1. feladat (14+6=20 pont)
a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{e^{-2y^2}\operatorname{ch}(2x)}{y}$$

b) Rajzoljuk fel az

$$y' = y^2 - x + 1$$

differenciálegyenlet $K = 1$-hez tartozó izoklináját, és jelöljünk be rajta két vonalelemet!

Mo. *a*) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^{-2y^2}\operatorname{ch}(2x)}{y} \quad \Longrightarrow \quad \int ye^{2y^2}\,\mathrm{d}y = \int \operatorname{ch}(2x)\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p})$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int ye^{2y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}e^{2y^2} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p})$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \operatorname{ch}(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2x) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p})$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\frac{1}{2}e^{2y^2(x)} = \operatorname{sh}(2x) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})$$

b) A $K = 1$-hez tartozó izoklina az $x = y^2$ egyenletű parabola **(4p)** , a vonalelemek 1 meredekségűek **(2p)** .

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az

$$y' = (2y - 2x)^2 + 1$$

differenciálegyenletet az $y(0) = -1$ kezdeti feltétel mellet! (A megoldást explicit alakban adjuk meg.)

Mo. Legyen $u(x) := 2y(x) - 2x$ **(2p)** . Ekkor

$$u'(x) = 2y'(x) - 2 \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{u'(x)}{2} + 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az új differenciálegyenlet:

$$u' = 2u^2 \quad (\mathbf{2p})$$

Szeparálható, $u \equiv 0$ megoldás **(1p)** . A tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2u^2 \quad \Longrightarrow \quad \int u^{-2}\,\mathrm{d}u = \int 2\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}) \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{u(x)} = 2x + \widetilde{C} \quad (\widetilde{C} \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát az eredeti egyenlet megoldásai:

$$y(x) = x - \frac{1}{4x - C} \quad (\mathbf{4p}) \quad \text{és} \quad y(x) = x \quad (\mathbf{1p})$$

A megadott kezdeti feltétel melletti megoldást jelölje $\widetilde{y}$, ekkor:

$$\widetilde{y}(0) = -1 \quad \Longrightarrow \quad C = -1 \quad (\mathbf{1p}) \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{y}(x) = x - \frac{1}{1 + 4x} \quad (\mathbf{2p}) \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}\right).$$

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 4y' + 5y = 13\sin(2x)$$

Mo. Harmadrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1e^{2x}\sin(x) + C_2e^{2x}\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})$$

alakban keressük (nincs rezonancia). Deriválva kétszer **(2p)** :

$$\begin{aligned}
y(x) &= A\sin(2x) + B\cos(2x) && | \cdot 5\\
y'(x) &= 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) && | \cdot (-4)\\
y''(x) &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) && | \cdot 1
\end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = (A + 8B)\sin(2x) + (-8A + B)\cos(2x) = 13\sin(2x) \quad (\mathbf{2p})$$

$$\Longrightarrow \quad A = \frac{1}{5},\, B = \frac{8}{5} \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{8}{5}\cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p})$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned}
y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) =\\
&= \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{8}{5}\cos(2x) + C_1e^{2x}\sin(x) + C_2e^{2x}\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})
\end{aligned}$$

4. feladat (7+7+7=21 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{\sin^n(2n^2)}{n^3} \qquad b) \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \qquad c) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+3+7^n}{2+2^{2n}}$$

Mo. *a)* Legyen $a_n := \frac{\sin^n(2n^2)}{n^3} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

$$|a_n| \leq \frac{1}{n^3} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad (\mathbf{4p}),$$

és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^3}$ numerikus sor konvergens **(1p)** , tehát a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$ abszolút konvergens **(1p)** , következésképpen konvergens **(1p)** .

$b)$ Legyen $b_n := \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$b_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} \underset{(\mathbf{2p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{e^2}{e^3} = \frac{1}{e} \neq 0 \quad (\mathbf{1p})$$

tehát nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ divergens **(2p)** .

$c)$ Legyen $c_n := \frac{n^2+3+7^n}{2+2^{2n}} \quad (n \in \mathbb{N})$.
Első megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$c_n \geq \frac{7^n}{2\cdot 4^n} \geq 0 \quad (\mathbf{4p})$$

és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4}\right)^n$ sor divergens **(1p)** , tehát a minoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ divergens **(2p)** .
Második megoldás.

$$c_n = \frac{n^2+3+7^n}{2+4^n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\frac{n^2}{2^n}+3+\left(\frac{7}{4}\right)^n}{\frac{2}{4^n}+1} \underset{(\mathbf{2p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} +\infty \neq 0 \quad (\mathbf{1p}),$$

tehát nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ divergens **(2p)** .

---

5. feladat (7+12=19 pont)
$a)$ Milyen sorokat nevezünk Leibniz-típusú soroknak? Mit mond ki a Leibniz-kritérium? Hogyan becsülhetjük egy Leibniz-sor hibáját? (Bizonyítás nélkül mondjuk ki a tanult állításokat!)
$b)$ Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}}$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét az $S_{99} := \sum\limits_{n=0}^{99} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}}$ részletösszeggel közelítjük.

Mo. $a)$ *Lebiniz-sor definíciója:* Azt mondjuk, hogy az $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor **Leibniz-sor**, ha a következő tulajdonságok teljesülnek rá.

(i) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+1} \cdot a_n \leq 0$ (azaz **alternál**). **(1p)**
(ii) Az $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton csökkenő. **(1p)**
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. **(1p)**

(Ha az első két tulajdonság egy küszöbindextől kezdve teljesül, akkor $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$-et **tágabb értelemben vett Leibniz-sornak** nevezzük.)
Leibniz-kritérium: Minden (tágabb értelemben vett) Leibniz-sor konvergens. **(2p)**
Ha $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ Leibniz-sor, és $S \in \mathbb{R}$ jelöli a sor összegét, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - S\right| \leq |a_{n+1}| \quad (\mathbf{2p}).$$

$b)$ Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}}$. Ekkor $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ alternál **(1p)** , $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ **(2p)** , illetve $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton csökkenő **(1p)** , hiszen egy monoton növő, pozitív tagú sorozat reciproka **(3p)** , tehát a Leibniz-kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens **(2p)** .
Hibabecslés: Szintén a Leibniz-kritérium alapján, ha S jelöli a sor összegét, akkor

$$|S_{99} - S| \leq |a_{100}| = \frac{1}{\sqrt{10301}} \quad (\mathbf{3p})$$

IMSc feladat (8 IMSc pont) Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+6n+4}$$

összeget.

Mo. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{2n^2+6n+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (\mathbf{1p}).$$

Parciális törtekre bontással:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (\mathbf{3p})$$

Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+6n+4} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{2}.$$