Bevezetés a számításelméletbe II.
1. pótzárthelyi — pontozási útmutató
2011. december 5.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Határozzuk meg azon 11 csúcsú egyszerű gráfokat, melyekhez bárhogyan hozzávéve egy élet úgy, hogy a gráf egyszerű maradjon, a kapott gráfnak lesz Euler-köre.

* * * * *

Mivel egy él behúzásával a gráfban lesz Euler-kör, a páratlan fokú csúcsok száma legfeljebb kettő lehet. (2 pont)
A páros fokú csúcsoknak klikket kell alkotniuk, különben húzhatnánk közéjük élet és a kapott gráfban nem lenne Euler-kör. (2 pont)
Ha tehát nincs páratlan fokú csúcs, akkor a gráf egy 11 csúcsú teljes gráf, ez meg is felel a feladat feltételének. (1 pont)
Egy páratlan fokú csúcs természetesen nem lehet a gráfban, hiszen a páratlan fokok száma mindig páros. (1 pont)
Ha a páratlan fokok száma kettő, akkor a párosak egy 9 csúcsú klikket alkotnak, ezen felül minden olyan él is be van húzva, ami páros és páratlan fokú csúcsok közt vezet, hiszen egy ilyen élet behúzva sem lenne a kapott gráfban Euler-kör. (2 pont)
A gráf ekkor az egy élű gráf komplementere, ami szintén megfelel a feltételeknek. (2 pont)

2. Egy 101 csúcsú egyszerű gráfban két csúcs foka 50, a többi csúcs foka legalább 51. Mutassuk meg, hogy el tudunk hagyni a gráfból egy csúcsot úgy, hogy a kapott gráfnak legyen Hamilton-köre.

* * * * *

Egy csúcs elhagyása után 100 csúcsú egyszerű gráfot kapunk, (1 pont)
tehát Dirac tétele szerint elég azt igazolni, hogy minden pont foka legalább 50. (1 pont)
Ha a két (eredetileg) 50 fokú csúcs nincs összekötve, akkor bármelyiküket elhagyva ilyen gráfot kapunk, hiszen a nem elhagyott 50 fokú csúcs foka nem csökken, (2 pont)
a többi csúcs foka pedig legfeljebb eggyel csökken. (1 pont)
Ha a két 50 fokú csúcs össze van kötve, akkor a legalább 51 fokú és az 50 fokú csúcsok között 98 él

fut, (2 pont)
azaz lesz olyan legalább 51 fokú csúcs, amely nincs összekötve egyik 50 fokú csúccsal sem (mivel 99 ilyen csúcs van). (2 pont)
Ezt a csúcsot elhagyva a Dirac-feltételnek megfelelő gráfot kapunk. (1 pont)

3. Egy 2011 csúcsú páros gráfnak 2011 éle van. Mutassuk meg, hogy van olyan csúcsa, aminek a foka legalább 3.

* * * * *

A gráfban a fokszámok átlaga 2, (2 pont)
ezért ha nem lenne legalább 3 fokú csúcs, akkor minden foknak pontosan kettőnek kéne lennie. (2 pont)
Egy csak 2 fokú csúcsokból álló gráf körök diszjunkt uniója, (2 pont)
hiszen minden komponensben van kör, más él viszont ekkor nem lehet a komponensben. (2 pont)
Mivel a csúcsok száma páratlan, a körök közt lenne páratlan csúcsú, ami páros gráf esetén nem lehetséges. (2 pont)

4. Egy 10 csúcsú egyszerű páros gráf egyik osztályában a csúcsok fokai rendre 5,4,4,2,2. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.

* * * * *

A feladat szövege szerint mindkét osztályban 5 csúcs kell legyen, (1 pont)
így Frobenius tétele szerint elég azt megmutatni, hogy valamelyik osztályban bármely részhalmaz szomszédsága legalább akkora, mint maga a részhalmaz. (2 pont)
Legyen az az osztály, ahol a fokok adottak A. A-ban minden részhalmaz szomszédsága legalább 2 elemű, hiszen minden pont foka legalább 2, vagyis az 1 és 2 elemű részhalmazok szomszédságai kellően nagyok. (3 pont)
A legalább 3 elemű részhalmazok tartalmaznak legalább 4 fokú csúcsot (hiszen ennél kisebb fok csak 2 van), tehát a 3 és 4 elemű részhalmazok szomszédságai is kellően nagyok, (3 pont)
magának A-nak a szomszédsága pedig 5 elemű, mivel van A-ban 5 fokú csúcs. (1 pont)

5. Egy 10 csúcsú gráf kromatikus száma 9. Mutassuk meg, hogy a klikkszáma legalább 8.

* * * * *

Mivel a kromatikus szám 9, a gráf csúcshalmaza szétosztható 9 részre úgy, hogy a részeken belül nem mennek élek, viszont bármely két rész között megy legalább egy él, (2 pont)
ellenkező esetben két, éllel össze nem kötött részt összevonhatnánk és a gráf megszínezhető lenne 9-nél kevesebb színnel is. (3 pont)
Mivel minden részben van legalább egy csúcs, a 9 rész közül 8-ban pontosan egy csúcs kell hogy legyen (két legalább két csúcsú rész esetén legfeljebb 8 rész lehetne). (2 pont)
Mivel ezen részek bármelyike közt megy él, az érintett csúcsok egy 8 csúcsú teljes gráfot alkotnak, azaz a klikkszám legalább 8. (3 pont)

6. Egy G gráf összes élét megduplázzuk. Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráf élkromatikus száma legfeljebb $2\chi_e(G)$ és mutassunk rá példát, hogy lehet ennél kisebb is.

* * * * *

Legyenek a G gráf élei $e_1, e_2, \dots, e_m$, az e_i él duplázásakor kapott él legyen e_i'. Legyen továbbá $c : \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \to \{1, 2, \dots, \chi_e(G)\}$ a G gráf egy jó élszínezése.

Megszínezzük a duplázás utáni gráf éleit $2\chi_e(G)$ színnel a következőképp. Az eredeti élek kapják meg azt a színt, amit G élszínezésekor kapnak, (1 pont)
e_i' színe pedig legyen $c(e_i) + \chi_e(G)$. (1 pont)
Ekkor két csatlakozó régi él nyilván nem lehet azonos színű, (1 pont)
két csatlakozó új él sem lehet azonos színű, hiszen ekkor a nekik megfelelő régi élek is azonos színűek lennének, (2 pont)
végül egy új és egy régi csatlakozó él sem lehet azonos színű, hiszen a régi élek színei és az új élek színei diszjunkt halmazokban vannak. (1 pont)
A feladat második felének megoldásához legyen G (például) az 5 csúcsú kör, melynek élkromatikus száma 3. (1 pont)
A dupla ötszög 5 színnel való jó élszínezéséért (és annak megállapításáért, hogy $2 \cdot 3 > 5$) 3 pont jár.