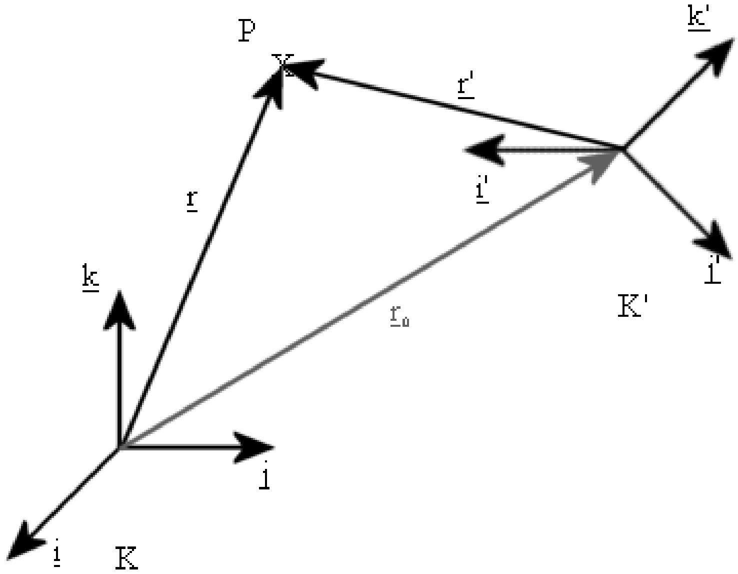
$$\underline{v} = (\underline{v}') + (\underline{v}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{r}')$$

tehát sebesség = relatív sebesség + vezetési sebesség

2004. március 18.

$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{v}_{tr} + \underline{\omega} \times \underline{r}' = \underline{v}' + \underline{v}_v$

K-ban K’-ben



$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d'\underline{r}'}{dt} + \frac{d\underline{r}_0}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{r}' \Rightarrow \frac{d\underline{r}_0}{dt} + \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d'\underline{r}'}{dt} + \frac{d\underline{r}_0}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

$$\frac{d\underline{r}'}{dt} = \frac{d'\underline{r}'}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

Bármely $\underline{A}$ vektornak a K rendszerből és az ehhez képest ω szögsebességgel forgó K’ rendszerből tekintett időbeli változása között

$\frac{d\underline{A}}{dt} = \frac{d'\underline{A}}{dt} + \omega \times \underline{A}$ kapcsolat áll fenn (levezetésben $\underline{A} = \underline{r}'$)

Ha $\underline{A} = \underline{\omega} \Rightarrow \frac{d\underline{\omega}}{dt} = \frac{d'\underline{\omega}}{dt}$, mert $\omega \times \omega = 0$

$\underline{\omega}$ időbeli változása mindkét rendszerben ugyanaz.

$\dot{\underline{v}} = \dot{\underline{v}}' + \dot{\underline{v}}_{tr} + \underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}' + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}'$

itt $\dot{\underline{v}} = \underline{a}$ a P pont gyorsulása K-ban

$\dot{\underline{v}}_{tr} = \underline{a}_{tr}$ a transzlációs gyorsulás

$\frac{d'\underline{v}'}{dt} = \underline{a}'$ a K’-beli, más néven relatív, gyorsulás

$$\dot{\underline{v}}' = \frac{d\underline{v}'}{dt} = \frac{d'\underline{v}'}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{v}' = \underline{a}' + \underline{\omega} \times \underline{v}'$$

$\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}' = \underline{\omega} \times \underline{v}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') = \underline{\omega} \times \underline{v}' - \omega^2 \underline{s}$, ahol $\underline{s}$ a mozgó pont forgástengelytől mért irányított távolsága

$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_{tr} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') + 2(\underline{\omega} \times \underline{v}') + (\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}')$

$m\underline{a} = \underline{F}$ (K-ban)

K'-ben:

$\underline{a}'$ – re rendezve: $m\underline{a}' = \underline{F} - m \cdot \underline{a}_{tr} - m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') - 2m(\underline{\omega} \times \underline{v}') - m(\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}')$

Ha csak K'-vel foglalkozunk, akkor megállapodhatunk abban, hogy r'-ben, v'-ben a'-ben a vesszőt elhagyjuk, és $\frac{d'}{dt}$ helyett $\frac{d}{dt}$-t használunk, ekkor a dinamika alapegyenlete K'-ben:

$m \cdot \underline{\ddot{r}} = \underline{F} - m \cdot \underline{a}_{tr} - m \cdot \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times r) - 2m(\underline{\omega} \times \dot{r}) - m(\underline{\dot{\omega}} \times r)$

A dinamika alapegyenletét bármely vonatkoztatási rendszerben alkalmazhatjuk, ha az anyagi pontra ható erőhöz, az ún. tehetetlenségi erőket hozzáadjuk.

$-m \cdot \underline{a}_{tr}$: transzlációs tehetetlenségi erő

$-m \cdot \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = +m \cdot \omega^2 \underline{s}$: centrifugális erő (kifelé hat)

$-2m(\underline{\omega} x \underline{v})$: Coriolis – erő

$-m(\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r})$: szöggyorsulásból származó tehetetlenségi erő

<u>Mozgások a forgó Földön, szabadesés:</u>

Az anyagi pont mozgását a Földhöz viszonyítva (tehát ha forgó rendszerben akarjuk pontosan leírni) akkor a pontra ható erőkhöz hozzá kell adni a centrifugális és a Coriolis-erőt.

$\underline{F}_f = m\omega^2 \underline{s}$

$\underline{F}_c = 2m(\underline{v} \times \underline{\omega})$

$|\underline{\omega}| = \frac{2\pi}{86164} \frac{1}{s} \cong 7{,}29 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}$

A g nagysága:

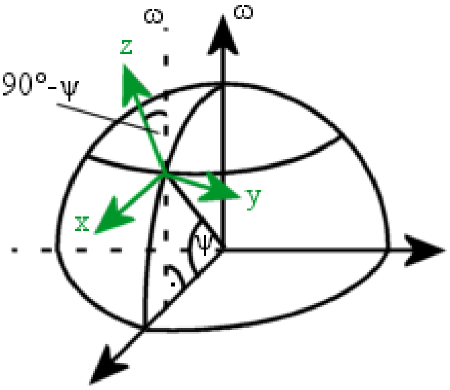
- egyenlítőn: $\approx 978 \frac{cm}{s}$
- sarkokon: $\approx 983{,}2 \frac{cm}{s}$

A Föld alakja geoid, emiatt a g nem pontosan a Föld középpontja felé mutat, hanem a geoid felületre merőleges irányú.

Általában a mozgás mérete miatt g-t állandónak tekintjük.

$m \cdot \underline{\ddot{r}} = m \cdot g + 2m(\underline{\dot{r}} \times \underline{\omega})$

A Föld gravitációs vonzerejének és a centrifugális erőnek az eredője a test súlya.



x: Észak-Déli irány
y: Nyugat-Kelet
z: a geoirda merőlegesen felfelé mutat
ψ földrajzi szélességű hely

$\underline{\ddot{x}} = ?$

$\underline{r}(x, y, z), \underline{\dot{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

$\underline{g}(0,0,-g), \underline{\omega}(-\omega \cdot \cos\psi, 0, \omega \cdot \sin\psi)$

$$2\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ -\omega \cdot \cos\psi & 0 & \omega \cdot \cos\psi \end{vmatrix} = 2[[\dot{y} \cdot \omega \cdot \sin\psi]\underline{i} - [\dot{x} \cdot \omega \cdot \sin\psi + \dot{z} \cdot \omega \cdot \cos\psi]\underline{j} + [\dot{y} \cdot \omega \cdot \cos\psi]\underline{k}] =$$

$= 2 \cdot \underline{\dot{r}} \times \underline{\omega}$

$m\ddot{r} = m \cdot \underline{g} + 2m(\underline{\dot{r}} \times \underline{\omega})$

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{x} = 2\omega \cdot \sin\psi \cdot \dot{y} \\ &\ddot{y} = -2\omega \cdot \dot{x}\sin\psi - 2\omega \cdot \dot{z}\cos\psi \\ &\ddot{z} = -g + 2 \cdot \omega \cdot \dot{y} \cdot \cos\psi \end{aligned}}$$

<u>Szabadesés:</u>

Kezdeti feltételek:

$t = 0 \quad ; \quad x = y = 0 \quad ; \quad z = h \quad ; \quad \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$

ω ψ

Mozgások a forgó Földön, szabadesés:

Az anyagi pont mozgását a Földhöz viszonyítva (tehát ha forgó rendszerben akarjuk pontosan leírni) akkor a pontra ható erőkhöz hozzá kell adni a centrifugális és a Coriolis-erőt.

$$\underline{F}_f = m\omega^2 \underline{s}$$

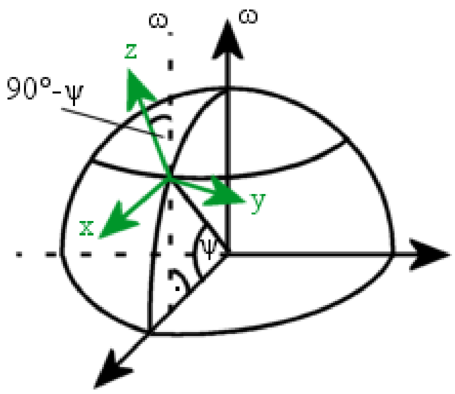
$$\underline{F}_c = 2m(\underline{v} \times \underline{\omega})$$

$$|\underline{\omega}| = \frac{2\pi}{86164}\frac{1}{s} \cong 7{,}29 \cdot 10^{-5}\frac{1}{s}$$

A g nagysága:

- egyenlítőn: $\approx 978\frac{cm}{s}$
- sarkokon: $\approx 983{,}2\frac{cm}{s}$

A Föld alakja geoid, emiatt a g nem pontosan a Föld középpontja felé mutat, hanem a geoid felületre merőleges irányú.
Általában a mozgás mérete miatt g-t állandónak tekintjük.
$m \cdot \underline{\ddot{r}} = m \cdot g + 2m(\underline{\dot{r}} \times \underline{\omega})$
A Föld gravitációs vonzerejének és a centrifugális erőnek az eredője a test súlya.



x: Észak-Déli irány
y: Nyugat-Kelet
z: a geoirda merőlegesen felfelé mutat
ψ földrajzi szélességű hely

$$\underline{\ddot{x}} = ?$$

$$\underline{r}(x, y, z), \underline{\dot{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\underline{g}(0, 0, -g), \underline{\omega}(-\omega \cdot \cos\psi, 0, \omega \cdot \sin\psi)$$

$$2\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ -\omega \cdot \cos\psi & 0 & \omega \cdot \cos\psi \end{vmatrix} = 2[[\dot{y} \cdot \omega \cdot \sin\psi]\underline{i} - [\dot{x} \cdot \omega \cdot \sin\psi + \dot{z} \cdot \omega \cdot \cos\psi]\underline{j} + [\dot{y} \cdot \omega \cdot \cos\psi]\underline{k}] =$$

$$= 2 \cdot \underline{\dot{r}} \times \underline{\omega}$$

$$m\ddot{r} = m \cdot \underline{g} + 2m(\underline{\dot{r}} \times \underline{\omega})$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega \cdot \sin\psi \cdot \dot{y} \\ \ddot{y} &= -2\omega \cdot \dot{x}\sin\psi - 2\omega \cdot \dot{z}\cos\psi \\ \ddot{z} &= -g + 2 \cdot \omega \cdot \dot{y} \cdot \cos\psi \end{aligned}}$$

Szabadesés:

Kezdeti feltételek:

$t = 0$; $x = y = 0$; $z = h$; $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$

Csatolt diff. egyenletek miatt közelítő megoldást keresünk (a nagyságrendekkel kisebb mennyiségeket elhagyjuk).

Ha $\omega = 0$ lenne $\Rightarrow \dot{x}$ és $\dot{y}$ mindig zérus lenne $(\dot{x}, \dot{y} \approx \omega)$

Ha a forgást figyelembe vesszük, akkor $\dot{x}$ és $\dot{y}$ jóval kisebb lesz mint $\dot{z}$

Az ún. másodrendben kicsiny tagokat elhagyjuk

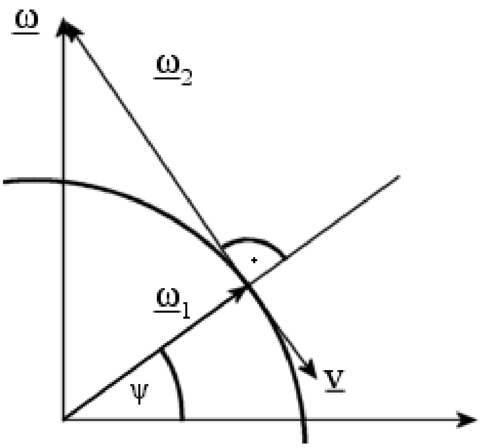
$\Rightarrow \ddot{x} \cong 0$; $\ddot{y} = -2\omega \cdot \dot{z} \cdot \cos\psi$; $\ddot{z} = -y$

$\Rightarrow x = 0$; $z = h - \frac{1}{2}gt^2$; $\dot{z} = -gt \Rightarrow \ddot{y} = 2gt \cdot \omega \cdot \cos\psi, \dot{y} = gt^2\omega \cdot \cos\psi, y \cong \frac{1}{3}gt^3\omega \cdot \cos\psi$

Mivel az y-tengelyt K-felé vettük fel, ezért a szabadon eső test a függőlegestől mindig K-felé térül.

Pl.: $\psi = 45°$ $h = 100\ m$ $y = 1{,}5\ cm$

Vízszintes mozgás:



$\underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2$

$\underline{\omega}_1$ függőleges

$\underline{\omega}_1 = \omega \cdot \sin\psi$

$\underline{\omega}_2$ vízszintes

$\underline{\omega}_2 = \omega \cdot \cos\psi$

$\underline{F}_{Coriolis} = 2m(\underline{v} \times \underline{\omega}_1) + 2m(\underline{v} \times \underline{\omega}_2) = \underline{F}_{C1} + \underline{F}_{C2}$

$\underline{F}_{C1}$: Északon a sebességre merőlegesen, jobbfelé irányuló erőt jelent
Délen balfelé irányul
A vízszintesen mozgó test a Föld forgása következtében az Északi féltekén, a pályájától jobbra, a Délin balra tér el.

Pl.: ha a_c-t állandónak tekintjük: t idő alatt az eltérülés: $\frac{a_c t^2}{2}$

$v = 500\frac{m}{s}$ $\psi = 45°$ $\Delta t = 20\ s$ $s = 10\ km \Rightarrow \Delta s = 10\ m$

$\underline{F}_{C2}$: lefelé vagy felfelé mutat, ha a test Kelet felé mozog, akkor súlycsökkenés figyelhető meg

Pl.: $m = 70\ kg$
$v = 1\ m/s$
$\Delta G \cong 0{,}01\ N$

PONTRENDSZEREK MECHANIKÁJA

<u>A pontrendszer és a rá ható erők:</u>

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{\tilde{F}}_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$\underline{\tilde{F}}_i = \underline{F}_i + \sum_{k=1}^{n} \underline{F}_{ik}$$

külső erők belső erők

A külső erőket általában adottnak tételezzük fel, a belső erőket viszont sok esetben nem ismerjük, ezekre vonatkozólag általában azt tesszük fel, h. centrális erők.

<u>A pontmechanika alapegyenlete:</u>

a, Newton-féle mozgásegyenletek:

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \sum_{k=1}^{n} \underline{F}_{ik} \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

b, Akció-reakció elve alapján

$$\underline{F}_{ik} = -\underline{F}_{ki}$$

c, A belső erők centrális erők, vagyis $\underline{F}_{ik}$ az m_i és m_k tömegű pontokat összekötő egyenesek irányába esik (ez új alapfeltevés)

a, b és c alapján levezethető a pontrendszerek mechanikájának 3 általános tétele: tömegközéppont, impulzusmomentum és az energia tétele.
szabadrendszer: a pontjait mozgásokban semmi nem korlátozza
Pl.: égitestek rendszere
kötött rendszer: a pontok koordinátái és ezek változásai között mellékfeltételek, vagy másképpen kényszerfeltételek vannak az itt fellépő erőket 2 csoportra osztjuk:

- kényszer v. reakcióerők (geometriai eredet)
- szabaderők (fizikai eredetűek pl.: gravitáció)

Tömegközéppont tétel (Impulzus-tétel):
a pontrendszer „n”-számú mozgásegyenletét összeadjuk

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \underline{F}_i k$$

A b, pont alapján: $\underline{F}_{ik} + \underline{F}_{ki} = 0 \qquad (i \neq k)$

$$\sum m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum \underline{F}_i = \underline{F}$$

$$\sum m_i \ddot{\underline{r}}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \dot{\underline{r}}_i\right) = \frac{d}{dt}\sum m_i \underline{v}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum \underline{I}_i\right) = \frac{d\underline{I}}{dt}, \text{ahol } I := \sum \underline{I}_i = \sum m_i \underline{v}_i$$

Anyagi pontrendszer teljes impulzusának idő szerinti deriváltja egyenlő a rendszerre ható külső erők eredőjével. Ez az impulzus-tétel.

$$\frac{d\underline{I}}{dt} = \underline{F}$$

Pontrendszer tömegközéppontja:

$$\underline{r}_0 = \frac{\sum m_i \underline{r}_i}{\sum m_i}$$

$$\sum m_i \ddot{\underline{r}}_i = m \frac{\sum m_i \ddot{\underline{r}}_i}{m} = \boxed{m \ddot{\underline{r}}_0 = \underline{F}}$$

A tömegközéppont tétele: a pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha az egész rendszer tömege a tömegközéppontban lenne egyesítve, és az összes külső erő erre a pontra hatna.

Speciális eset: ha a rendszerre külső erők nem hatnak, vagy ha a külső erők eredője zérus, akkor a rendszer teljes impulzusa állandó, azaz a tömegközéppont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, vagy nyugalomban van. Ez a teljes impulzus megmaradásának tétele.

2004. III. 25.

Impulzusmomentum tétele:

$m_i \underline{\ddot{r}}_i = \underline{F}_i + \sum\limits_{(k)} \underline{F}_{ik}$ (i-dik tömegpontra vonatkoztatott egyenlet)

$\sum\limits_{(i)} m_i \underline{\ddot{r}}_i \times \underline{\ddot{r}}_i = \sum\limits_{(i)} \underline{r}_i \times \underline{F}_i + \sum\limits_{(i)} \sum\limits_{(k)} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ik}$

A bal oldal: $\frac{d}{dt} \sum\limits_{(i)} m_i \underline{r}_i \times \underline{\dot{r}}_i$, mert $\sum m_i \underline{\dot{r}}_i \times \underline{\dot{r}}_i = 0$ (mert $\underline{\dot{r}}_i \times \underline{\dot{r}}_i = 0$)

Teljes impulzus momentum: $\underline{N} = \sum \underline{N}_i = \sum \underline{r}_i \times m_i \underline{\dot{r}}_i$

$\underline{M} = \sum \underline{M}_i = \sum \underline{r}_i \times \underline{F}_i$ a külső erők teljes forgatónyomatéka

$\underline{r}_i \times \underline{F}_{ik} + \underline{r}_k \times \underline{F}_{ki} = \underline{r}_i \times \underline{F}_{ik} - \underline{r}_k \times \underline{F}_{ik} = (\underline{r}_i - \underline{r}_k) \times \underline{F}_{ik} = 0 \Rightarrow \sum\limits_{(i)} \sum\limits_{(k)} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ik} = 0$

$$\boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}}$$

A pontrendszer teljes impulzusmomentumának idő szerinti deriváltja egyenlő az összes külső forgatónyomatékának eredőjével, ha a belső erők centrális erők (tapasztalat, mérés alapján a belső erők centrálisak)

<u>Speciális eset:</u> Ha a rendszerre külső erők nem hatnak, vagy a külső erők forgatónyomatékának eredője zérus, akkor a rendszer teljes impulzusmomentuma állandó, ez a teljes impulzusmomentum megmaradásának tétele.

tehát: $\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{0} \Rightarrow \underline{N} = \textit{állandó}$

<u>Energia-tétel:</u>

$m_i \underline{\ddot{r}}_i = \underline{\tilde{F}}_i$ ($\underline{\tilde{F}}_i$: külső és belső erőket is tartalmazza)

$\sum m_i \underline{\dot{r}}_i \underline{\ddot{r}}_i = \sum \underline{\tilde{F}}_i \underline{\dot{r}}_i$

$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2} \sum m_i \underline{\dot{r}}_i^2) = \frac{1}{2} \sum 2 m_i \underline{\dot{r}}_i \underline{\ddot{r}}_i = \sum m_i \underline{\dot{r}}_i \underline{\ddot{r}}_i$

$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2} \sum m_i \underline{\dot{r}}_i^2) = \frac{\sum \underline{\tilde{F}}_i d\underline{r}_i}{dt}$

bal oldal: a rendszer teljes kinetikus erergiája *(T)*

jobb oldal: elemi munka (a rendszerre ható összes erő) $\frac{dT}{dt} = \frac{dA}{dt}$

mindkét oldalt integráljuk T_1 – től T_2 – ig

$T_2 - T_1 = A$

A rendszer kinetikai energiájának megváltozása = a rendszerre ható összes erő (külső és belső szabad és kényszererők) munkájával.

Speciális eset:

Konzervatív rendszerek: Ha valamennyi $\underline{F}_i$ szabaderő $\underline{F}_{xi}$, $\underline{F}_{yi}$, $\underline{F}_{zi}$, komponensei kifejezhetők a csak helytől függő egyértékű, ún. potenciálfüggvény segítségével, vagyis

$$F_{xi} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}; \quad F_{yi} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}; \quad F_{zi} = -\frac{\partial V}{\partial z_i};$$

$$V = V(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n)$$

A szabaderő elemi munkája konzervatív rendszerben:

$$dA_{sz} = \sum \underline{F}_i d\underline{r}_i = -\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}dz_i\right) = -dV \quad \text{(teljes differenciál)}$$

$$dr_i(dx_i, dy_i, dz_i)$$

így: $A_{sz} = \int_1^2 \sum \underline{F}_i d\underline{r}_i = -\int_1^2 dV = -(V_2 - V_1)$

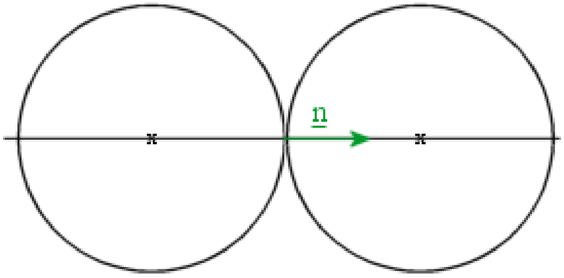
Ez csak a kezdő és véghelyzettől függ, a potenciális energia negatív megváltozásával egyenlő.
Mechanikai energia megmaradásának tétele: konzervatív szabad rendszer kinetikus és potenciális energiájának összege állandó (kötött rendszernél ez akkor áll fenn, ha a kényszererő munkája 0).
T + V = állandó ugyanis $T_2 - T_1 = A = -(V_2 - V_1) \Rightarrow T_2 + V_2 = T_1 + V_1$

Alkalmazások:

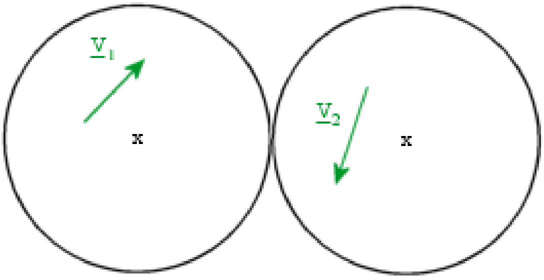
Ütközés: két vagy több egymáshoz képest mozgó test érintkezésbe lép egymással
testek: anyagi pontok, forgást nem végző golyók
jellemzők: $\left.\begin{array}{l}\tau \text{ (tau): ütközési idő (rövid)} \\ \underline{F} \text{ (nagy)}\end{array}\right\}$ ismeretlenek
probléma: adottak az m_i tömegpontok és sebességei. Ezek ütköznek.
kérdés: ütközés után milyenek lesznek a sebességek

Centrális ütközés: az érintkezési pontban a két felület közös normálisa (ütközési normális) egybeesik a két súlypontot összekötő egyenessel. Két homogén gömb ütközése mindig centrális)

Egyenes ütközés: $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ hatásvonala egybeesik



Ferde ütközés: $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ nem esik egy egyenesbe



Két szabad anyagi pontra: m_1, m_2 tömegek $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ sebességek ütközés előtt, $\underline{v}_1'$, $\underline{v}_2'$ sebességek ütközés után.

Mivel az ütközési erők belső erők, ezért a tömegközéppont tétel alapján:

$$m_1\underline{v}_1' + m_2\underline{v}_2' = m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2$$

a, tökéletesen rugalmas ütközés, amely után a rendszer kinetikai energiája megmarad:

$$\frac{1}{2}m_1(\underline{v}_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(\underline{v}_2')^2 = \frac{1}{2}m_1\underline{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\underline{v}_2^2$$

b, tökéletesen rugalmatlan ütközés: a két test sebességkomponense az ütközési normális irányában (n): $\underline{v}_{1n}' = v_{2n}'$

c, valóságos ütközés: tapasztalat alapján: $\varepsilon = \dfrac{v_{1n}' - v_{2n}'}{v_{2n} - v_{1n}}$ közelítőleg független a sebességektől

$\varepsilon = 1$: tökéletesen rugalmas

$\varepsilon = 0$: tökéletesen rugalmatlan

<u>Egyenes ütközés:</u>

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & m_1v_1' + m_2v_2' = m_1v_1 + m_2v_2 \\ (2) & v_1' - v_2' = \varepsilon(v_2 - v_1)\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} v_1' = \dfrac{m_1 - \varepsilon\cdot m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \dfrac{(1+\varepsilon)\cdot m_2}{m_1 + m_2}v_2 \\ v_2' = \dfrac{(1+\varepsilon)\cdot m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \dfrac{m_2 - \varepsilon\cdot m_1}{m_1 + m_2}v_2 \end{array}$$

2004. március 30.

Kinetikai energia csökkenése:

$$\Delta T = \frac{1-\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

$$\varepsilon = 1 \rightarrow \Delta T = 0$$

$$\varepsilon = 0 \rightarrow \Delta T = \frac{1}{2}$$

Ferde ütközés (ismert ütközési normális mellett):

visszavezethető egyenes ütközésre: $\underline{v}_n \| \underline{n}$, $v_t \|$ érintő síkkal $\Rightarrow v_{1t}' = v_{1t}; v_{2t}' = v_{2t}$

Rakéták és mesterséges égitestek

Rakéta: üzemanyag elégése → gázok áramlanak ki (égéstermék) → reakcióerő

$m = m(t)$ $\quad \underline{v} = \underline{v}(t)$ $\quad$ (K inerciarendszerben)

$$\mu = -\frac{dm}{dt} \text{ (tömegáram)}$$

Áramoljon ki $\mu \cdot dt = -dm$ gáz a rakétához viszonyítva $\underline{c}$ sebességgel, K-hoz képest

$$\underline{v}' = \underline{v} + \underline{c} \quad (*)$$

Tehát a rakétára és a kiáramló gázra:

$$\frac{d(m\underline{v})}{dt} - \frac{dm}{dt}\underline{v}' = \underline{F} \leftarrow \text{külső erők eredője}$$

rakéta impulzusa + gáz impulzusa = tömegpontrendszer impulzusa

$$\frac{dm}{dt}\underline{v} + \frac{d\underline{v}}{dt}m - \frac{dm}{dt}\underline{v} - \frac{dm}{dt}\underline{c} = \underline{F}$$

$$m\frac{dv}{dt} = \underline{F} + \frac{dm}{dt}\underline{c} = \underline{F} - \mu \cdot \underline{c}$$

$\underline{F}$ vektor külső erő: pl.: nehézségi erő, külső ellenállás

μ : időegység alatt kiáramló gáz

Speciális eset:

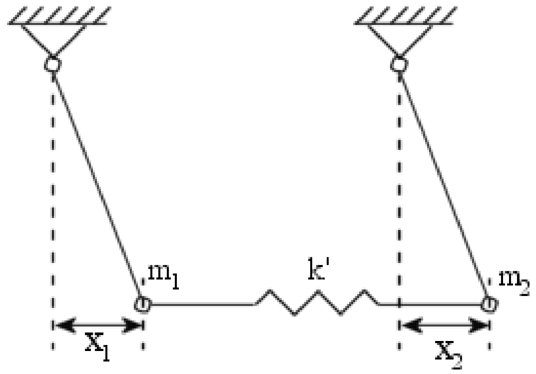
egyenes vonalú egyenletes mozgás:
$\underline{F} = \underline{0}$ v. $F_2 = F_1$ és $F_x = F_y = 0$; $v_z = v$ és $v_z' = v'$

$$m\frac{dv}{dt} = F - \frac{dm}{dt}c \xrightarrow{F=0} m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}c \rightarrow dv = -c\frac{dm}{m} \rightarrow v(t) = -c\int_{m_0}^{m(t)} \frac{dm}{m} \Leftrightarrow v(t) = c \cdot \ln\frac{m_0}{m(t)}$$

$\boxed{v_{max} = c \cdot \ln\frac{m_0}{m_v}}$ m_v :rakéta végső tömege

---

Csatolt rezgések



(kis kitérés esetén)

(1) $m_1\ddot{x}_1 = -c_1x_1 + k'(x_2 - x_1)$
(2) $m_2\ddot{x}_2 = -c_2x_2 - k'(x_2 - x_1)$

c: kitéréssel arányos visszatérítő-erő

Legyen: $\omega_1{}^2 = \frac{c_1}{m_1}$; $\omega_2^2 = \frac{c_2}{m_2}$; $k_1 = \frac{k'}{m_1}$; $k_2 = \frac{k'}{m_2}$

(1)' $\ddot{x}_1 = -\omega_1^2 \cdot x_1 + k_1(x_2 - x_1)$
(2)' $\ddot{x}_2 = -\omega_2^2 \cdot x_2 + k_2(x_2 - x_1)$

(k_1, k_2) : csatolási együtthatók

Speciális eset:

$$\omega_0 := \omega_1 - \omega_2; \quad k := k_1 = k_2$$
$$z_1 = x_1 - x_1; \quad z_2 = x_1 + x_2$$
$$(1)'' \quad \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 + k(x_2 - x_1)$$
$$(2)'' \quad \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 + k(x_2 - x_1)$$
$$(1)''+(2)'' \Rightarrow \ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 = 0$$
$$(1)''-(2)'' \Rightarrow \ddot{z}_1 = -\omega_0^2 z_1 - 2kz_1$$
$$\ddot{z}_1 + (\omega_0^2 + 2k)z_1 = 0$$
$$z_2 + \omega_0^2 z_2 = 0$$
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2k}$$
$$z_1 = a_1 \cdot \cos\omega t + b_1 \cdot \sin\omega t$$
$$z_2 = a_2 \cdot \cos\omega t + b_2 \cdot \sin\omega t$$

Pl.:

$$t = 0 \quad \mathrm{x}_1 = c \quad \mathrm{x}_2 = 0 \quad \dot{\mathrm{x}}_1 = \dot{\mathrm{x}}_2 = 0$$
$$\mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2 = \mathrm{c} \quad \dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0$$
$$a_1 = a_2 = 0$$
$$z_1 = c \cdot \cos\omega t \quad z_2 = c \cdot \cos\omega t$$
$$x_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2}c(\cos\omega t + \cos\omega_0 t)$$
$$x_1 = c \cdot \cos\frac{\omega - \omega_0}{2}t \cdot \cos\frac{\omega + \omega_0}{2}t$$
$$x_2 = \frac{z_2 - z_1}{2} = \frac{1}{2}c(\cos\omega_0 t - \cos\omega t) = c \cdot \sin\frac{\omega - \omega_0}{2}t \cdot \sin\frac{\omega_0 + \omega}{2}t$$
$$z_1 = x_1 - x_2$$
$$z_2 = x_1 + x_2$$

Tömegpontrendszer forgása z-tengely körül

$(x_i, y_i, z_i) \rightarrow (l_i, \varphi_i, z_i)$ (henger koordináták)

$(\underline{r} \times \dot{\underline{r}})_z = x\dot{y} - y\dot{x} = (\dot{x} = \dot{l} \cdot \cos\varphi - l \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi},\quad \dot{y} = \dot{l} \cdot \sin\varphi - l \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) =$

$= l \cdot \dot{l} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + l^2 \cdot \cos^2 \varphi\dot{\varphi} - (l \cdot \dot{l} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - l^2 \cdot \sin^2 \varphi\dot{\varphi}) = l^2 \cdot \dot{\varphi}$

A „z” tengely körüli forgásnál (síkmozgás):

$$N = N_z = \sum m_i l_i^2 \dot{\varphi}_i = \Theta\omega$$

$\Theta := \sum m_i l_i^2$ (tehetetlenségi nyomaték)

merev test esetén:

$\varphi := \varphi_i$

$\varphi = \omega$

(1) $m \cdot \ddot{\underline{r}}_0 = \sum \underline{F}_i$ tömegközéppont tétel

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\underline{N}}{dt} = \underline{M}$ perdülettétel

$f = 3 + 3 = 6$ szabadságfok

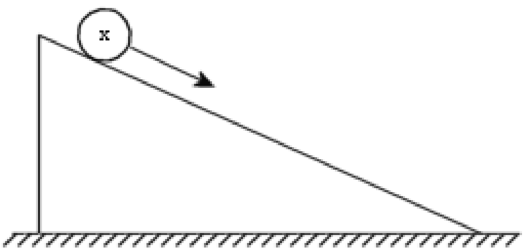
Mozgás rögzített tengely körül:

$$\boxed{\Theta\dot{\omega} = M_z}$$

$N_z = \Theta\omega$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\omega \cdot l_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i l_i^2 = \frac{1}{2} \Theta\omega^2$$

Síkmozgás:



$f = 1 + 2 = 3$

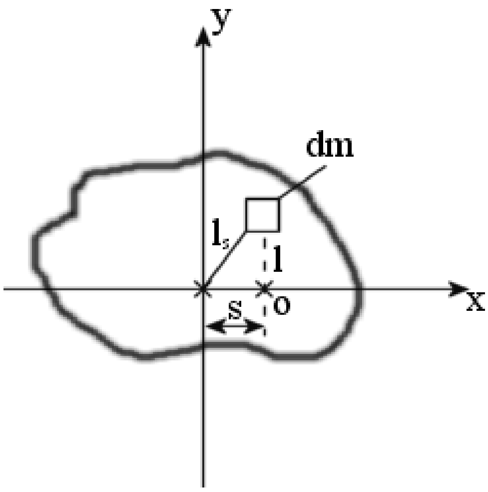
(1) $m \cdot \ddot{\underline{r}}_0 = F$

(2) $\dot{\underline{\mathrm{N}}} = \underline{\mathrm{M}}$

$$\boxed{\Theta_{tk}\dot{\omega} = M_z}$$

Steiner-tétel:

$\Theta = \int l^2 dm$



A tömegeloszlás nem feltétlenül homogén.

$\Theta_s = \int l_s^2 dm$

$\Theta = \int (x-s)^2 + y^2 dm = \int x^2 + y^2 dm + s^2 \int dm - 2s \int xdm \Rightarrow \Theta_0 = \Theta_s + ms^2$

Merev test kinetikai energiája:

$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v_0^2 \sum m_i + \frac{1}{2} \sum m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)^2 + \underline{v}_0 \sum m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)$

„O" pont : tömegközéppont

$T_{transzlációs} = \frac{1}{2} m v_0^2$

$T_{rotációs} = \frac{1}{2} \sum m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)^2$

$T_{kölcsönhatás} = \underline{v}_0 \sum m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)$

Ha a vonatkoztatási pont a test tömegközéppontja, akkor $T_{kölcs} = 0$, mert

$T_{kölcs} = \underline{v}_0 \sum m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) = \underline{v}_0 (\underline{\omega} + \sum m_i \underline{r}_i) = m\underline{v}_0 (\omega \times \frac{\sum m_i \underline{r}_i}{m}) = m\underline{v}_0 (\underline{\omega} \times \underline{r}_s)$

$!(s = tk)!$

$\underline{r}_{s(tk)} = \underline{0} \Rightarrow T_{kölcs} = 0$

Ha a test egy pontja rögzített → $\underline{v}_0 = \underline{0}$, $T_{transz} = 0$, $T_{kölcs} = 0$

2004. április 6.

A forgási energia

$$T_{rotációs} = \frac{1}{2}\sum m_i(\underline{\omega}\times\underline{r}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum m_i[(\omega_y z_i - \omega_z y_i)^2 + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)^2 + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)^2]$$

$$T_{rot=}\frac{1}{2}(\Theta_{xx}\omega_x^2 + \Theta_{yy}\omega_y^2 + \Theta_{zz}\omega_z^2 - 2\cdot\Theta_{xy}\omega_x\omega_y - 2\cdot\Theta_{yz}\omega_y\omega_z - 2\cdot\Theta_{zx}\omega_z\omega_x)$$

Tehetetlenségi nyomatékok:

$$\Theta_{xx} = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2)$$

$$\Theta_{yy} = \sum m_i(x_i^2 + z_i^2)$$

$$\Theta_{zz} = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

Elhajlásos (deviációs) nyomatékok:

$$\Theta_{xy} = \sum m_i x_i y_i$$

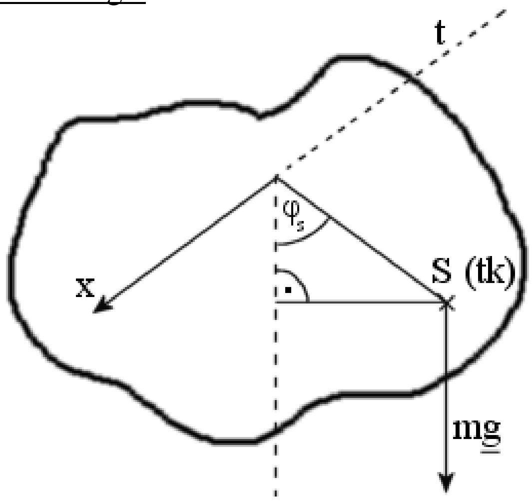
$$\Theta_{yz} = \sum m_i y_i z_i$$

$$\Theta_{zx} = \sum m_i z_i x_i$$

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{bmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{bmatrix} \text{tehetetlenségi tenzor}$$

$$\mathrm{T_{rot}} = \underline{\omega}'\cdot\underline{\underline{\Theta}}\cdot\underline{\omega}$$

Fizikai inga:



$$\Theta_x\ddot{\varphi} = M_x \quad \text{(perdülettétel)}$$

$$\Theta_x\ddot{\varphi} = -mgs\cdot\sin\varphi$$

kis lengések esetén:

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

$$\Theta_x\ddot{\varphi}(t) + mgs\cdot\varphi(t) = 0$$

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{mgs}{\Theta_x}\varphi(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgs}{\Theta_x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_x}{mgs}}$$

Speciális eset: tömegpont

$\Theta = m \cdot l^2$ (matematikai inga)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Csavarási inga (torziós inga):

$D\varphi = M$ D : irányító nyomaték (állandó)

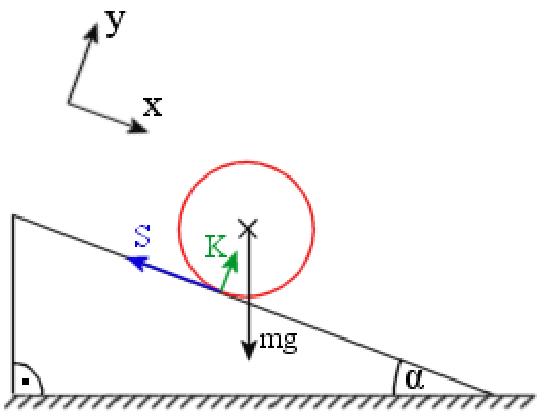
perdülettétel : $D\ddot{\varphi} = -D\varphi$

$\Theta\ddot{\varphi} + D\varphi = 0$

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{\Theta}\varphi = 0 \quad (\frac{D}{\Theta} = \omega^2)$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D}}$$

Henger v. gömb legördülése lejtőn:



tiszta gördülés:

$ds = rd\varphi$

$v = r\omega$

$a = r\dot{\omega}$

Külső erők:

a, $m\underline{g}$ $(mg \cdot \sin\alpha, -mg \cdot \cos\alpha)$

b, K (kényszererő)

c, S (tapadási súrlódás)

Tömegközéppont tétele:

(1) $m\ddot{x} = ma = mg \cdot \sin\alpha - S$

(2) $0 = -mg \cdot \cos\alpha + K$

Perdülettétel : (3) $\Theta\dot{\omega} = rS$

Kényszerfeltétel : (4) $a = r\dot{\omega}$

$$(3) \Rightarrow S = \frac{\Theta\dot{\omega}}{R} \xrightarrow{(1)} ma = mg \cdot \sin\alpha - \frac{\Theta\dot{\omega}}{r} \xrightarrow{\dot{\omega}=\frac{a}{r}} ma + \frac{\Theta a}{r^2} = mg \cdot \sin\alpha$$

$$a = mg \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{m + \frac{\Theta}{r^2}}$$

$$\boxed{a = \frac{mr^2}{mr^2 + \Theta_S} \cdot g \cdot \sin\alpha}$$ (súlypont gyorsulása)

Ha henger:

$\Theta = \frac{1}{2}mr^2$ (tömör)

$$a_h = \frac{mr^2}{mr^2 + \frac{1}{2}mr^2} \cdot g \cdot \sin\alpha = \frac{2}{3} g \sin\alpha$$

Tömör gömb:

$$\Theta = \frac{2}{5}mr^2$$

$$a_h = \frac{5}{7} g \sin\alpha$$

$$S = \frac{\Theta\dot{\omega}}{r} = \frac{\Theta a}{r^2}$$

$$\dot{\omega} = \frac{a}{r}$$

$$K = mg \cdot \cos\alpha$$

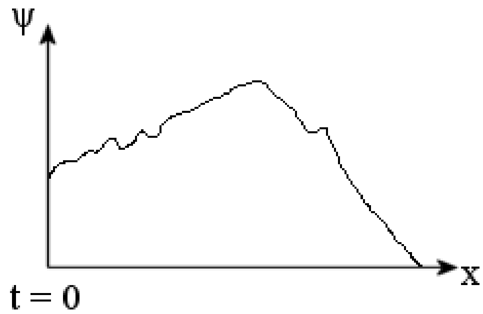
$$S = \frac{\Theta a}{r^2} = \frac{\Theta_s}{r^2} \cdot \frac{mr^2}{mr^2 + \Theta_s} \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$\boxed{S = m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{\Theta_s}{mr^2 + \Theta_s}}$$

tiszta gördülés $\Rightarrow S \le \mu_0 \cdot K$

Hullámok

Hullámmozgásnál egy adott közegen belüli zavar terjedéséről van szó (általánosabban: a hullám, az energia terjedése térben és időben).



$$c, x, \frac{x}{c}$$

$$\psi(x,t) = F(t - \frac{x}{c})$$

Amennyiben a hullám c sebességgel terjed, akkor az x helyen $\frac{x}{c}$ idő múlva jelenik meg az eredetileg az origóban levő állapot.
A hullámterjedés térben és időben történik.

Kiemelkedő jelentőségűek a periodikus hullámok

$$A \cdot \cos(\omega t + \alpha) \rightarrow \psi(x,t) = A \cdot \cos[\omega(t - \frac{x}{c}) + \alpha]$$

$$\omega(t - \frac{x}{c}) + \alpha = \omega t - \frac{\omega x}{c} + \alpha = \omega t - \frac{2\pi}{T \cdot c (= \lambda : \text{hullámhossz})} \cdot x + \alpha = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \alpha = \omega t - kx + \alpha$$

ωt : időbeli periodikusság
kx : térbeli periodikusság (hullámszám)

2004. április 8.

$\underline{k}$: hullámszám-vektor

$$\psi = A \cdot \cos[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma) + \alpha]$$

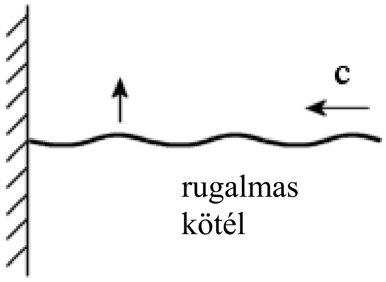
$$\psi = A \cdot \cos(\omega t - \underline{k}\underline{r} + \alpha)$$

$$\underline{k}(k_x, k_y, k_z) = (\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos\alpha; \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos\beta; \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos\gamma)$$

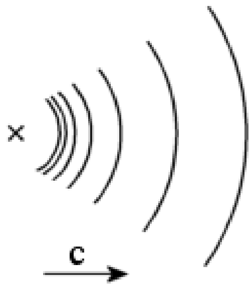
$$\underline{r}(x, y, z)$$

$\psi = A \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha)$ + x irányban

$$\underline{k} = (k_x, 0, 0)$$



transzverzális hullám: a zavar a terjedés irányában alakul ki



longitudinális hullám: a zavar a terjedés irányára merőleges alakul ki

Szilárd testek esetében mindkettő megjelenik.

Hullámfront: az azonos fázisú pontok mértani helye a térben

Síkhullámról beszélünk, ha a hullámfront sík.

Gömbhullámról beszélünk, ha a hullámfront gömb.

Általában a forrástól megfelelően távol a gömbhullám tekinthető síkhullámnak.

Rugalmas közegben terjedő hullámok:

A potenciális és kinetikai energia azonos fázisban van, homogén izotróp (irányfüggetlen) közegben terjedő rugalmas hullámoknál a potenciális energia ugyanakkora, mint a mozgási energia és változásuk is megegyező fázisban történik.

$\psi = A \cdot \cos(\omega t + \alpha)$

$W_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{dm}{dV} \cdot (\frac{\partial \psi}{\partial t})^2 = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$

W_k: kinetikus energia sűrűsége

teljes energia sűrűség:

$W = W_k + W_p = 2W_k$

$W = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$

Energiaszámítás: $\frac{T}{2}$ félperiódisidőnél lényegesen hosszabb időtartamok esetén jellemző energia-sűrűség <W> (átlag)

$$< W > = \rho A^2 \omega^2 \cdot \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos^2(\omega t - kx + \alpha) dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

$< W >$: térfogat egységre jutó átlagos energiatartalmát adja meg

Intenzitás: [I] (energiaáram-sűrűség)

Időegység alatt egységnyi felületen áthaladó energiamennyiséget adja meg.

$W = < W > \cdot A \cdot c \cdot \Delta t \rightarrow I = \frac{W}{A \cdot \Delta t} = < W > \cdot c$ (t << T) $[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}]$

Különböző közegek a hullámok energiáját nem képesek veszteség nélkül továbbítani, a relatív intenzitás-csökkenés arányos a rétegvastagsággal.

$dI = -\alpha \cdot I_0 \cdot dx$ abszorpció

α : abszorpciós (elnyelési) tényező

$\boxed{I = I_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot x)}$

$I = c \cdot < W > \rightarrow I \sim A^2 \rightarrow \mathrm{A} \sim \mathrm{A}_0 \exp(\frac{-\alpha \cdot x}{2})$

Ideális abszorpciómentes közeg: gömbhullám

$$I = \frac{P \text{ (teljesítmény)}}{4\pi r^2}$$

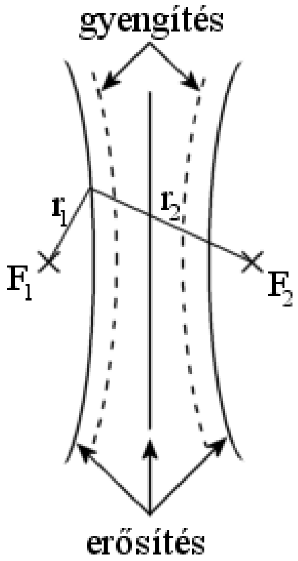
$$I \sim \frac{1}{\mathrm{r}^2}$$

$$I \sim \mathrm{A}^2 \Rightarrow A \sim \frac{1}{\mathrm{r}}$$

$$\psi(r,t) = \frac{A_0}{r} \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

A_0: 1 m esetén mért amplitúdó (állandó)

Interferencia:



(F_1, F_2 harmonikus sugárzók)

$$\omega = \omega_1 = \omega_2$$
$$\varphi_1 = \omega t - kr_1 + \alpha_1$$
$$\varphi_2 = \omega t - kr_2 + \alpha_2$$
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \alpha_1 - \alpha_2 - k(r_1 - r_2) = 2\pi n$$

(max erősítés; n: egész)

$$\boxed{r_2 - r_1 = (\alpha_2 - \alpha_1)\frac{\lambda}{2\pi} + n\lambda}$$

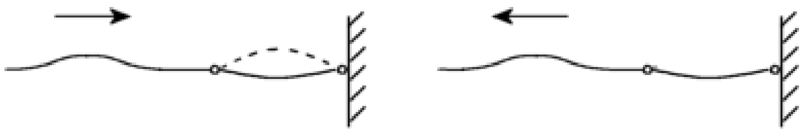
2004. április 13.

Hullámok visszaverődése

Kötél rögzített véggel:

kötélen haladó, impulzus szerű zavar megfordul, azaz a falhoz érkező hullámhegy, bemélyedésként jön vissza.
magyarázat: a beérkező hullámhegy felfelé ható erőt gyakorol a falra, amely erre merevségénél fogva nem mozdul el, csupán reakcióerőt fejt ki a rugalmas kötélre, amely lefelé irányul.

Kötél szabad véggel:



A szabad vég megemelkedik, és visszahullva ő is hullámhegyet indít.

Befogás nélküli, rugalmas kötélen
$\psi = F(x - c \cdot t) + G(x + c \cdot t)$
$x = 0$ helyen befogás van (végeken)
$\psi = F(-c \cdot t) + G(+c \cdot t) = 0 \quad \forall$ t - re $\Rightarrow$ G(x + c · t) = -F(-x - c · t) $\Rightarrow \psi = F(x - c \cdot t) - F(-x - c \cdot t)$ (*)

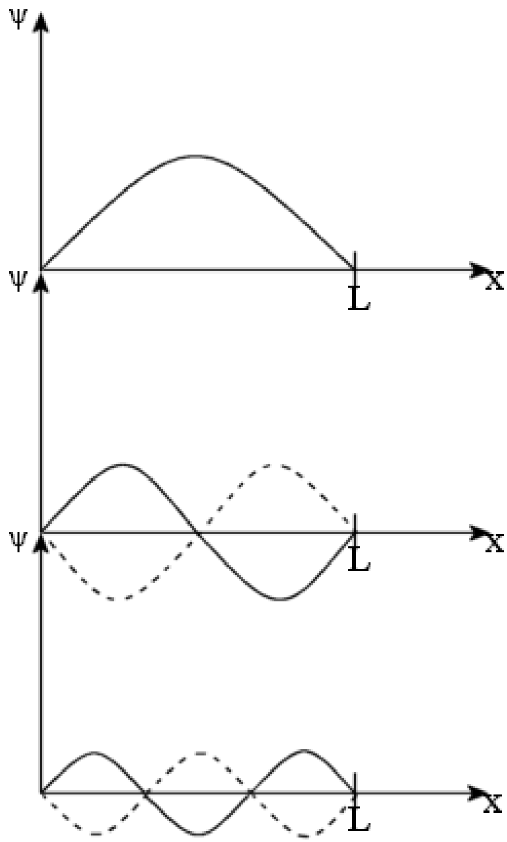
Példa: síkhullám

$F(x - ct) = A \cdot \exp(i(\omega t - kx))$
$F(-x - ct) = A \cdot \exp(i(\omega t + kx))$, mivel a valós rész cos függvénye páros (ezért nem írtuk ki az egyébként szükséges negatív előjelet)

(*) alapján: $\psi = A \cdot e^{-i(\omega t - kx)} - A \cdot e^{i(\omega t + kx)} = -i \cdot 2A \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \sin kx$

csak a valós rész rendelkezik fizikai tartalommal:

$\boxed{\psi = 2A \cdot \sin \omega t \cdot \sin kx}$ állóhullám



a kényszerfeltételből:

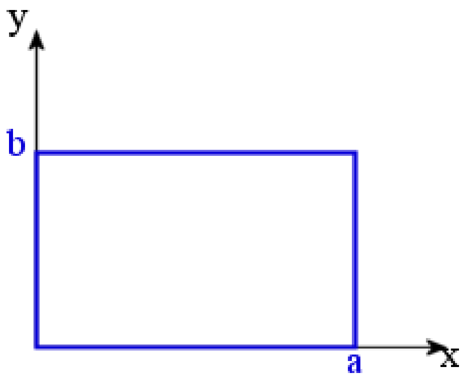
$$\sin(k \cdot L) = 0 \Rightarrow k \cdot L = n \cdot \pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = n \cdot \pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\lambda_1 = 2L;\ \lambda_2 = L;\ \lambda_3 = \frac{2}{3} L$$

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \cdot \frac{c}{2L}$$

Kerülete mentén befogott, téglalap alakú membrán:



$$\psi = A \cdot \exp[i(\omega t - \underline{k}\underline{r})]$$

$$\underline{k}\underline{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y$$

$$|\underline{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

4 hullám szuperpozíciója (összegzése):

$$\psi = A \cdot \exp(i\omega t)[\exp[i(k_x \cdot x + k_y \cdot y] - \exp[i(-k_x \cdot x + k_y \cdot y)] + \exp[i(-k_x \cdot x - k_y \cdot y)] -$$

$$- \exp[i(k_x \cdot x - k_y \cdot y)]$$

Megjegyzés:
$\exp(i\cdot\alpha)-\exp(-i\cdot\alpha)=2\cdot i\cdot\sin\alpha$

$\psi = A\cdot\exp i\omega t[\exp iky(2i\cdot\sin k_x\cdot x)+\exp(-ik_y\cdot y)\cdot(\exp(-ik_x\cdot x)-\exp(ik_x\cdot x)=$

$=A\cdot\exp(i\omega t)[2i\cdot\sin k_x\cdot x(\exp(ik_y\cdot y)-\exp(ik_y\cdot y)=-4A\cdot\exp(i\omega t)\cdot\sin k_x\cdot x-\sin k_y\cdot y$

(szeparált megoldás *x, y, t* szerint)

csomóvonalak (olyan vonalak, melyek mentén $\psi = 0$) jönnek létre
pl.: x,y tengelyek, $x = a$, $y = b$ helyen ha $k_x\cdot a = n\pi$ és $k_y\cdot b = m\pi$

$$k_x=\frac{n\pi}{a};k_y=\frac{n\pi}{b}\Rightarrow\psi=-4\cdot\cos(\omega t)\cdot\sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\sin\frac{m\pi}{b}y$$

$$k_x^2+k_y^2=k^2=(\frac{2\pi}{\lambda})^2=(\frac{2\pi f}{c})^2\rightarrow f=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$$

Csoportsebesség, fázissebesség

Egyirányú, különböző frekvenciájú hullámok szuperpozíciója olyan közeg, ahol diszperzió lép fel.
diszperzió: az eredő hullám maximumának terjedési sebessége

Meghatározása:

$$\omega_k=\frac{\omega_1+\omega_2}{2};\omega_m=\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$$

Tegyünk össze két síkhullámot: $k_k=\frac{k_1+k_2}{2};k_m=\frac{k_1-k_2}{2}$

$$(\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\psi(x,t)=A\cdot\cos(\omega_1 t-k_1x)+A\cdot\cos(\omega_2 t-k_2x)=2\cdot A\cdot\cos(\omega_m t-k_m x)\cdot\cos(\omega_k t-k_k x)$$

Az amplitúdó-modulált hullám egy meghatározott fázisára:

$$\omega_k t-k_x=áll.$$

$$\omega_k-k_x\frac{dx}{dt}=0$$

$$c=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega_k}{k_k}\text{ fázisebesség}$$

a csoport sebessége:

$$\omega_m t-k_m x=állandó$$

$$\omega_m-k_m\frac{dx}{dt}=0$$

$$c_y\approx\frac{\omega_m}{k_m}\rightarrow c_y=\frac{d\omega}{dk}$$

$$\omega = ck$$

$$c_y = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{dc}{dk} = (\frac{dc}{d\lambda}) \cdot (\frac{d\lambda}{dk})$$

2004. április 15.

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\omega = c \cdot k$$

$$k = \frac{2\pi}{k}$$

$$c_g = \frac{d(ck)}{dk} = c + k\frac{dc}{dk}$$

$$\frac{dc}{dk} = \left(\frac{dc}{d\lambda}\right) \cdot \left(\frac{d\lambda}{dk}\right) = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \cdot \frac{dc}{d\lambda}$$

$$\frac{dk}{d\lambda} = \frac{d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}$$

$$c_g = c + \frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{2\pi}{\lambda}\right)\frac{dc}{d\lambda}$$

$\boxed{c_g = c - \lambda\frac{dc}{d\lambda}}$ Rayleigh egyenlet

(normális diszperzó: $c_g < c$
anromális diszperzió: $c_g > c$)

Doppler hatás:
A forrás és a detektor relatív mozgása hatással van az időegység alatt felfogott rezgések számára, vagyis az észlelt frekvenciára.

a, $v_F = 0$, $v_M \neq 0 \parallel \overline{FM}$ (közeghez viszonyított sebességek)

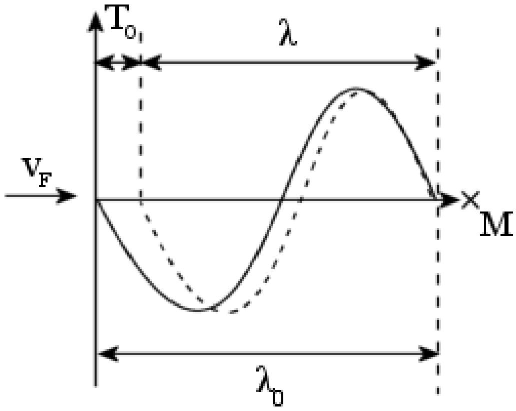
A mozgás és a nyugalom mindig ahhoz a közeghez képest értendő, amelyben hullám terjed

$$\lambda = T_0 c$$

$$\lambda = T(c + v_M) \rightarrow \frac{1}{T} = f = \frac{c + v_M}{\lambda} = \frac{c + v_M}{T_0 c} = f_0\frac{c + v_M}{c}$$

$$\boxed{f = f_0\left(1 + \frac{v_M}{c}\right)}$$

b, $v_F \neq 0 \parallel \overline{FM}$, $v_M = 0$



$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda = \lambda_0 - T_0 v_F \\ &\lambda_0 = T_0 c \\ &\lambda = Tc \end{aligned}}$$

$$\frac{1}{T} = f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0 - T_0 v_F} = \frac{c}{T_0 c - T_0 v_F} = f_0 \frac{c}{c - v_F} \rightarrow f = \frac{f_0}{1 - \frac{v_F}{c}}$$

c, $v_F \neq 0, \quad v_M = 0$

Ha „F” és „M” egymás felé haladnak, akkor A, és B esetet egymás után kell alkalmazni

$$f = f_0 \frac{1 + \frac{v_M}{c}}{1 - \frac{v_F}{c}} = f_0 \frac{c + v_M}{c - v_F} = f$$

Előjel szabály: közeledés +, távolodás – előjelet jelent

$$F \xrightarrow{v_F > 0} \quad \xleftarrow{v_M > 0} M$$

$$F \xrightarrow{v_F > 0} \qquad\qquad M\,(v_M < 0)$$

Ha az „F” halad, akkor a hullám alakja a „B” eset szerint torzul, ha „M” is halad, akkor ezt a torzult jelet fogja másképpen érzékelni.

d, $v_F \parallel \overline{FM}$, $v_M \parallel \overline{FM}$

FM-be eső komponenst kell figyelembe venni