1. *Két urna közül az egyikben 4 fekete és 6 fehér, a másikban 5 fekete és 7 fehér golyó van. Az elsőből találomra átrakunk kettőt a másodikba, majd onnan találomra visszaveszünk egyet. Megint az elsőből húzva, mennyi a valószínűsége a fehérnek?*

Megoldás. A cserék után az első urna tartalma az alábbiak szerint változhat:
A_1 : (2 fekete $\rightarrow$, 1 fekete $\leftarrow$) 3 fekete, 6 fehér, $\mathbf{P}(A_1) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{7}{1}}{\binom{14}{1}} = \frac{42}{630}$
A_2 : (2 fekete $\rightarrow$, 1 fehér $\leftarrow$) 2 fekete, 7 fehér, $\mathbf{P}(A_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{7}{1}}{\binom{14}{1}} = \frac{42}{630}$
A_3 : (1-1 fekete-fehér $\rightarrow$, 1 fekete $\leftarrow$) 4 fekete, 5 fehér, $\mathbf{P}(A_3) = \frac{24}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{6}{1}}{\binom{14}{1}} = \frac{144}{630}$
A_4 : (1-1 fekete-fehér $\rightarrow$, 1 fehér $\leftarrow$) 3 fekete, 6 fehér, $\mathbf{P}(A_4) = \frac{24}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{8}{1}}{\binom{14}{1}} = \frac{192}{630}$
A_5 : (2 fehér $\rightarrow$, 1 fekete $\leftarrow$) 5 fekete, 4 fehér, $\mathbf{P}(A_5) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{5}{1}}{\binom{14}{1}} = \frac{75}{630}$
A_6 : (2 fehér $\rightarrow$, 1 fehér $\leftarrow$) 4 fekete, 5 fehér, $\mathbf{P}(A_6) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{9}{1}}{\binom{14}{1}} = \frac{135}{630}$
B : fehéret húzunk az első urnából, a keverés után
$\mathbf{P}(B \mid A_1) = \mathbf{P}(B \mid A_4) = \frac{6}{9}$
$\mathbf{P}(B \mid A_2) = \frac{7}{9}$
$\mathbf{P}(B \mid A_3) = \mathbf{P}(B \mid A_6) = \frac{5}{9}$
$\mathbf{P}(B \mid A_5) = \frac{4}{9}$
A teljes valószínűség tételéből:
$\mathbf{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{6} \mathbf{P}(B \mid A_i)\,\mathbf{P}(A_i) = \frac{3393}{5670} \approx 0,6$

2. *Legyen X a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó és $Y = \sqrt{X+1}$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!*

Megoldás. Y eloszlásfüggvénye a $(1, \sqrt{2})$ intervallumon a következő:

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(\sqrt{X+1} < t) = P(X < t^2 - 1) = t^2 - 1,$$

amit deriválva megkapjuk a sűrűségfüggvényt: $f_X(t) = 2t$, ha $t \in (1, \sqrt{2})$

A momentumokat kétféleképpen lehet számítani:

a.) $\mathbb{E}Y = \int_1^{\sqrt{2}} 2t^2 dt = \frac{2}{3}\left[t^3\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$
$\mathbb{E}Y^2 = \int_1^{\sqrt{2}} 2t^3 dt = \frac{1}{2}\left[t^4\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$

b.) $\mathbb{E}\sqrt{X+1} = \int_0^1 \sqrt{t+1}dt = \left[\frac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$
$\mathbb{E}(X+1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

A fentieket felhasználva a szórásnégyzet:

$$\sigma^2 Y = \mathbb{E}Y^2 + (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{9}(2\sqrt{(2)} - 1)^2 = \frac{32\sqrt{2} - 45}{18} \approx 0.014157$$

Azaz $\sigma Y \approx 0.11899$

3. *Egy jól megkevert 32 lapos magyar kártyacsomagból leosztunk 10-et. Legyen $X = 1$, ha a leosztott lapok között van piros, és $X = 0$, ha nincs. Legyen továbbá $Y = 1$, ha van a tíz lap között ász, és $Y = 0$ különben. Adja meg X és Y együttes eloszlását és a kovarianciát!*

Megoldás.

$$P(X=0,Y=0)=\frac{\binom{21}{10}}{\binom{32}{10}}=\frac{352716}{64512240}$$

$$P(X=0,Y=1)=\frac{\sum_{i=1}^{3}\binom{3}{i}\binom{21}{10-i}}{\binom{32}{10}}=\frac{1608540}{64512240}$$

$$P(X=1,Y=0)=\frac{\sum_{i=1}^{7}\binom{7}{i}\binom{21}{10-i}}{\binom{32}{10}}=\frac{12770394}{64512240}$$

$$P(X=1,Y=1)=1-P(X=0,Y=0)-P(X=0,Y=1)-P(X=1,Y=0)=\frac{49780590}{64512240}$$

A fentiek alapján számolhatók a várható értékek is:

$$\mathbb{E}X^2=\mathbb{E}X=\frac{62550984}{64512240}$$

$$\mathbb{E}Y^2=\mathbb{E}Y=\frac{51389130}{64512240}$$

$$\mathbb{E}XY=\frac{49780590}{64512240}$$

Azaz a kovariancia:

$$\mathrm{cov}(X,Y)\approx -0.77236$$

4. *Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda=1$ paraméterrel és $Y=[X]$, azaz X egészrésze. Mennyi az Y diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórása?*

Megoldás. Belátható, hogy $1+Y\in G(1-e^{-1})$. Ebből következik, hogy $\mathbb{E}(Y+1)=\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\frac{e}{e-1}$, azaz $\mathbb{E}Y=\frac{e}{e-1}-1=\frac{1}{1-e}$, valamint $\sigma(Y+1)=\sigma Y=\sqrt{\frac{\frac{1}{e}}{(\frac{e-1}{e})^2}}=\frac{\sqrt{e}}{e-1}$.

5. *Az egységnégyzetben véletlenszerűen kiválasztunk 10 pontot. Jelölje X azon pontok számát, melyek ezek közül beleesnek az $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(0,1)$ és $(0,0)$ pontok által meghatározott háromszög belsejébe is. Adja meg a $P(X\le 5)$ valószínűséget!*

Megoldás. A háromszöget és az egységnégyzetet felrajzolva kiszámolható, hogy annak a valószínűsége, hogy egy adott pont beleesik a megadott háromszögbe, pontosan $\frac{1}{4}$. Mivel az egyes pontok helye egymástól független, így a háromszögbe eső pontok száma binomiális eloszlású, azaz $X\in B(10,\frac{1}{4})$. Az ismert képletet felhasználva $P(X\le 5)=\sum_{i=0}^{5}\binom{10}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}$.