Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2011. október 20.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy G egyszerű gráfnak nincs Euler-körsétája, de bármely csúcsát elhagyva, a kapott gráfnak már van. Mutassuk meg, hogy G teljes gráf.

* * * * *

G-nek nincs izolált pontja, mert egy ilyet elhagyva a kapott gráf Euler-köre G-nek is Euler-köre lenne. (1 pont)
Ezért G-nek nem lehet páros fokú csúcsa, mert ennek egy szomszédját elhagyva páratlan fokú csúcs keletkezne, (3 pont)
ami ellentmondana annak, hogy a kapott gráfban van Euler-kör. (1 pont)
Tehát minden fok páratlan a gráfban, bármely u csúcs elhagyása után viszont minden fok páros kell legyen, (1 pont)
ezért u az összes többi ponttal össze kell hogy legyen kötve. (2 pont)
Mivel u tetszőleges, G bármely két csúcsa össze van kötve, azaz G teljes gráf. (2 pont)

Persze G csak páratlan csúcsú teljes gráf lehet, de ezt nem kellett belátni.

2. Az Amy, Bernadette, Howard, Leonard, Leslie, Penny, Priya, Raj, Sheldon, Stuart társaságból ketten négy másik mellett hajlandók ülni egy vacsora során, nyolcan pedig hat másik mellett (a hajlandóságok kölcsönösek). Mutassuk meg, hogy ha elhívják LeVar Burtont (aki bárki mellett ülhet), akkor le tudnak ülni egy 11 személyes, kör alakú asztalhoz vacsorázni.

* * * * *

Bár Sheldon aligha hajlandó Leslie mellé ülni, Penny pedig Priya vagy Stuart mellé, ezt sajnos nem használhatjuk fel. Van tehát egy 10 csúcsú egyszerű G gráfunk, amiben 8 csúcs foka 6, 2 csúcs foka 4. Azt kéne megmutatnunk, hogy ha G minden csúcsát összekötjük egy új ponttal, akkor a kapott gráfban lesz Hamilton-kör. (1 pont)
Ez ekvivalens azzal, hogy G-ben van Hamilton-út. (1 pont)
Ha a két 4 fokú csúcs szomszédos, (1 pont)
akkor Ore tétele szerint (amit használhatunk, mivel a gráf egyszerű) van Hamilton-kör G-ben, hiszen

ekkor a nem szomszédos csúcspárok összfoka minimum 10. (3 pont)
Ekkor természetesen Hamilton-út is lesz, tehát ezzel az esettel kész vagyunk. Ha a két 4 fokú csúcs nem szomszédos, (1 pont)
akkor egy élet behúzva közéjük a kapott gráf még mindig egyszerű, (1 pont)
így Dirac tétele szerint lesz benne Hamilton-kör, mivel minden fok legalább 5. (2 pont)
Az újonnan hozzávett élet elhagyva Hamilton-utat kapunk G-ben. (1 pont)

3. Egy 10 csúcsú páros gráfban 8 csúcs foka 3, a többi csúcs foka 2. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.

* * * * *

Első megoldás. Azt szeretnénk megmutatni, hogy $\nu(G) = 5$. (1 pont)
Kőnig tétele miatt ehhez elég $\tau(G) = 5$-öt igazolni. (2 pont)
Mivel a gráf hurokmentes (lévén páros gráf), Gallai tétele szerint ez $\alpha(G) = 5$-tel ekvivalens. (1 pont)
Mivel G páros, $\alpha(G)$ legalább 5. (1 pont)
Ha ennél nagyobb lenne, (1 pont)
akkor lenne 6 olyan pont, amik közt nem megy él, a maradék legfeljebb 4 pontból viszont legfeljebb 12 él mehet ki, (3 pont)
míg a gráfban 14 él van. (1 pont)

* * * * *

Második megoldás. Legyenek a páros gráf osztályai A és B. A gráfnak 14 éle van, (1 pont)
tehát ennyi él megy ki A-ból, azaz A-ban legalább 5 pont van. (1 pont)
Mivel ez B-re is teljesül, mindkét osztályban 5 pont kell hogy legyen, éspedig 4 db 3 fokú és 1 db 2 fokú. (1 pont)
A két 2 fokú csúcsot összekötve egy nem feltétlenül egyszerű, 3-reguláris páros gráfot kapunk, (2 pont)
ami 3 teljes párosítás uniójára bontható (erre persze csak akkor lehet hivatkozni, ha szerepelt gyakorlaton), (3 pont)
amiből kettőben nem szerepel az újonnan hozzávett él, tehát a gráfnak van teljes párosítása. (2 pont)

4. A 20 csúcsú G gráf kromatikus száma 4, a komplementere kromatikus száma 5. Mutassuk meg, hogy G-ben a maximális klikk mérete 4, a független pontok maximális száma pedig 5.

* * * * *

A kérdéses mennyiségekre $\omega(G) \leq \chi(G) = 4$, (1 pont)
illetve $\alpha(G) = \omega(\overline{G}) \leq \chi(\overline{G}) = 5$. (1 pont)
G bármely 4-színezésében van olyan színosztály, mely legalább 5 pontból áll, ellenkező esetben G-nek nem lehetne 20 csúcsa. (2 pont)
Mivel a színosztályok független ponthalmazok, $\alpha(G) = 5$. (2 pont)
Hasonlóan, $\overline{G}$ bármely 5-színezésében van olyan színosztály, mely legalább 4 pontból áll, ellenkező esetben $\overline{G}$-nek nem lehetne 20 csúcsa. (2 pont)
Mivel a színosztályok független ponthalmazok, $\omega(G) = \alpha(\overline{G}) = 4$. (2 pont)

5. Legyen G az a gráf, amit egy öt hosszú kör éleinek megduplázásával kapunk. Határozzuk meg G élkromatikus számát.

* * * * *

Az élkromatikus szám 5. Ennek belátásához egyrészt mutatni kell egy jó 5-színezést, ami 6 pontot ér, másrészt igazolni kell, hogy 4 szín nem elég 4 pontért. Ez a legegyszerűbben úgy történhet, hogy indirekten feltéve, hogy 4 szín mégis elég, elkezdjük megszínezni az éleket. Mivel minden fok 4, ez (a színek elnevezéseitől és permutációitól eltekintve) egyféleképp történhet és hamar kiderül, hogy nem működik.

Ha valaki 6 színnel tudja csak megszínezni az éleket, az az első 6 pontból 2-t kaphat (ez annak is jár, aki esetleg Shannon tételét használja, miszerint $\frac{3}{2}\Delta$ szín elég), az 5-színezés létezésére Vizing-tételt használóknak nem jár pont, hiszen a gráf nem egyszerű.

6. Határozzunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális s-t vágást.

* * * * *

Jó folyam, jó indoklás a maximalitásra 5 pont, jó vágás,jó indoklás a minimalitásra szintén 5 pont. Picit hiányos indoklás esetén 1-1 pontot vonjunk le, nagyobb hiány esetén ennél többet (tipikus példa: jó folyam, jó vágás, semmi indoklás - ez max. 6 pont, ha viszont a két érték nem egyezik, akkor ennél jóval kevesebb).

Ha valaki a javítóutas algoritmust használja, de hibázik (és ezért nem jön ki megoldás), akkor max. 2-3 pontot kaphat a folyam részre, ha kiderül, hogy hogy keresne minimális vágást, akkor erre is adható max. 2-3 pont. Ha a hibá(k)ról nem derül ki, hogy számolási vagy elvi hiba, akkor szigorúan járjunk el, azaz tekintsük elvinek.