ANALÍZIS 1. — **1. VIZSGA** — **2021. december 22.**

Mérnökinformatikus szak — α-variáns — Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (4+9=13 pont)

a) Mit mondhatunk a sorozatok monotonitásának, korlátosságának és konvergenciájának kapcsolatáról? (Mondjon ki bizonyítás nélkül legalább két tanult tételt!)

b) Számolja ki az $a_n = \left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+4}\right)^{3n^2}$ sorozat határértékét!

2. feladat (8+13=21 pont)

a) Igaz-e?

i) Ha $a_n \to \infty$, akkor $\dfrac{1}{a_n} \to 0$? *ii*) Ha $a_n \to 0$, akkor $\dfrac{1}{a_n} \to \infty$?

Ha az állítás igaz, bizonyítsa be, ha hamis, adjon rá ellenpéldát!

b) Határozza meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját! Konvergensek a sorozatok?

$$a_n = \frac{n^3+(-7)^n}{n!-5^n} \qquad\qquad b_n = \frac{n!-5^n}{n^3+(-7)^n}$$

3. feladat (4+10=14 pont)

a) Adjon szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy kétszer differenciálható függvénynek egy pontban inflexiója legyen!

b) Hol konvex, illetve konkáv az $f(x) = \ln(x^2-6x+13)$ függvény?

4. feladat (4+8=12 pont)

a) Ismertesse Rolle-tételt!

b) Határozza meg a $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{2x-4}-1}{\ln(3x-5)}$ határértéket!

5. feladat (4+10=14 pont)*

a) Ismertesse a parciális integrálás módszerét

b) Számolja ki az $f(x) = (x^2-x+1)\sin x$ függvény primitív függvényét!

6. feladat (13 pont)*

Határozza meg az $f(x) = \dfrac{2e^x+1}{e^{2x}+1}$ primitív függvényét!

7. feladat (6+7=13 pont)*

a) Ismertesse az integrálszámítás második alaptételét!

b) Számolja ki a $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{ch}\big(\arcsin(1-t)\big)\, dt$ függvény deriváltját $x \in [0,1]$ esetén!

IMSC feladat (14 IMSC pont)

Jelölje $\{a\}$ az $a \in \mathbb{R}$ szám törtrészét, és legyen $f(x) = x \cdot \left\{\frac{1}{x}\right\}$. Határozza meg a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; *c*) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; *d*) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

A $*$-os feladatokból legalább 15 pontot el kell érni.