BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Haladó lineáris algebra

BMETE90MX54 (FELSŐBB MATEMATIKA VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK)

Mátrixegyenletek

HIPERMÁTRIXOK, VEC, KRONECKER, LINEÁRIS MÁTRIXEGYENLETEK

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Tartalom

vec-függvény és Kronecker-szorzat

vec-függvény

D ha $\mathsf{A} = [\mathsf{a}_1 | \mathsf{a}_2 | \ldots | \mathsf{a}_n]$, akkor

$$\mathrm{vec}(\mathsf{A}) = \begin{bmatrix} \mathsf{a}_1 \\ \mathsf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathsf{a}_n \end{bmatrix}.$$

P $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, akkor $\mathrm{vec}(\mathsf{A}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$

Kronecker-szorzat

D Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es, $\mathbf{B}$ egy $p \times q$-as mátrix.
Kronecker-szorzatukon (vagy más néven tenzorszorzatukon) azt az $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$-vel jelölt $mp \times nq$ méretű mátrixot értjük, melynek blokkmátrix alakja

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

P $$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -3 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

A Kronecker-szorzat és a vec tulajdonságai

T Adva van $\mathsf{A}_{m\times n}$, $\mathsf{B}_{m\times n}$, $\mathsf{C}_{p\times q}$, $\mathsf{D}_{r\times s}$,

- $(\mathsf{A}+\mathsf{B})\otimes\mathsf{C}=\mathsf{A}\otimes\mathsf{C}+\mathsf{B}\otimes\mathsf{C}$, $\mathsf{C}\otimes(\mathsf{A}+\mathsf{B})=\mathsf{C}\otimes\mathsf{A}+\mathsf{C}\otimes\mathsf{B}$,
- $(\mathsf{A}\otimes\mathsf{C})\otimes\mathsf{D}=\mathsf{A}\otimes(\mathsf{C}\otimes\mathsf{D})$,
- $(\mathsf{A}\otimes\mathsf{C})^\mathsf{T}=\mathsf{C}^\mathsf{T}\otimes\mathsf{A}^\mathsf{T}$,

T Adva van $\mathsf{A}_{m\times n}$, $\mathsf{B}_{p\times q}$, $\mathsf{X}_{n\times p}$

1. $\mathrm{vec}(\mathsf{AX})=(\mathsf{I}_p\otimes\mathsf{A})\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})$, $\mathrm{vec}(\mathsf{XB})=(\mathsf{B}^\mathsf{T}\otimes\mathsf{I}_n)\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})$,
2. $\mathrm{vec}(\mathsf{AXB})=(\mathsf{B}^\mathsf{T}\otimes\mathsf{A})\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})$,
3. $\mathrm{vec}(\mathsf{AX}+\mathsf{XB})=(\mathsf{I}_p\otimes\mathsf{A}+\mathsf{B}^\mathsf{T}\otimes\mathsf{I}_n)\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})$.

B 1. $$(\mathsf{I}_p\otimes\mathsf{A})\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})=\begin{bmatrix}\mathsf{A} & \dots & \mathsf{O}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathsf{O} & \dots & \mathsf{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathsf{X}_{*1}\\ \vdots\\ \mathsf{X}_{*p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathsf{AX}_{*1}\\ \vdots\\ \mathsf{AX}_{*p}\end{bmatrix}=\mathrm{vec}(\mathsf{AX})$$

2. $$\begin{aligned}[\mathsf{AXB}]_{*j}=\mathsf{AXB}_{*j}&=\sum_{i=1}^{p}b_{ij}(\mathsf{AX})_{*i}=\sum_{i=1}^{p}(b_{ij}\mathsf{A})\mathsf{X}_{*i}\\ &=[b_{1j}\mathsf{A}|\dots|b_{nj}\mathsf{A}]\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})=[\mathsf{B}_{j*}^\mathsf{T}\otimes\mathsf{A}]\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})\end{aligned}$$

Lineáris mátrixegyenletek

Lineáris mátrixegyenletek típusai

D Lineáris mátrixegyenletnek nevezzük a

$$\sum_{i=1}^{k} A_i X B_i = C, \tag{1}$$

ahol $C \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $A_i \in \mathbb{C}^{p\times m}$, $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B_i \in \mathbb{C}^{n\times q}$.

- Sylvester-egyenlet: $C, X \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$AX + XB = C, \tag{2}$$

- Általánosított Sylvester-egyenlet: az (1) spec. esete $k = 2$-re

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 = C, \tag{3}$$

- Ljapunov-egyenlet a Sylvester-egyenlet speciális esete akkor, ha $m = n$, $B = A^H$, $C = C^H$, azaz

$$AX + XA^H = C. \tag{4}$$

A lineáris mátrixegyenlet megoldása

T Az (1) lineáris mátrixegyenlet megoldható az

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \mathsf{B}_i^\top \otimes \mathsf{A}_i \right) \mathsf{x} = \operatorname{vec}(\mathsf{C}) \tag{5}$$

lineáris egyenletrendszer segítségével, ahol az együtthatómátrix $(pq) \times (mn)$-es méretű és $\mathsf{x} = \operatorname{vec}(\mathsf{X})$.

B $\operatorname{vec}(\mathsf{AXB}) = (\mathsf{B}^\top \otimes \mathsf{A}) \operatorname{vec}(\mathsf{X})$

m A gyakorlatban ennél gyorsabb algoritmusok léteznek, melyek az A_i és B_i mátrixokat háromszögalakra vagy Hessenberg-alakra hozzák…

P Oldjuk meg az $AX + XB = C$ és az $AX + XB = D$ Sylvester-egyenleteket, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

M Mindkét egyenlet bal oldala $AXI + IXB$ alakú, így a megoldást nyújtó (5) egyenlet együtthatómátrixa

$$I \otimes A + B^T \otimes I = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

- Így az $\mathsf{AX} + \mathsf{XB} = \mathsf{C}$ egyenletnek megfelelő bővített mátrix és annak redukált lépcsős alakja:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

- Innen az egyenletrendszer megoldása

$$\mathbf{x} = \operatorname{vec}(\mathsf{X}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \mathsf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Az $\mathsf{AX} + \mathsf{XB} = \mathsf{D}$ egyenletnek megfelelő bővített mátrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right], \quad \text{az első két sor: ellentmondásos.}$$

A Sylvester-egyenlet egyértelmű megoldhatósága

T A (2) Sylvester-egyenlet megoldását nyújtó

$$\left(\mathsf{I}_n \otimes \mathsf{A} + \mathsf{B}^\top \otimes \mathsf{I}_m\right) \operatorname{vec}(\mathsf{X}) = \operatorname{vec}(\mathsf{C})$$

egyenletrendszer $(mn) \times (mn)$-es együtthatómátrixa pontosan akkor invertálható, ha A-nak és $-\mathsf{B}$-nek nincs közös sajátértéke.

B A bizonyításhoz elég megmutatni, hogy ha

$$\sigma(\mathsf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}, \quad \sigma(\mathsf{B}) = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\},$$

akkor

$$\sigma\left(\mathsf{I}_n \otimes \mathsf{A} + \mathsf{B}^\top \otimes \mathsf{I}_m\right) = \{\lambda_i + \mu_j \mid i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

- Ekkor az $\mathsf{I}_n \otimes \mathsf{A} + \mathsf{B}^\top \otimes \mathsf{I}_m$ mátrixnak a 0 nem lesz sajátértéke, azaz invertálható lesz, ha A és $-\mathsf{B}$ spektrumának metszete üres.

- TFH A és $\mathsf{B}^\top$ Jordan-felbontása

$$\mathsf{A} = \mathsf{C}\mathsf{J}_\mathsf{A}\mathsf{C}^{-1}, \quad \text{illetve} \quad \mathsf{B}^\top = \mathsf{D}\mathsf{J}_\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1}.$$

*
$$\begin{aligned}
&\mathsf{I}_n \otimes \mathsf{A} + \mathsf{B}^\top \otimes \mathsf{I}_m \\
&\quad = \mathsf{D}\mathsf{I}_n\mathsf{D}^{-1} \otimes \mathsf{C}\mathsf{J}_\mathsf{A}\mathsf{C}^{-1} + \mathsf{D}\mathsf{J}_\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1} \otimes \mathsf{C}\mathsf{I}_m\mathsf{C}^{-1} \\
&\quad = (\mathsf{D} \otimes \mathsf{C})(\mathsf{I} \otimes \mathsf{J}_\mathsf{A})(\mathsf{D}^{-1} \otimes \mathsf{C}^{-1}) + (\mathsf{D} \otimes \mathsf{C})(\mathsf{J}_\mathsf{B} \otimes \mathsf{I}_m)(\mathsf{D}^{-1} \otimes \mathsf{C}^{-1}) \\
&\quad = (\mathsf{D} \otimes \mathsf{C})(\mathsf{I} \otimes \mathsf{J}_\mathsf{A} + \mathsf{J}_\mathsf{B} \otimes \mathsf{I}_m)(\mathsf{D} \otimes \mathsf{C})^{-1}.
\end{aligned}$$

- Mivel az $\mathsf{I} \otimes \mathsf{J}_\mathsf{A} + \mathsf{J}_\mathsf{B} \otimes \mathsf{I}_m$ mátrix felsőháromszög-mátrix, így spektruma a főátló elemeiből áll, azok pedig a $\{\lambda_i + \mu_j\}$ multihalmazt adják.
- Eszerint a hozzá hasonló $\mathsf{I}_n \otimes \mathsf{A} + \mathsf{B}^\top \otimes \mathsf{I}_m$ mátrixnak ugyanez a spektruma.

P Megoldható-e egyértelműen az $\mathsf{AX} + \mathsf{XB} = \mathsf{C}$ mátrixegyenlet az előző feladatbeli $\mathsf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ és $\mathsf{B} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixok esetén?

M A tétel szerinti spektrumok

$$\sigma(\mathsf{A}) = \{1, -1\}, \quad \sigma(-\mathsf{B}) = \{-1, -2\},$$

melyek metszete nem üres, így az $\mathsf{I}_2 \otimes \mathsf{A} + \mathsf{B}^\top \otimes \mathsf{I}_2$ mátrix nem invertálható, tehát az $\mathsf{AX} + \mathsf{XB} = \mathsf{C}$ mátrixegyenletnek vagy végtelen sok megoldása van, vagy ellentmondásos!

m A Sylvester-egyenletek pl. a sztochasztikus parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásában kapnak szerepet általában hatamas ritka mátrixokkal.