1. Számoljuk ki az alábbi kifejezéseket segédeszköz nélkül :

a.) $2^{\log_4 9 + 1} + (\log_4 20 - \log_4 5) = 2 \cdot 2^{2 \cdot \log_4 3} + \log_4 \frac{20}{5} = 2 \cdot 3 + 1 \boxed{= 7}$. (6 pont)

b.) $\sin \frac{31\pi}{6} + \mathrm{tg}\, \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 5\pi\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\sin \frac{\pi}{6} + \mathrm{tg}\, \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} + 1 \boxed{= \frac{1}{2}}$. (6 pont)

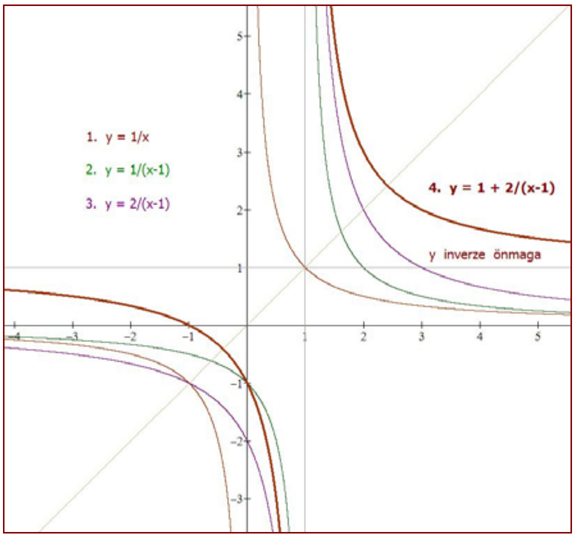
c.) $0{,}027^{-1/3} + \frac{3^5 + 3^6 - 3^4}{3^5 + 3^4} = \left(\frac{27}{1000}\right)^{-1/3} + \frac{3^4 \cdot (3 + 3^2 - 1)}{3^4 \cdot (3+1)} = \frac{10}{3} + \frac{11}{4} = \boxed{= \frac{73}{12}}$. (6 pont)

2. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket :

a.) $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x} : \frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 - 25} = \frac{(x-4) \cdot (x+4)}{x \cdot (x-5)} \cdot \frac{(x-5) \cdot (x+5)}{(x+4) \cdot (x+5)} = \boxed{\frac{x-4}{x}}$. (6 pont)

b.) $\frac{27^{n/3} \cdot 9^{-n} \cdot 2^n \cdot 3^n}{16^{n/2} + 2 \cdot 2^{2n} + 2^n \cdot 2^n} = \frac{3^n \cdot 9^{-n} \cdot 2^n \cdot 3^n}{2^{2n} + 2 \cdot 2^{2n} + 2^{2n}} = \frac{1}{4 \cdot 2^n} = \boxed{\frac{1}{2^{n+2}}}$. (6 pont)

3. Ábrázoljuk az $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ függvényt, adjuk meg az inverzét, és azt is ábrázoljuk ! (12 pont)



$D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $R_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

f injektív, így az inverze létezik :

$D_{f^{-1}} = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $R_{f^{-1}} = \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

$$x = 1 + \frac{2}{f^{-1}(x) - 1} \iff x - 1 = \frac{2}{f^{-1}(x) - 1}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{1}{f^{-1}(x) - 1} \iff \boxed{f^{-1}(x) = 1 + \frac{2}{x-1}}$$

4. Adjuk meg az $f(x) = \dfrac{2(x+1) \cdot (x-2)^3 - 3(x+1)^2 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^6}$ függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit ! (8 pont)

$D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ (u.i. a nevezőben nem állhat zérus)

$$f(x) = \frac{2(x+1) \cdot (x-2)^3 - 3(x+1)^2 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{(x+1) \cdot (2(x-2) - 3(x+1))}{(x-2)^4} = \frac{(x+1) \cdot (-x-7)}{(x-2)^4} = 0$$

pontosan akkor, ha $x = -1$ vagy $x = -7$, tehát $\boxed{f \text{ zérushelyei } -1 \text{ és } -7}$.

1. Számoljuk ki az alábbi kifejezéseket segédeszköz nélkül :

a.) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4 9\,-2}+\left(\log_3 21-\log_3 7\right) \;=\; 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot\log_4 3}+\log_3\frac{21}{7} \;=\; 4\cdot\frac{1}{3}+1 \;\boxed{=\frac{7}{3}}$. (6 pont)

b.) $\cos\frac{31\pi}{6}+\mathrm{tg}\,\frac{9\pi}{4} \;=\; \cos\left(\frac{\pi}{6}+5\pi\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right) \;=\; -\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} \;=\; -\frac{\sqrt{3}}{2}+1 \;\boxed{=\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$. (6 pont)

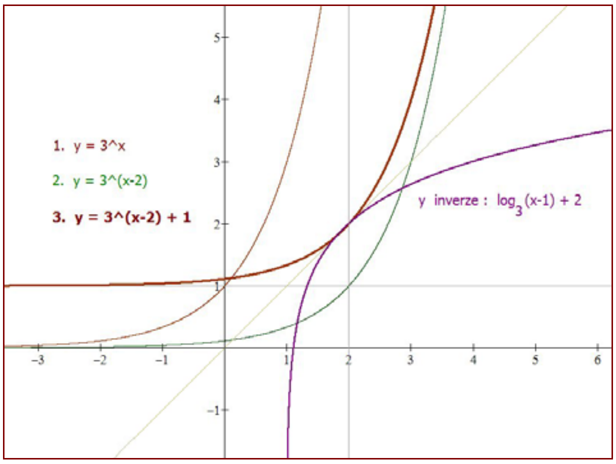
c.) $\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}027}}+\frac{4^5+4^6-4^4}{4^5+4^4} \;=\; \left(\frac{1000}{27}\right)^{1/3}+\frac{4^4\cdot(4+4^2-1)}{4^4\cdot(4+1)} \;=\; \frac{10}{3}+\frac{19}{5} \;=\; \boxed{=\frac{107}{15}}$. (6 pont)

2. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket :

a.) $\frac{x^2-25}{x^2+9x+20}:\frac{x^2-5x}{x^2-16} \;=\; \frac{(x-5)\cdot(x+5)}{(x+4)\cdot(x+5)}\cdot\frac{(x-4)\cdot(x+4)}{x\cdot(x-5)} \;=\; \boxed{\frac{x-4}{x}}$. (6 pont)

b.) $\frac{(\sqrt{2})^{2n}\cdot 2^n+2\cdot 2^{2n}+16^{n/2}}{(\sqrt{3})^{2n}\cdot 2^n\cdot 9^{-n}\cdot 27^{n/3}} \;=\; \frac{2^n\cdot 2^n+2\cdot 2^{2n}+2^{2n}}{3^n\cdot 2^n\cdot 9^{-n}\cdot 3^n} \;=\; 2^n+2\cdot 2^n+2^n \;=\; \boxed{2^{n+2}}$. (6 pont)

3. Ábrázoljuk az $f(x)=3^{x-2}+1$ függvényt, adjuk meg az inverzét, és azt is ábrázoljuk ! (12 pont)



$D_f=\mathbf{R}$, $R_f=(1,+\infty)$,

f injektív, így az inverze létezik :

$D_{f^{-1}}=(1,+\infty)$, $R_{f^{-1}}=\mathbf{R}$,

$x=3^{f^{-1}(x)-2}+1 \;\Leftrightarrow\; x-1=3^{f^{-1}(x)-2}$

$\log_3(x-1)=f^{-1}(x)-2 \;\Leftrightarrow\; \boxed{f^{-1}(x)=\log_3(x-1)+2}$

4. Adjuk meg az $f(x)=\frac{3(x+2)^2\cdot(x-3)^2-2(x-3)\cdot(x+2)^3}{(x-3)^4}$ függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit ! (8 pont)

$D_f=\mathbf{R}\setminus\{3\}$ (u.i. a nevezőben nem állhat zérus)

$$f(x)=\frac{3(x+2)^2\cdot(x-3)^2-2(x-3)\cdot(x+2)^3}{(x-3)^4}=\frac{3(x+2)^2\cdot(x-3)-2(x+2)^3}{(x-3)^3}=\frac{(x+2)^2\cdot(3(x-3)-2(x+2))}{(x-3)^3}=$$

$\frac{(x+2)^2\cdot(x-13)}{(x-3)^3}=0$ pontosan akkor, ha $x=-2$ vagy $x=13$, tehát $\boxed{f \text{ zérushelyei } -2 \text{ és } 13}$.