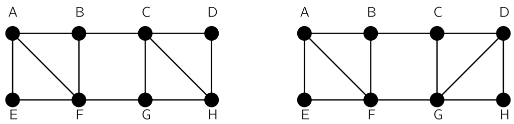
SzA VIII. gyakorlat

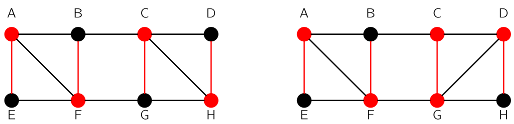
Görög betűk, és kicsit elkezdünk színezni is

2011. október 25.

1. **Adjunk meg maximális független élhalmazt és minimális lefogó ponthalmazt a következő gráfokban!**



$\{(A, E), (B, F), (C, G), (D, H)\}$ mindkét gráfban teljes párosítás, így maximális független élhalmaz is. A bal oldalon $\{A, C, F, H\}$ egy lefogó ponthalmaz, és minimális is, mivel $\tau \geq \nu$, és itt az egyenlőség teljesül. A jobb oldalon $\{A, E, F\}$ és $\{D, G, H\}$ közül egyenként legalább 2, összesen tehát legalább 4 csúcsot ki kell választani, és ekkor még biztos, hogy ki fog maradni él (B, C), így $\tau \geq 5$. $\{A, C, D, F, G\}$ viszont pont jó is.



2. **Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a $G = K_{n,m}$ teljes páros gráfra!**
A teljes páros gráfban a kisebbik csúcsszámú osztályt lefedő párosítás biztos létezik, ennél nagyobb nem is lehet, így $\nu(G) = \min\{n, m\}$. König tétele értelmében $\nu(G) = \tau(G)$, ezért $\tau(G) = \min\{n, m\}$. Gallai tétele miatt $\alpha(G) = |V| - \tau(G) = (n + m) - \min\{n, m\} = \max\{n, m\}$. Ismét König tétele alapján $\rho(G) = \alpha(G) = \max\{n, m\}$.

3. **A 2000 csúcsú G gráfban $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!**
Tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G)$, és egy teljes párosítás esetén $\nu(G) = n/2$. Ebből $678 = \tau(G) \geq \nu(G) = 1000$ ellentmondás, tehát nem lehet a gráfban teljes párosítás.

4. **Mutassuk meg, hogy ha az n pontú G gráfban nincs hurokél és $\tau(G) = n - 1$, akkor $G = K_n$!**
Tfh mégsem teljes gráf, vagyis $\exists u, v \in V : (u, v) \notin E$. Ha minden csúcsot beválasztunk u-n és v-n kívül a lefogó pontok közé, akkor több csúcsra már nincs is szükségünk, hiszen az u-ba és v-be futó összes él is le van fogva a másik végpontja által (és természetesen a gráf összes többi éle is), ezt csak egy u-hoz vagy v-hez tartozó hurokél tudná elrontani, ami nincs. Így kiderült, hogy $\tau(G) \leq n - 2$, ami ellentmond a feltételnek.

---

5. **[pótpótZH 2010. ősz] Mutassunk olyan 10 pontú összefüggő, egyszerű G gráfot, amihez úgy lehet egy élt hozzáadni az egyszerűség megtartásával, hogy a $\nu(G)$ és a $\rho(G)$ értéke is megváltozik ennek hatására.**

Gallai idevágó tétele szerint ha G-ben nincs izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$. (3 pont)
Ennek megfelelően ha olyan 10 pontú gráfot találunk, aminek nincs izolált pontja, és amihez úgy lehet egy élt hozzáadni, hogy a $\nu(G)$ megváltozzon, akkor $\rho(G)$ is változni fog, tehát teljesülni fog a feladatban leírt tulajdonság. (3 pont)
Ilyen gráf pl. a 10 pontú csillag (az a 10 csúcsú fa, aminek 9 levele van), mert ebben a gráfban $\nu = 1$, de tetszőleges újabb élt behúzva $\nu = 2$ lesz. (4 pont)

Természetesen az is tökéletes megoldás, hogy egy konkrét gráfról és hozzáadott élről konkrétan megmutatjuk (Gallai nélkül), hogy a ν és a ρ is változik.

Megjegyzés by DM: természetesen nem csak a példaként hozott gráf a jó, hanem egy csomó más is; mindenki adhat az ízlésének megfelelőt.

6. **A $V = \{2, 3, \dots, 2007\}$ ponthalmazon definiáljuk a $G(V, E)$ gráfot úgy, hogy $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x$ ($a \nmid b$: a nem osztója b-nek)! Van-e G-ben teljes párosítás?**
Igen, van. A szomszédos számok relatív prímek, így fut közöttük él. A $(2, 3), (4, 5) \dots (2006, 2007)$ pont egy teljes párosítás lesz.

7. **Igazoljuk, hogy az n pontú G páros gráfban $\alpha(G) \geq n/2$!**
Egy páros gráfban a két pontosztály közül az egyik csúcsszáma mindig $\geq n/2$. Az egy osztályba tartozó csúcsok között biztos nem megy él, ezért egy osztály összes csúcsa független, és ha a nagyobb csúcsszámú osztályt vesszük, pont az állítást kapjuk.

8. **[ZH 2009. október 19.] Legyen G az a gráf, mely hét darab egyenként 287 pontú teljes gráf pontdiszjunk egyesítése. Határozzuk meg az $\alpha(G), \tau(G), \rho(G), \nu(G)$ értékeket!**
A gráfunk úgy néz ki, hogy egymás mellé lerajzolunk 7 db K_{287}-et. Innen az egyes értékeket elég egy K_{287}-re kiszámolni, majd mindegyiket megszorozni 7-tel (némi indoklás kíséretében). A számok kitalálását mindenkinek a fantáziájára bízom, meg gyakorlaton amúgy is kiszámoltuk.

9. **[pótZH 2009. november 17.] Legyenek a G páros gráf színosztályai A és B, és tegyük fel, hogy legfeljebb $|B|$ él szükséges G összes pontjának lefogásához. Igazoljuk, hogy ekkor az A színosztályra teljesül a Hall feltéltel.**
Mivel lefogó élekről beszélünk, a gráfban nincs izolált pont, tehát a következő Gallai tétel használható: $\nu(G) + \rho(G) = n$. Tudjuk továbbá, hogy $n = |A| + |B|$, valamint $\rho(G) \leq B$. Az egyenleteket és egyenlőtlenséget rendezve arra jutunk, hogy $\nu(G) \geq |A|$, azaz létezik A-t lefogó párosítás, tehát teljesül a Hall-feltétel.

10. **Tegyük fel, hogy a G gráf minden összefüggő komponense egy kör. Mi az a legkisebb m szám, amire teljesül, hogy G-hez hozzá lehet venni m (megfelelően választott) élet úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen m szám?**
A páros körök nem számítanak, bennük biztos, hogy van teljes párosítás. Ha páratlan darab páratlan kör van a gráfban, akkor összesen páratlan sok csúcs van, így ekkor nincs ilyen m szám. Ha páros sok páratlan kör van, akkor mindegyikben csináljunk egy maximális párosítást, így mindegyikben pont egy csúcs fog párosítatlanul maradni. Számozzuk meg ezeket a kimaradt csúcsokat $1 \dots p$-ig (p legyen a páratlan körök száma), és vegyünk fel éleket így:

$(1,2),(3,4)\dots(p-1,p)$. Így már lesz teljes párosítás, felesleges élet nem vettünk fel, és $m = p/2$.

11. **A G gráfnak $2n$ pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább n. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét!**
A Dirac-tétel miatt a gráfban van Hamilton-kör, és mivel páros csúcsa van a gráfnak, a Hamilton-kör minden második élét kiválasztva egy teljes párosítást kapunk, vagyis $\nu(G) = 2n/2 = n$. Gallai tétele szerint pedig $\rho(G) = |V| - \nu(G) = 2n - n = n$.

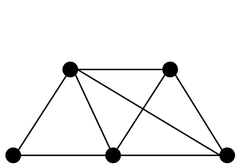
12. **Legyen egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \geq n$!**
Tudjuk, hogy a fentiek miatt $\nu(G) = n$, viszont azt is tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G) = n$.

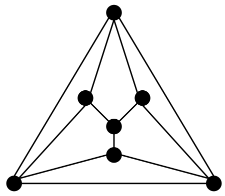
13. **Egy G összefüggő gráf olyan, hogy tetszőleges pontját elhagyva a maradék gráfban létezik teljes párosítás. Bizonyítsuk be, hogy G-ben nincs elvágó él! (Egy él elvágó, hogyha az élet elhagyva megszűnik a gráf összefüggősége.)**
Tfh van egy ilyen tulajdonságú gráfunk, mégis van benne elvágó él. A gráf csúcsainak száma páratlan, mert egy pontot elhagyva egy olyan gráfot kapunk, amiben van teljes párosítás, így páros sok csúcsa van. Nézzünk most egy elvágó élet! Ez az él nyilván két komponensre osztja a gráfot, az egyiknek páros, a másiknak páratlan sok csúcsa van. Hagyjuk most el ennek az élnek azt a csúcsát, amelyik a páros csúcsszámú komponenshez tartozik! A gráf így két összefüggő komponensre esik szét, mindkettőnek páratlan sok csúcsa van. Ebben kellene léteznie teljes párosításnak, de ez lehetetlen, mert ehhez a két komponens között is futnia kellene élnek.

14. **Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$! $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszáma.**
Egy v csúcs pontosan $d(v)$ élet tud lefogni, és ha T egy minimális lefogó csúcshalmaz, akkor
$$\sum_{v\in T} d(v) \geq |E|,$$
hiszen T csúcsai az összes élet lefogják (lehet, hogy egy élet több csúcs is). Ha a bal oldalon a fokszámokat helyettesítjük a maximális fokszámmal, akkor a kifejezés értéke biztos nem csökken, tehát
$$\sum_{v\in T} \Delta(G) \geq \sum_{v\in T} d(v) \geq |E|,$$
viszont itt pontosan $|T| = \tau(G)$-szer adtuk össze $\Delta(G)$-t, vagyis $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$.

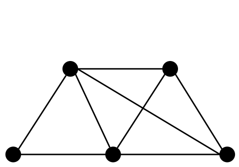
15. **Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög- és hurokmentes G gráfban $\alpha(G)\tau(G) \geq |E|$!**
Mivel G-ben nincs háromszög, egy tetszőleges csúcs szomszédai egy független halmazt alkotnak. Így bármely fokszám legfeljebb $\alpha(G)$ lehet, azaz $\alpha(G) \geq \Delta(G)$ miatt $\alpha(G)\tau(G) \geq \Delta(G)\tau(G) \geq |E|$ az előző feladat eredményét felhasználva.

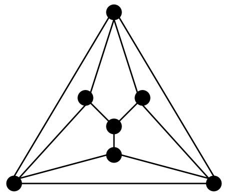
16. **Mennyi a következő gráfok kromatikus száma:** C_4, C_5, $K_{2,4}$, **alábbi 2 gráf**



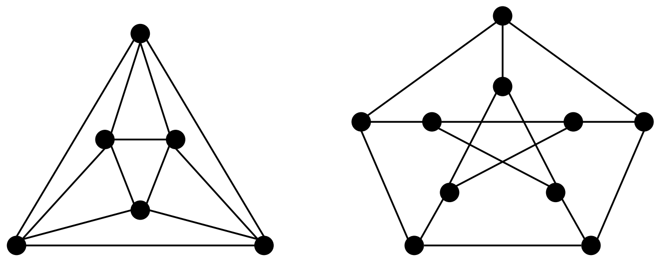


$\chi(C_4) = 2$, páros hosszú kör kromatikus száma mindig 2. $\chi(C_5) = 3$, mert páratlan kör. $\chi(K_{2,4}) = 2$, mert minden páros gráf kromatikus száma 2. A bal oldali gráfban $\omega(G) = 4$, tehát $\chi(G) \geq 4$, viszont egy 4 színnel színezést tudunk is mutatni. A jobb oldali gráfban $\chi(G) = 4$, mert bár az alsó korlát 3, a külső csúcsoknak különböző színűeknek kell lenniük, és ha ezeket kiszínezzük, és tovább folytatjuk az egyértelműen kiszínezhető csúcsok színezését, akkor a középső csúcsnak muszáj bevezetni egy negyedik színt.





17. **Mennyi a következő két gráf élkromatikus száma?**



A bal oldaliban $\Delta(G) = 4$, és egy 4 színnel való jó színezés szerepel is az ábrán. A jobb oldali gráfot ha megpróbáljuk 3 színnel kiszínezni, akkor a külső kör csak egyféle lehet (a forgatásokat és színpermutációkat leszámítva), ebből a külső kört a belsővel összekötő élek színei adódnak, és ahol a sárgát be kellett vezetni, ott nem lehetett már semelyik eredeti színt használni. Így ez csak 4 színnel élszínezhető.