Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2013. május 16.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyen A tetszőleges 6×8-as mátrix, melynek rangja 3. Igaz-e hogy mindig kiválasztható olyan 4×6-os részmátrixa, melynek rangja szintén 3?

* * * * *

3 rangú 4×8-as részmátrixot nem nehéz találni. A-nak van 3 független sora, (1 pont)
a többi sor pedig elő kell hogy álljon ezek lineáris kombinációjaként. (2 pont)
A maradék 3 sorból tehát bármelyiket hozzávéve a 3 független sorhoz 3 rangú mátrixot kapunk. (2 pont)
Ebből kéne most elhagyni 2 oszlopot úgy, hogy a rang ne változzon. (1 pont)
Ez sem nehéz: lesz 3 oszlop, ami független, (1 pont)
a maradék oszlopok pedig ezeknek lesznek lineáris kombinációi. (2 pont)
A maradékból 2 oszlopot elhagyva tehát a rang nem fog változni, így 4×6-os, 3 rangú részmátrixot kapunk. (1 pont)

2. Legyen az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa a szokásos bázisban az alább látható mátrix. Határozzuk meg a c valós paraméter minden értékére $Im(\mathcal{A})$-t és $Ker(\mathcal{A})$-t.

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

$Ker(\mathcal{A})$ meghatározásához az $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & 1 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert kell megoldanunk. (1 pont)

A $c = 0$ esetet érdemes külön vizsgálni, ha ugyanis nem ez a helyzet, akkor a Gauss-elimináció sokkal kellemesebben futtatható az 1. és a 3. sor cseréje után. $c = 0$ esetén (mondjuk Gauss-eliminációval) $x = -y = -z$ adódik (ami egy origón átmenő egyenes, de ezt nem kell leírni). (1 pont)

Ha c nem 0, akkor az 1. és a 3. sor cseréje után Gauss-eliminációval az $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1-c^2 & 0 \end{array}\right)$

egyenletrendszert kapjuk. (1 pont)
Ennek a megoldása $c = 1$ esetén $x = 0$, $y = -z$, $c = -1$ esetén $x = 0$, $y = z$, (ezek is origón átmenő egyenesek, amit szintén nem kell leírni) (1 pont)
minden más esetben pedig (amikor tehát c nem 0,1,-1) $x = y = z = 0$. (1 pont)
Az utóbbi esetben $Im(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3$ a dimenziótétel miatt. (1 pont)
A többi esetben $Im(\mathcal{A})$-t a bázisvektorok képei által generált altérként határozzuk meg: (1 pont)
$c = 0$ esetén $Im(\mathcal{A})$ nyilván a $z = 0$ sík, (1 pont)
$c = 1$ esetén $Im(\mathcal{A})$ az $x = y$ sík, (1 pont)
$c = -1$ esetén $Im(\mathcal{A})$ az $x + y = -2z$ sík. (1 pont)

3. Lineáris transzformáció-e a síkon az a leképezés, mely minden (x, y) vektorhoz a $(10x + y, 10x + y)$ vektort rendeli?

* * * * *

Vizsgáljuk először a tetszőleges (x, y) és (a, b) vektorok összegét. Ennek képe $(10(x + a) + y + b, 10(x + a) + y + b)$, (3 pont)
ami épp a $(10x + y, 10x + y)$ vektor és a $(10a + b, 10a + b)$ vektor összege, (1 pont)
ezek pedig az (x, y), illetve (a, b) vektorok képei, (1 pont)
vagyis a lineáris leképezéseket definiáló első feltétel teljesül. (1 pont)
Az (x, y) vektor λ-szorosának képe $(10\lambda x + \lambda y, 10\lambda x + \lambda y)$, (2 pont)
ami épp $\lambda(10x + y, 10x + y)$, (1 pont)
vagyis a második feltétel is teljesül, azaz a leképezés lineáris transzformáció lesz (ehhez az is kell, hogy azonos vektorterek közt hasson, de e megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)

4. A sík egy lineáris transzformációja az $(1, 1)$ vektorhoz a $(-1, 7)$ vektort rendeli, a $(2, 1)$ vektorhoz pedig az $(1, 8)$ vektort. Határozzuk meg a transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait.

* * * * *

A leképezés lineáris, tehát az $(1, 0) = (2, 1) - (1, 1)$ vektorhoz az $(1, 8) - (-1, 7) = (2, 1)$ vektort rendeli, (2 pont)
a $(0, 1) = (1, 1) - (1, 0)$ vektorhoz pedig a $(-1, 7) - (2, 1) = (-3, 6)$ vektort. (2 pont)
A leképezés mátrixa tehát a szokásos bázisban $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. (1 pont)
A karakterisztikus polinom ez alapján (a nevet nem kell feltétlenül tudni)

$$\det \begin{pmatrix} 2 - x & -3 \\ 1 & 6 - x \end{pmatrix} = (2 - x)(6 - x) + 3.$$

(1 pont)
Ennek gyökei 3 és 5, (1 pont)
ezek lesznek a mátrix, és így a lineáris transzformáció sajátértékei. (1 pont)
A sajátvektorok meghatározásához megoldjuk a $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert és a $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert. (1 pont)
Az első esetben a $x + 3y = 0$ egyenesen lévő, origótól különböző vektorok adódnak sajátvektorként, ezek tartoznak a 3 sajátértékhez, (1 pont)
a második esetben pedig az $x + y = 0$ egyenesen lévő, origótól különböző vektorok, ezek tartoznak az 5 sajátértékhez. (1 pont)
Elméletileg le kellene még írni, hogy a lineáris transzformáció sajátértékei és sajátvektorai(nak koordinátavektorai) miért épp azok, mint a mátrix sajátértékei és sajátvektorai, de ennek hiányáért ne vonjunk le pontot.

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek egy olyan komplex megoldását, melynek a valós és a képzetes része is negatív.

$$z^8 = -1 - \sqrt{3}i$$

* * * * *

$-1-\sqrt{3}i$ hossza 2, (1 pont)
az x tengellyel bezárt szöge pedig 240°, (2 pont)
trigonometrikus alakja tehát $2 \cdot (\cos 240° + i \sin 240°)$. (1 pont)
Így a nyolcadik gyökeinek hossza $\sqrt[8]{2}$, (1 pont)
a nyolcadik gyökök x tengellyel bezárt szögei pedig $30°, 75°, 120°, 165°, 210°, 255°, 300°, 345°$. (2 pont)
Ezek közül a 210° és a 255° szögű gyököknek negatív a valós és a képzetes része is, (1 pont)
az előbbi trigonometrikus alakja $\sqrt[8]{2}(\cos 210° + i \sin 210°)$, algebrai alakja tehát $-\frac{\sqrt[8]{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[8]{2}}{2}i$. (2 pont)

6. Oldjuk meg a komplex számok körében a $z^3 = \overline{z}$ egyenletet.

* * * * *

Legyen z trigonometrikus alakja $z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$. (1 pont)
Ekkor az egyenlet $r^3(\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha) = r(\cos -\alpha + i \sin -\alpha)$ alakba írható, (2 pont)
ahonnan $r = r^3$ (1 pont)
és $3\alpha - (-\alpha) = k \cdot 360°$. (2 pont)
Innen $r = 0$ esetén $z = 0$, (1 pont)
$r \neq 0$ esetén $r = 1$ (hiszen r nem lehet negatív). (1 pont)
Az utóbbi esetben meg kell keresni α-t is, erre $0°, 90°, 180°, 270°$ adódik. (1 pont)
A megoldások tehát 0, 1, -1, i és $-i$ lesznek. (1 pont)

* * * * *

Második megoldás. Legyen z algebrai alakja $z = a + bi$. Az egyenlet ekkor (némi számolás után) $a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = a - bi$ alakba írható. (3 pont)
Innen $a^3 - 3ab^2 = a$ és $3a^2b - b^3 = -b$. (1 pont)
Ha $a = 0$, akkor az első egyenlet teljesül, a másodikból pedig $b^3 = b$-t kapjuk, ahonnan $b = 0$, $b = 1$ vagy $b = -1$. (1 pont)
Ha $a \neq 0$, de $b = 0$, akkor a második egyenlet teljesül, az elsőből pedig $a^3 = a$-t kapjuk, ahonnan $a = 1$ vagy $a = -1$. (1 pont)
Ha sem a, sem b nem 0, akkor az első egyenletet a-val, a másodikat b-vel osztva, majd a kapott egyenleteket összeadva $a^2 = b^2$ adódik, ezt a kapott első egyenletbe beírva a $2b^2 = -1$ egyenletet kapjuk, aminek nincs valós megoldása. (2 pont)
A megoldások tehát 0, 1, -1, i és $-i$. (1 pont)

* * * * *

Harmadik megoldás. $z = 0$ nyilván megoldás. (1 pont)
Ha z nem 0, akkor a hossza csak 1 lehet, hiszen máskülönben a köbe és a konjugáltja nem lehetne egyenlő (és így azonos hosszú). (2 pont)
Mindkét oldalt (a 0-tól különböző) z-vel szorozva a bal oldalon z^4-t, a jobb oldalon z hosszának négyzetét, azaz egy valós számot kapunk, (3 pont)
azaz z-nek az x tengellyel bezárt szöge 90° többszöröse kell, hogy legyen. (3 pont)
Innen a megoldások 0, 1, -1, i és $-i$. (1 pont)