Valószínűségszámítás vizsga megoldása
2013. május 29.

1. A $[0, 1]$ intervallumon találomra kiválasztunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik szám több mint négyszerese lesz a másiknak?
Megoldás: Legyen a két szám x és y. Vagy annak kell teljesülnie, hogy $4x < y$, vagy annak, hogy $4y < x$. A megfelelő tartomány területe adja a keresett valószínűséget: $p = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

2. Ha X 3-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = 2X - 3$ valószínűségi változónak? Adja meg Y standardizáltját!
Megoldás: $F_Y(x) = \mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(X < \frac{x+3}{2}) = 1 - e^{-\frac{3}{2}(x+3)}$, ha $x \geq 3$. $f_Y(x) = \frac{3}{2}e^{-2\frac{x+3}{3}}$, $x > \frac{3}{2}$. $\mathbf{E}Y = 2\mathbf{E}X - 3 = -\frac{7}{3}, \boldsymbol{\sigma}Y = 2\boldsymbol{\sigma}X = \frac{2}{3} \Longrightarrow$ $\tilde{Y} = \frac{Y - \mathbf{E}Y}{\boldsymbol{\sigma}Y} = \frac{3Y+7}{2}$.

3. Legyenek X és Y független, $\lambda = 2$ paraméterű Poisson eloszlású változók! Mennyi $\mathbf{E}\,(X - Y)^2$?
Megoldás: $\mathbf{E}\,(X - Y)^2 = \mathbf{E}X^2 + \mathbf{E}Y^2 - 2\mathbf{E}XY = 2\mathbf{E}X^2 - 2\mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y = 2\mathbf{E}X^2 - 2\,(\mathbf{E}X)^2 = 2\boldsymbol{\sigma}^2 X = 4$.

4. Legyenek X_1, X_2, X_3 független, azonos $N(-2, 3)$ eloszlású valószínűségű változók. Számolja ki a $\boldsymbol{\sigma}^2\left(\sum_{i=1}^{3} i \cdot X_i\right)$ és $\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{3} i \cdot X_i, \sum_{i=1}^{3} X_i\right)$ mennyiségeket!
Megoldás: $\boldsymbol{\sigma}^2\left(\sum_{i=1}^{3} i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{3} i^2 \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 X_i = 9 \cdot 14 = 126$
$\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{3} i \cdot X_i, \sum_{i=1}^{3} X_i\right) = \sum_{i=1}^{3} i \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 X_i = 9 \cdot 6 = 54$.

5. Két kockával dobunk. X az egyesek száma, Y a dobott összeg.
$\operatorname{cov}(X - 3, X - Y) =?$
Megoldás: .

X \ Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	X perem
0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
Y perem	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

$\mathbf{E}X = \frac{1}{3}, \mathbf{E}Y = 7, \mathbf{E}\,(XY) = \frac{2}{36}\,[3 + 4 + 5 + 6 + 7] + 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{54}{36}$;
$\operatorname{cov}(X, X) = \boldsymbol{\sigma}^2 X = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$. $\left(X \in B\left(2, \frac{1}{6}\right)\right)$.
$\operatorname{cov}(X, Y) = -\frac{30}{36} \approx -0,833$. $\operatorname{cov}(X-3, X-Y) = \operatorname{cov}(X, X) - \operatorname{cov}(X, Y) = \frac{5}{18} + \frac{15}{18} = \frac{10}{9}$.

6. Mikor mondjuk egy ϑ paraméterhez torzítatlannak egy T_n statisztikai becslést? Mondjon példát torzítatlan becslésre!
Megoldás: A T_n statisztika a T_n statisztika torzítatlan becslése, ha $\mathbf{E}T_n =$

ϑ. pl. az átlagstatisztika torzítatlan becslése a minta várható értékének, vagy a korrigált empirikus szórásnégyzet torzítatlan becslése a minta varianciájának.