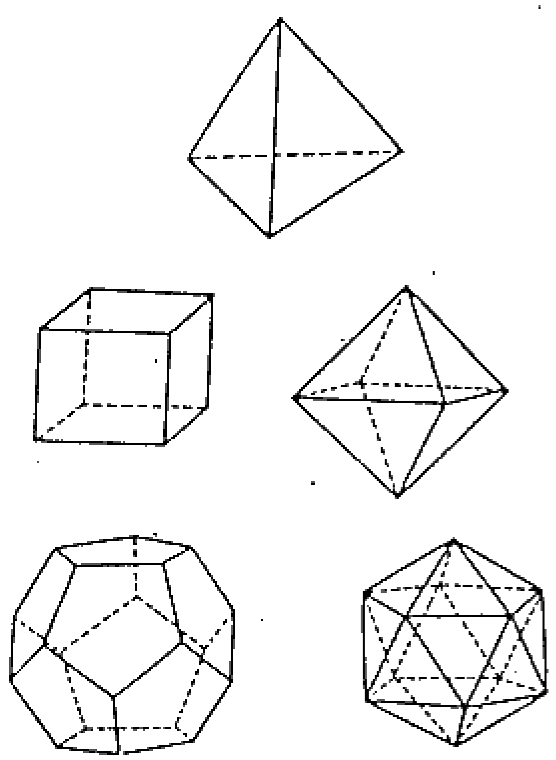
SÍKBARAJZOLHATÓSÁGGAL KAPCSOLATOS FELADATOK [1]

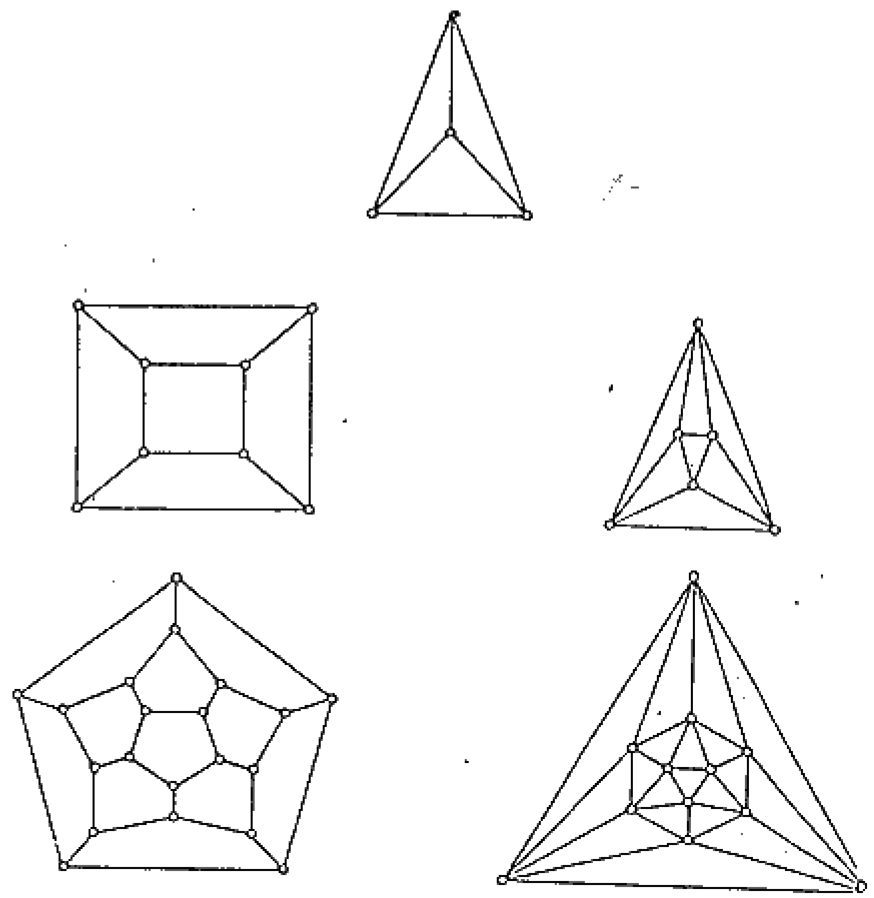
1 Euler-formula

1. *Ellenőrizzük az Euler-formulát az ábrán látható öt szabályos test (tetraéder, kocka (vagy hexaéder), oktaéder, dodekaéder és ikozaéder) esetén és rajzoljuk fel a testek élhálóit, mint síkbarajzolható gráfokat, kereszteződés nélkül.*



Megoldás: A gráfok az ábrán, a pont-, él- és lapszámok az alábbi táblázatban láthatók.

név	pontok száma	élek száma	lapok száma
tetraéder	4	6	4
kocka (hexaéder)	8	12	6
oktaéder	6	12	8
dodekaéder	20	30	12
ikozaéder	12	30	20



2. *Mutassuk meg, hogy a K_8 (nyolcpontú teljes gráf) lerajzolásakor legalább 10 élkereszteződés jön létre!*

Megoldás: Egy síkbarajzolható, n pontú és e élű egyszerű gráfban $e \leq 3n-6$ teljesül. Így egy 8 pontú egyszerű gráfnak legfeljebb 18 élét húzhatjuk be kereszteződés nélkül. A K_8 gráf $\binom{8}{2} = 28$ éle közül tehát az utolsó 10 behúzásakor biztos minden alkalommal kapunk egy-egy új élkereszteződést.

3. *Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka legalább hat!*

Megoldás: Ha egy n-pontú gráfban minden pont foka legalább hat, akkor az élszám legalább $3n$, ami síkbarajzolható egyszerű gráfoknál lehetetlen.

4. *Egy síkbarajzolható, n pontú és e élű gráfban minden kör hossza legalább k. Mutassuk meg, hogy ekkor*

$$e \leq \frac{k}{k-2}n - \frac{2k}{k-2}$$

teljesül!

Megoldás: A t darab tartományt határoló élek számát összeadva az élszám kétszeresét kapjuk. (Az esetleges elvágó élek mindkét oldala ugyanazt a tartományt határolja, ekkor a tartományt határoló élek megszámlálásakor az ilyen éleket kétszer kell venni.) Így $2e \geq kt$, hisz a tartományokat is körök határolják. Az Euler-formulából kapott $t = e+2-n$ kifejezést behelyettesítve kapjuk az állítást.

5. *Legyen G egy egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható gráf, melynek minden tartományát pontosan 6 él határolja. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van legfeljebb másodfokú pontja!*

Megoldás: Az előző feladatot $k = 6$-ra alkalmazva $e \leq \frac{3}{2}n - 3$, vagyis $2e \leq 3n - 6$ teljesül. Ha minden pont legalább harmadfokú volna, akkor a fokszámok összegére ezzel egyidejűleg $2e \geq 3n$ teljesülne, ami lehetetlen.

Megjegyzés: Az állításból következik, hogy nincs olyan konvex poliéder, melynek minden lapja hatszög lenne.

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráf síkbarajzolható és nincs 5-nél kisebb fokú pontja, akkor legalább 12 darab pontosan ötödfokú pontja van!*

Megoldás: Jelölje e az élek, a az ötödfokú és b a legalább hatodfokú pontok számát. Egyrészt $5a + 6b \leq 2e$, másrészt a síkbarajzolhatóság miatt $e \leq 3(a+b) - 6$ teljesül. Mivel ez utóbbi $2e \leq 6a + 6b - 12$ alakba írható, az állítás adódik.

7. *Mutassuk meg, hogy az előző feladatban szereplő 12-es becslés nem javítható, vagyis adjunk példát olyan síkbarajzolható egyszerű gráfra, melyben 12 darab ötödfokú pont van és kisebb fokú nincs.*

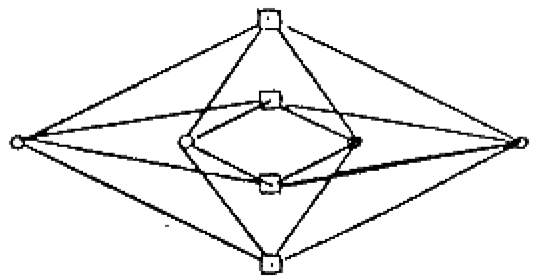
Megoldás: Az ikozaédernek az élhálója ilyen, ld. az **1.** feladat megoldását. Bonyolultabb példa a **15.** feladatban szereplő gráf duálisa.

8. *Egy 20 csúcsú konvex poliédernek 12 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?*

Megoldás: Legyen ez a szám k. Ekkor $12k = 2e$, hisz minden élt kétszer számoltunk. Az Euler-formulából viszont $e + 2 = 20 + 12$ miatt így $k = 5$ azonnal adódik. (Vegyük észre, hogy az 1. feladatban szereplő dodekaéder is ilyen.)

9. *Legalább hány élkereszteződés szükséges a $K_{4,4}$ (négy ház, négy kút) páros gráf lerajzolásához?*

Megoldás: Ha egy 8 pontú síkbarajzolható gráfban minden kör hossza legalább négy, akkor a gráfnak a 4. feladat szerint legfeljebb 12 éle lehet. A további 4 él behúzásakor biztos mindig kapunk egy-egy új élkereszteződést. Így legalább 4 kereszteződés szükséges, és ennyivel le is rajzolható a gráf, pl. az ábrán látható módon (a házakat négyzetek, a kutakat körök jelölik).



10. *Egy gömbre keresztezés nélkül felrajzoltunk egy 16 élű 4-reguláris gráfot. Hány tartomány keletkezett?*

Megoldás: Ha a pontok számát n-nel, az élekét e-vel jelöljük, akkor a regularitás miatt $2e = 4n$, tehát $n = 8$. Az Euler-formula szerint a tartományok száma $16 + 2 - 8 = 10$. (Egy ilyen gráf látható egyébként a **25.** feladat megoldásánál.)

11. *Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?*

Megoldás: Jelöljük a négyszöglapok és a nyolcszöglapok számát l_4-gyel, ill. l_8-cal. A $4l_4 + 8l_8$ mennyiség minden élt kétszer (és a feladat másik feltétele miatt minden pontot háromszor) számol. Így a pontok, élek és lapok száma rendre $\frac{4}{3}l_4 + \frac{8}{3}l_8$, $2l_4 + 4l_8$, ill. $l_4 + l_8$. Ha ezeket az Euler-formulába helyettesítjük, $l_4 - l_8 = 6$ adódik. (Egyébként van is ilyen konvex test, a nyolcszög alapú hasáb.

12. *Mutassuk meg, hogy ha öt ház mindegyikéből öt kút mindegyikéhez ösvényt kell építenünk, akkor legalább kilenc útkereszteződés lesz! (Hidak, alagutak nem építhetők és egy kereszteződésben csak két ösvény találkozhat.)*

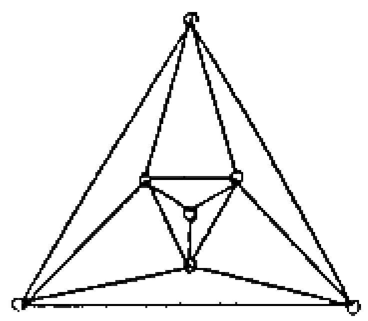
Megoldás: Ha egy n pontú síkbarajzolható gráfban minden kör hossza legalább négy, akkor a gráfnak legfeljebb $2n-4$ éle lehet. A további $25-16=9$ behúzásakor mindig legalább egy-egy új kereszteződést hozunk létre.

13. *Egy n pontú, e élű síkbarajzolható egyszerű gráf c összefüggő komponensből áll. A síkbarajzolása során t tartomány keletkezik. Bizonyítsuk be, hogy $n+t-e=c+1$ teljesül!*

Megoldás: Külön az (n_i pontú és e_i élű) i-edik komponens lerajzolásakor t_i tartomány keletkezne. Ekkor $n = \sum n_i$ és $e = \sum e_i$, viszont a "külső" tartományok azonosak, ezért $t = \sum t_i - (c-1)$ helyettesítendő be az Euler-formulába.

14. *Adjuk meg az összes olyan t számot, melyre létezik t darab háromszögből álló 7 csúcsú konvex test!*

Megoldás: Az Euler-formula szerint $t+n=e+2$, ahol $n=7$ és $2e=3t$. Ez csak $t=10, e=15$ értékekkel teljesülhet és ilyen konvex test van is, élhálóját az alábbi ábra mutatja.



15. *Egy konvex test lapjai szabályos ötszögek és hatszögek. Az ötszögeket csak hatszögek határolják, a hatszögeket felváltva hatszögek és ötszögek (gondoljunk a futball-labdára). Meghatározható-e ennyi adatból az ötszögek és a hatszögek száma?*

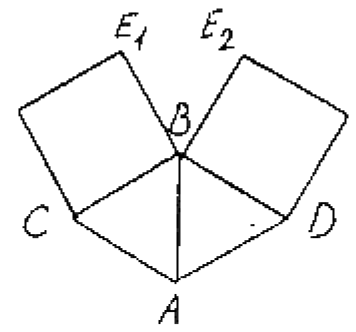
Megoldás: Igen. Jelölje l_5, ill. l_6 a két mennyiséget. Egy csúcsban nem találkozhat csak két lap, és négy vagy több sem, hisz a szabályos ötszög szomszédos oldalai 108°-os, a szabályos hatszögéi 120°-os szöget zárnak be, és már $4 \cdot 108°$ is nagyobb 360°-nál. Így minden csúcsba három él fut be, ezért $5l_5 + 6l_6$ egyfelől az élszám kétszerese, másfelől a csúcsok számának háromszorosa. Ezenkívül a lapok egymáshoz való viszonyából $5l_5 = 3l_6$ is adódik (az ötszögek mentén körbejárva mindegyik hatszöget háromszor számoljuk). Így $5l_5 + 6l_6 = 15l_5 = 2e = 3n$ miatt $e = \frac{15}{2}l_5, n = 5l_5, l = \frac{8}{5}l_5$. Az Euler-formulába helyettesítve $l_5 = 12, l_6 = 20, n = 60$ és $e = 90$.

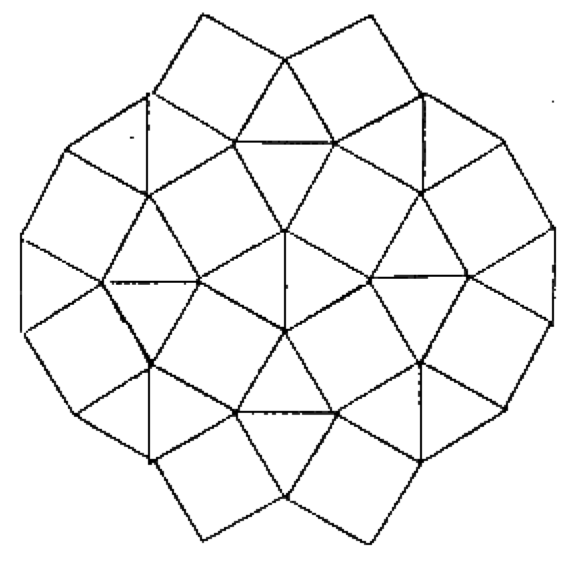
16. *Létezik-e szabályos háromszögekkel és négyzetekkel határolt konvex test, ha*

(a) minden négyzetet négy háromszög, minden háromszöget két négyzet és egy háromszög határol, ill. ha

(b) a háromszögeket csak négyzetek határolják, a négyzeteket felváltva háromszögek és négyzetek.

Megoldás: (a) Ha az ABC háromszög az AB oldala mentén szomszédos egy másik, ABD háromszöggel, akkor a BC és a BD oldalakhoz illeszkedő négyzeteknek szomszédosaknak kell lenniük, mert ha az E_1, E_2 pontok (ld. a baloldali ábrát) különbözőek lennének, akkor az E_1BE_2 szög legalább 60° lenne, és akkor a B csúcsnál a szögösszeg 360° lenne (vagyis a négyzetek és a háromszögek nem egy poliéder lapjai lennének, hanem a síknak egy "parkettázását" adnák, ld. a jobboldali ábrát). Ha viszont a négyzetek szomszédosak lennének, ez ellentmondana a feladat kitűzésének (minden négyzetet négy háromszög határol), tehát ilyen konvex test nem létezhet.





(b) Ilyen konvex test létezik, az olyan szabályos háromszög alapú hasáb, melynek oldallapjai négyzetek.

17. *A K_{11} teljes gráf élhalmazát két részre osztottuk. Lehetséges-e, hogy mindkét rész síkbarajzolható gráfot határoz meg?*

Megoldás: Ha lehetséges lenne, akkor mindkét gráfnak legfeljebb $3n-6=27$ éle lehetne, viszont a teljes gráfnak $\binom{11}{2}=55>2\cdot 27$ éle van, ezért nem lehet mindkét gráf síkbarajzolható.

18. *Legalább hány pontja van egy síkbarajzolható, 4-reguláris egyszerű gráfnak?*

Megoldás: Egy 4-reguláris egyszerű gráfban legalább 5 pont kell, hogy legyen, de $n=5$-re a K_5 gráfot kapnánk, ami nem síkbarajzolható. Így $n\geq 6$ következik és $n=6$ lehetséges is, ld. az oktaéder élhálóját az 1. feladatnál.

19. *Egy* szabályos test *minden lapja egybevágó szabályos n-szög, minden csúcsánál d lap találkozik ($d\geq 3$).*

(a) Bizonyítsuk be, hogy $n<6$ (vagyis hogy az egybevágó sokszögeknek legfeljebb öt oldala lehet)!

(b) Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{n}+\frac{1}{d}>\frac{1}{2}$.

(c) Bizonyítsuk be, hogy az 1. feladatban szereplő öt testen kívül más szabályos test nem létezhet!

Megoldás: (a) Legyen α_n a szabályos n-szög szomszédos oldalai által bezárt szög. Mivel minden csúcsnál d lap találkozik, $d\alpha_n<360°$ (hisz a lapok nincsenek egy síkban), tehát $d\geq 3$ miatt $\alpha_n<120°$. Másfelől bármely n-szög szögeinek összege $(n-2)180°$, tehát $\alpha_n=\frac{(n-2)180°}{n}$, amiből $n<6$ adódik.

(b) Mind az l lapot n él határolja és mind a p csúcshoz d él illeszkedik, tehát az e élszám kétszeresére $ln=dp=2e$. Az innét nyerhető $l=\frac{2}{n}e, p=\frac{2}{d}e$ kifejezéseket az Euler-formulába helyettesítve $\frac{1}{n}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}>\frac{1}{2}$ adódik.

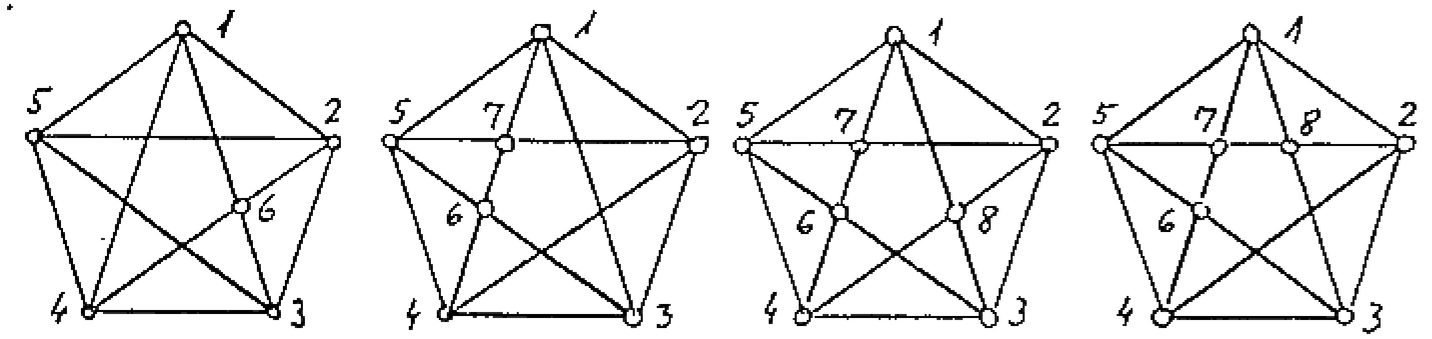
(c) Tudjuk, hogy $3\leq n\leq 5$ (a felső becslést (a)-ból kaptuk).

- Ha $n=3$, akkor (b)-ből $\frac{1}{3}+\frac{1}{d}>\frac{1}{2}$ miatt $3\leq d\leq 5$. E három d értékre rendre a tetraéder, az oktaéder, ill. az ikozaéder adódik.

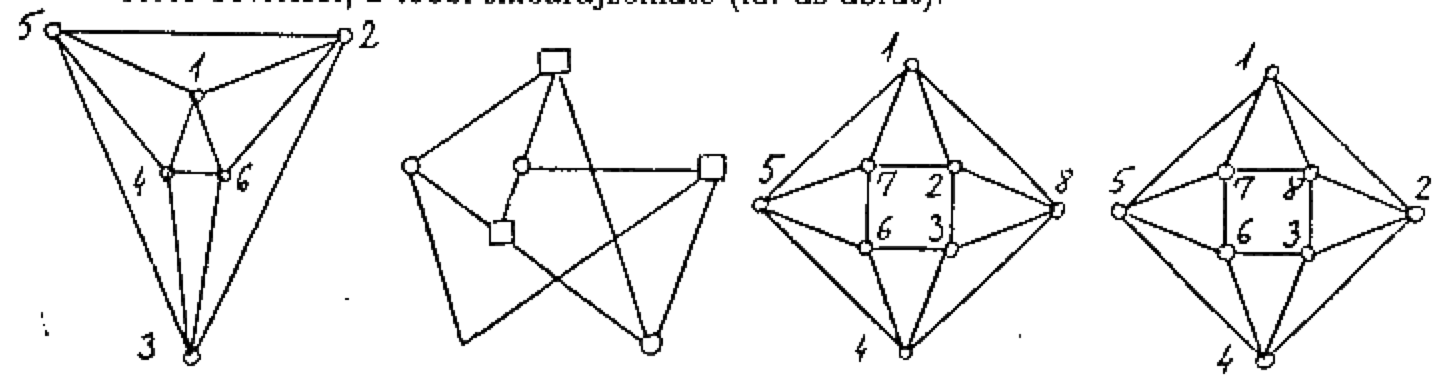
- Ha $n=4$, akkor $\frac{1}{4}+\frac{1}{d}>\frac{1}{2}$ miatt $d<4$, vagyis a kockához jutunk.
- Végül ha $n=5$, akkor $\frac{1}{5}+\frac{1}{d}>\frac{1}{2}$ miatt $d<\frac{10}{3}$, tehát itt is csak $d=3$ lehet és így kapjuk meg a dodekaédert.

2 Kuratowski-tétel, Fáry–Wagner tétel

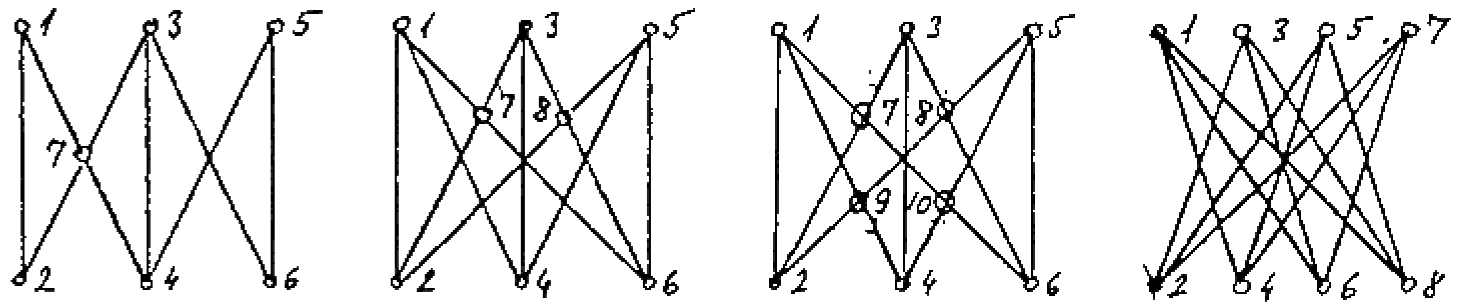
20. *Síkbarajzolhatóak-e az alábbi gráfok? Ha igen, rajzoljuk le kereszteződés nélkül, egyenes szakaszokkal!*



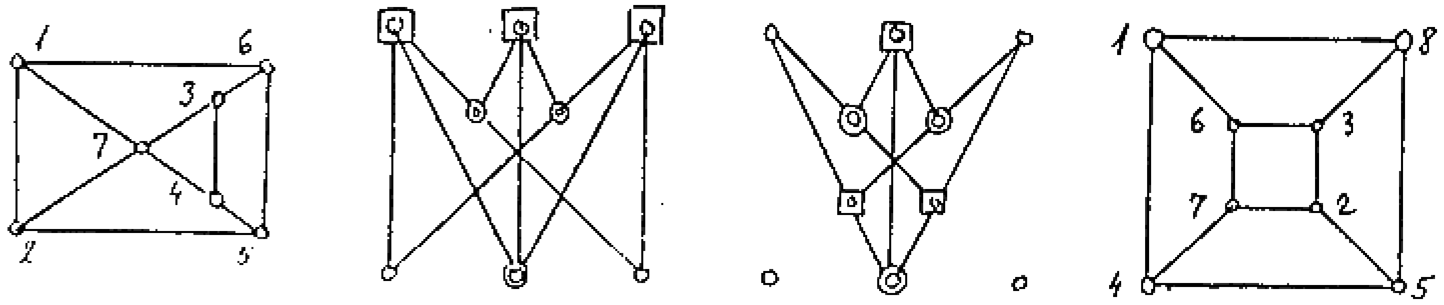
Megoldás: A második gráf nem rajzolható síkba, mert tartalmazza a $K_{3,3}$ soros bővítését, a többi síkbarajzolható (ld. az ábrát).



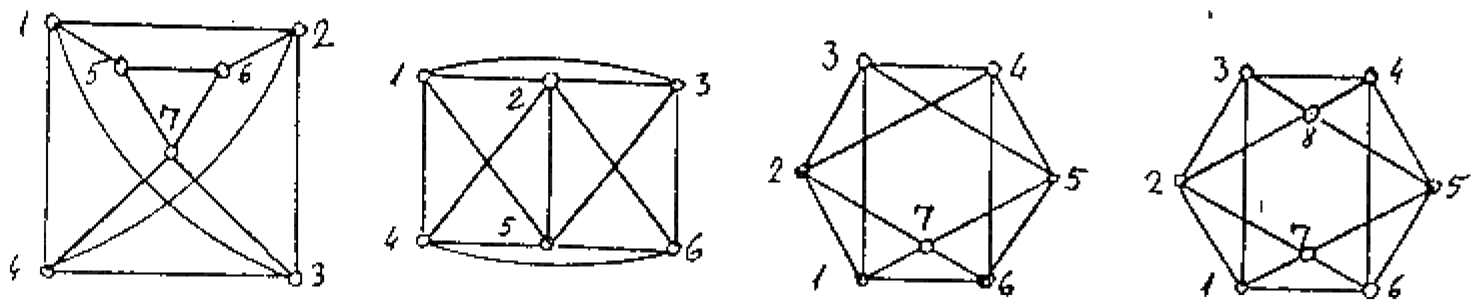
21. *Síkbarajzolhatóak-e az alábbi gráfok? Ha igen, rajzoljuk le kereszteződés nélkül, egyenes szakaszokkal!*



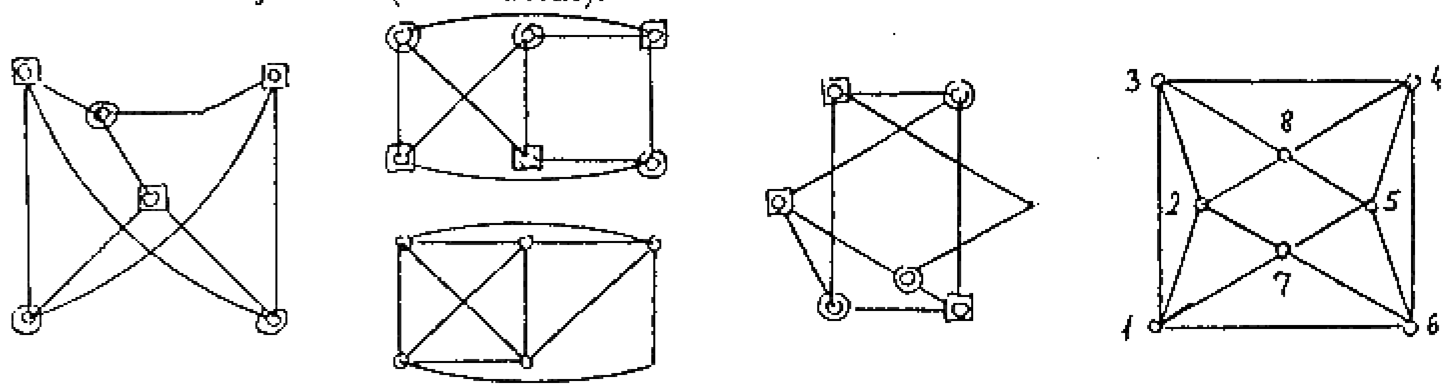
Megoldás: A második és a harmadik gráf nem rajzolható síkba, mert tartalmazzák a $K_{3,3}$ soros bővítését, a többi síkbarajzolható (ld. az ábrát).



22. *Síkbarajzolhatóak-e az alábbi gráfok? Ha igen, rajzoljuk le kereszteződés nélkül, egyenes szakaszokkal!*

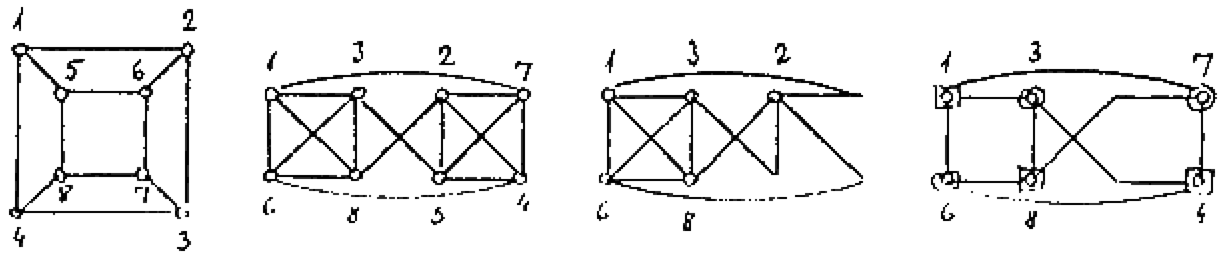


Megoldás: Az első három gráf nem rajzolható síkba, mert tartalmazzák a $K_{3,3}$ gráf soros bővítését (a második a K_5 soros bővítését is), a negyedik síkbarajzolható (ld. az ábrát).



23. *Síkbarajzolható-e a kocka élgráfjának a komplementere? Ha igen, rajzoljuk le kereszteződés nélkül, egyenes szakaszokkal!*

Megoldás: Az ábra bal oldalán látható a kocka élgráfja, majd a komplementere, jobboldalon utóbbinak egy-egy olyan részgráfja, mely a K_5, ill. a $K_{3,3}$ soros bővítése. Tehát a kérdezett gráf nem rajzolható síkba.

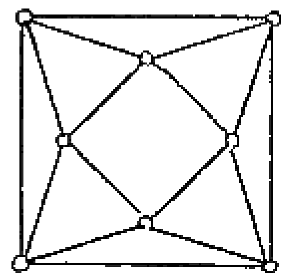


24. *Mutassuk meg, hogy minden 8-élű gráf síkbarajzolható!*

Megoldás: Az esetleges hurok- és többszörös élek eltávolítása után az élek száma legfeljebb 8, márpedig mindkét Kuratowski-gráf és ezek soros bővítései is legalább 9 élt tartalmaznak.

25. *Síkbarajzolható-e az a gráf, melyet egy 8 pontú körből kapunk, ha minden pontot a másodszomszédjaival is összekötünk?*

Megoldás: Igen, ld. az ábrát.



26. *Keressünk olyan 8-pontú gráfot, hogy se ő, se a komplementere ne legyen síkbarajzolható!*

Megoldás: Legyen a gráf a $K_{3,3}$ kibővítve két izolált p, q ponttal. Ekkor a komplementerében a három "ház" és a p, q pontok egy K_5-öt alkotnak.

27. *A G_n gráf pontjai az $1, 2, \ldots, n$ számok és két pont akkor és csak akkor szomszédos, ha a megfelelő számok közül az egyik osztja a másikat. Mutassuk meg, hogy $n \geq 16$ esetén G_n nem síkbarajzolható!*

Megoldás: Az $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ ponthalmaz bármely két pontját össze kell kötnünk, tehát G_n tartalmaz egy K_5 részgráfot, így nem lehet síkbarajzolható.

28. *Létezik-e olyan 6-pontú gráf, hogy se ő, se a komplementere nem síkbarajzolható?*

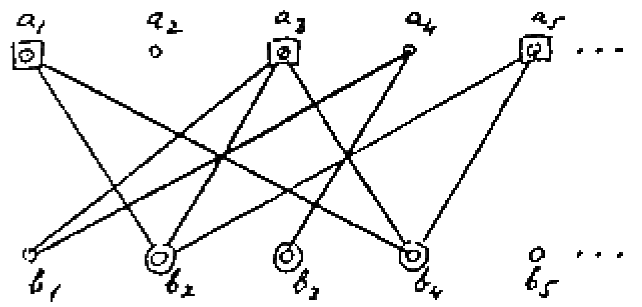
Megoldás: Nem létezik. Egy 6 pontú, síkba nem rajzolható gráf ugyanis

- vagy $K_{3,3}$, és akkor a komplementere két pontdiszjunkt háromszög,
- vagy tartalmazza K_5 soros bővítését, és akkor a komplementere vagy egy 3 élű csillag és egy él pontdiszjunkt uniója, vagy ennek egy részgráfja,
- vagy pedig tartalmaz K_5-öt, és akkor a komplementere vagy egy 5 élű csillag, vagy ennek egy részgráfja.

Mindhárom esetben az eredeti gráf komplementere síkbarajzolható.

29. *Legyen a G_k gráf ponthalmaza $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Az a_i, b_j pontpár akkor és csak akkor szomszédos, ha $i \neq j$, továbbá az a_i, a_j párok és a b_i, b_j párok között nem fut él. Mutassuk meg, hogy G_k akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha $k < 5$ teljesül!*

Megoldás: $k < 4$ esetén G_k triviálisan síkbarajzolható, $k = 4$ esetén épp a 21. feladat utolsó gráfjáról van szó. $k \geq 5$ esetén az ábra mutatja, hogy G_k tartalmazza $K_{3,3}$ soros bővítését.



Definíció: Egy $e = \{u, v\}$ él összehúzása azt jelenti, hogy az e élt elhagyjuk és az u, v pontokat azonosítjuk. Egy G gráfból néhány (esetleg nulla) él elhagyása és néhány (esetleg nulla) más él összehúzása során keletkező gráfokat a G minorjainak nevezzük.

30. *Bizonyítsuk be Wagner tételét: Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz olyan minort, mely izomorf a Kuratowski-gráfok valamelyikével.*

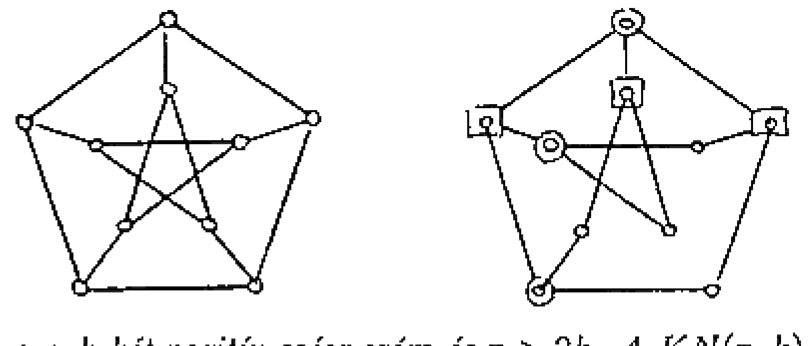
Megoldás: A feltétel szükséges, hisz az elhagyáshoz hasonlóan az összehúzás sem vezethet ki a síkbarajzolható gráfok köréből. Az elégségességhez indirekt tegyük fel, hogy G nem síkbarajzolható. Ekkor Kuratowski tétele szerint néhány (esetleg nulla) él elhagyásával olyan G' gráfhoz jutnánk, mely vagy valamelyik Kuratowski-gráf (a. eset), vagy azok egyikének egy soros bővítése (b. eset). Mindkét esetben G'-ből néhány (b. eset) vagy nulla (a. eset) él összehúzásával egy Kuratowski-gráfhoz jutnánk, ami ellentmondás.

31. *Wagner tételének felhasználásával adjunk egyszerűbb új megoldást a 23. feladatra!*

Megoldás: Az eredeti megoldáshoz tartozó ábra második gráfjában húzzuk össze a $(2, 5, 4, 7)$ kör éleit és hagyjuk el a keletkező hurokéleket. Egy K_5 gráfhoz jutunk.

32. *Adjunk példát arra, hogy egy K_5 minort tartalmazó gráf nem feltétlenül tartalmaz olyan részgráfot, mely K_5-tel vagy annak egy soros bővítésével lenne izomorf!*

Megoldás: Az alábbi ábra baloldalán látható ún. Petersen-gráf tartalmaz K_5 minort (húzzuk össze a külső ötszöget és a belső csillagötszöget összekötő öt élt), de semelyik részgráfja nem lehet K_5-tel vagy annak egy soros bővítésével izomorf, hisz minden pontja harmadfokú. Így persze Kuratowski tétele szerint kell, hogy valamelyik részgráfja $K_{3,3}$-mal vagy annak egy soros bővítésével legyen izomorf, ezt az ábra jobboldalán láthatjuk.



33. *Legyen n, k két pozitív egész szám és $n > 2k$. A $KN(n, k)$ ún.* Kneser-gráfot *úgy definiáljuk, hogy pontjai az n-elemű halmaz k-elemű részhalmazai és két pont akkor és csak akkor szomszédos, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. Síkbarajzolhatóak-e az alábbi Kneser-gráfok?*

(a) $KN(5, 2)$

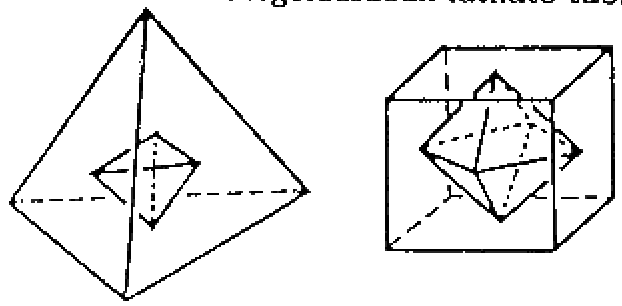
(b) $KN(6,2)$, ill. általában $KN(2k+2,k)$

Megoldás: Az (a) esetben a Petersen-gráfhoz jutunk, ami nem rajzolható síkba (ld. az előző feladatot). A (b) esetben a $KN(2k+2,k)$ gráf minden pontja $\binom{k+2}{k} = \binom{k+2}{2} = (k+2)(k+1)/2$ fokú. Mivel ez a szám legalább 6, ha $k \geq 2$, a **3.** feladat szerint ezek sem lehetnek síkbarajzolhatóak. Ha $k = 1$, akkor a $KN(4,1)$ gráf a K_4 teljes gráffal izomorf, tehát természetesen síkbarajzolható.

3 Dualitás

34. *Határozzuk meg a tetraéder és a kocka élgráfjának a duálisát!*

Megoldás: Az ábrából látható, hogy a kockából az oktaéderhez jutunk (gondoljuk végig, hogy fordítva az oktaéder duálisa ismét a kocka lenne), míg a tetraéder önmagának duálisa. (Megmutatható az is, hogy a dodekaéder és az ikozaéder is egymás duálisai. Ez indokolja az **1.** feladat ábráinak sajátos elrendezését és az **1.** feladat megoldásában látható táblázat tagolását is.)

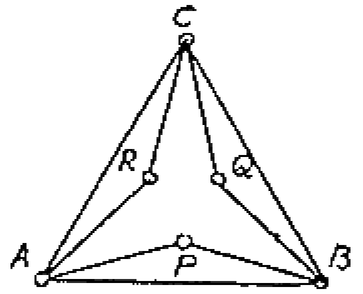


35. *Két síkbarajzolható gráf egymás duálisa, az egyik lerajzolásakor minden tartomány négyszög (a külső is), a másikon mindegyik háromszög. Hány pontjuk és hány élük van?*

Megoldás: Legyen az első gráf pontjainak, éleinek és tartományainak a száma rendre n, e és t. Egyrészt $4t = 2e$, másrészt $3n = 2e$ (mert minden pontja harmadfokú). Az Euler-formula szerint ezért $e = 12, n = 8, t = 6$. A másik gráfra hasonlóan $e = 12, n = 6, t = 8$. (A két gráf egyébként a kocka, ill. az oktaéder élhálója, ld. az **1.** feladatot).

36. *Egy síkbarajzolható gráfnak és a duálisának is minden tartománya háromszög. Melyek lehetnek ezek a gráfok?*

Megoldás: Mindkét gráf a K_4 teljes gráf. Ha ugyanis az egyik gráf külső tartományát határoló ABC háromszög éleire illeszkedő további ABP, BCQ, CAR háromszögekre (ld. az ábrát) P, Q, R közül lenne két különböző pont, akkor A, B, C közül legalább az egyik negyedfokú lenne, és akkor a duális gráfban nem lehetne minden tartomány háromszög.



37. *Egy nemzetközi konferencián egy asztalnál öt különböző ország egy-egy képviselője ül. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos!*

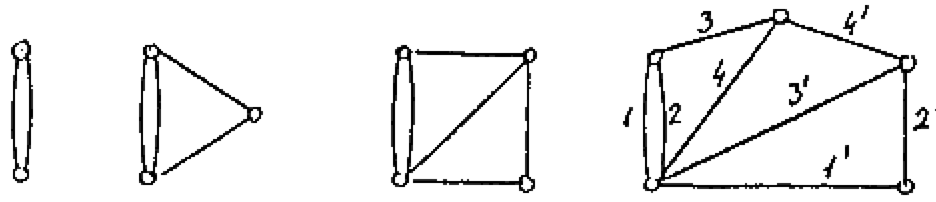
Megoldás: Az országok egy síkbarajzolható gráf tartományai. Ha az állítás nem lenne igaz, akkor ennek a gráfnak a duálisa tartalmazna egy K_5 részgráfot, tehát nem lehetne síkbarajzolható.

38. *Egy nemzetközi konferencián az elnökségbe csak olyan küldöttek választhatók, akiknek az országa legalább hat másik jelenlevő országgal szomszédos. Mutassuk meg, hogy van olyan küldött, aki biztosan nem választható be az elnökségbe!*

Megoldás: Az országok egy síkbarajzolható G gráf tartományai. Ha az állítás nem lenne igaz, G^* minden pontja legalább hatodfokú lenne, ami síkbarajzolható egyszerű gráfoknál lehetetlen (ld. a **3.** feladatot). Elvileg elképzelhető, hogy G^* nem egyszerű, de akkor G tartományai között olyan országok is vannak, melyeknek csak egy vagy két szomszédja van (pl. San Marino, ill. Andorra), és akkor az állítás nyilvánvaló.

39. *Mutassunk példát a duálisukkal izomorf gráfokra!*

Megoldás: Az ábrán látható sorozat minden eleme ilyen. Az utolsón úgy neveztük el az éleket, hogy könnyű legyen ellenőrizni a duálisával való izomorfiát.



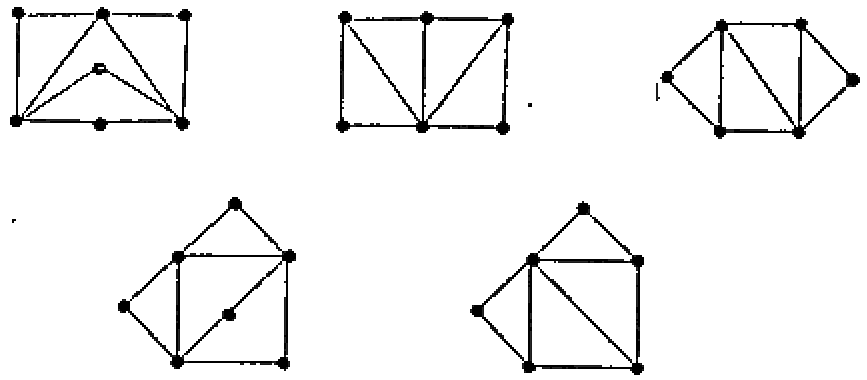
40. *Mutassuk meg (Whitney tételére való hivatkozás nélkül, pusztán a duális tulajdonság-párokra hivatkozva), hogy a Kuratowski-gráfoknak (K_5 és $K_{3,3}$) nem lehet duálisa!*

Megoldás: Idézzük fel, hogy ha F egy síkbarajzolható gráf fája, akkor a neki megfelelő élhalmaz a duális gráfban egy fa komplementere lesz. K_5-nek 10 éle, 5 pontja és minden fájának 4 éle van. Ha lenne duálisa, annak fái $10 - 4 = 6$ élűek lennének, tehát a gráf 7 pontú lenne. A hét pont fokszámának összege $2 \cdot 10 = 20$ lenne, vagyis nem lehetne minden pont legalább harmadfokú. Ez azt jelenti, hogy tartalmazna 3-nál kevesebb élű vágást, vagyis a duálisa (tehát K_5) nem lenne egyszerű.

Hasonlóképpen $K_{3,3}$ duálisának 5 pontja és 9 éle lenne. Az egyszerű gráfok körében az egyetlen ilyen gráfot a K_5-ből kaphatnánk egy él elhagyásával, de arról ellenőrizhető, hogy annak a $K_{3,3}$ gráf nem duálisa.

4 Gyenge izomorfia (2-izomorfia)

41. *Keressünk izomorf és gyengén izomorf párokat az ábrán látható gráfok között!*

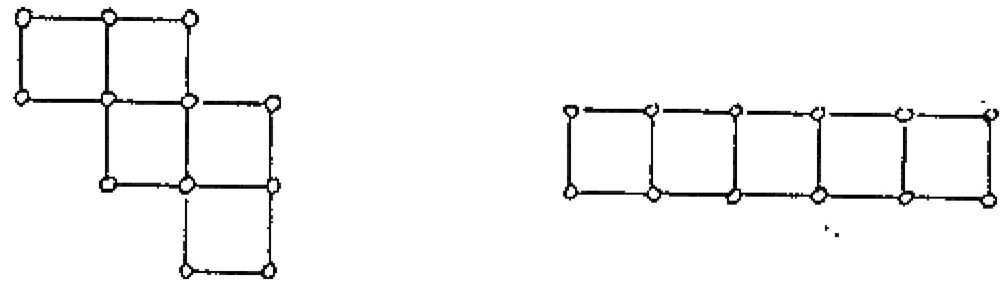


Megoldás: Az első és a negyedik gráf izomorf (vegyük azonban észre, hogy az adott rajzhoz tartozó geometriai duálisaik csak gyengén izomorfak). A másik három gráf egymással gyengén izomorf (és a duálisaik izomorfak), sőt, a második és az ötödik izomorfak is. Az először említett két gráf és az utóbbi három egymással nem izomorf (ez onnan látszik, hogy pl. az első gráfban 3 darab kételemű vágás van, háromelemű vágás pedig egy sem, míg a második gráfban csak 2 kételemű vágás van, viszont háromeleműek is találhatóak).

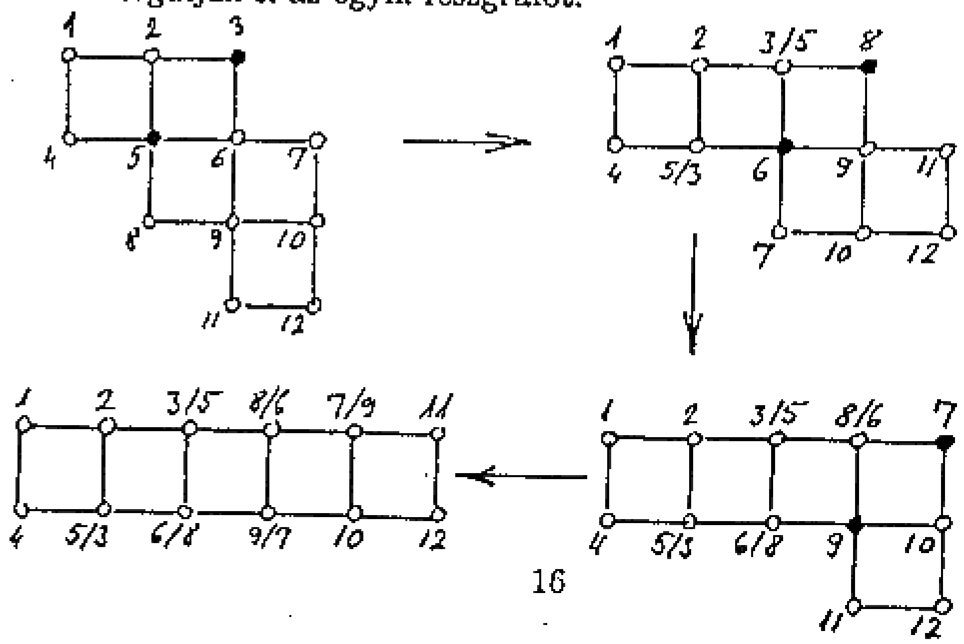
42. *Bizonyítsuk be, hogy bármely két n-pontú fa gyengén izomorf!*

Megoldás: Nyilván ugyanannyi élük van, így létesíthető az élhalmazaik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. *Bármelyik* ilyen megfeleltetés jó lesz, hisz egy fában semmilyen élhalmaz nem alkot kört és pontosan az egyelemű élhalmazok alkotnak vágást (azok viszont mind).

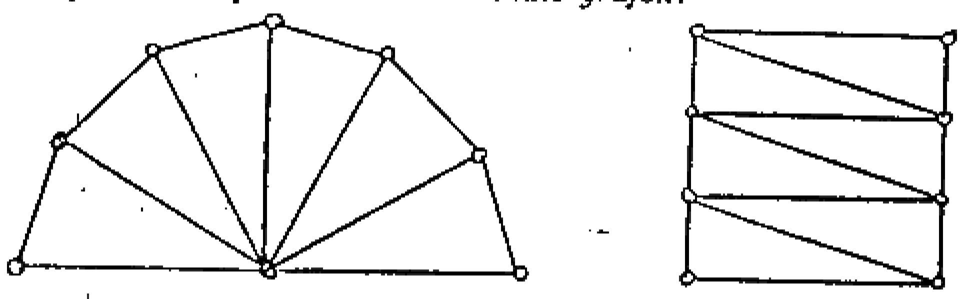
43. *2-izomorfak-e az ábrán látható gráfok?*



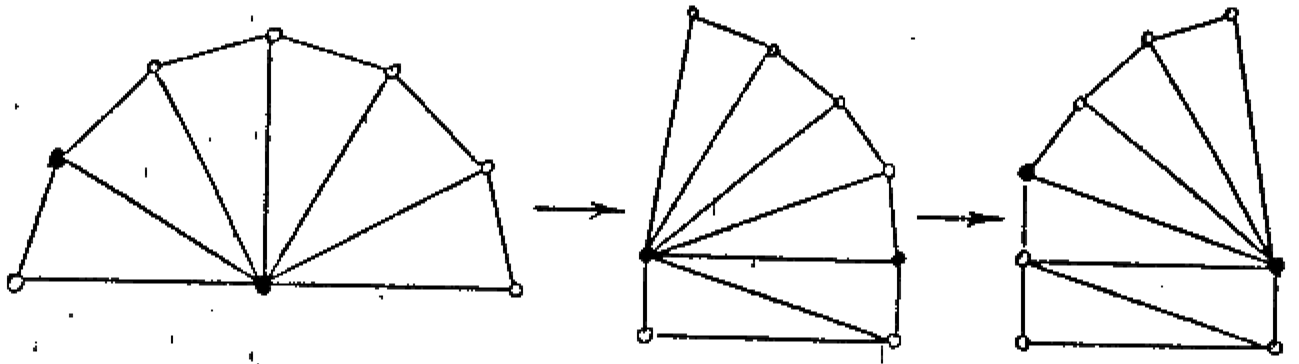
Megoldás: Igen, az ábrasorozat mutatja, hogy juthatunk az első gráfból a másodikba úgy, hogy mindig egy kételemű elvágó ponthalmaz két eleme mentén forgatjuk el az egyik részgráfot.



44. *Gyengén izomorfak-e az ábrán látható gráfok?*

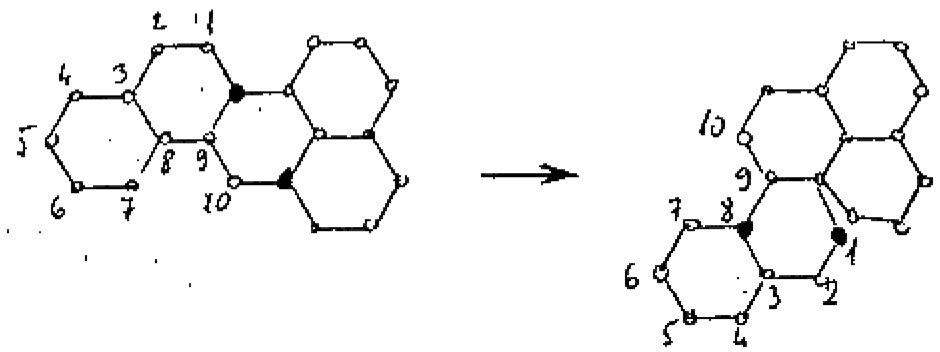


Megoldás: Igen, az első két lépés az ábrán látható.



45. *Gyengén izomorfak-e az ábrán látható gráfok?*

Megoldás: Igen, az első lépés az ábrán látható.



46. *Mutassunk példát olyan G_1, G_2 gráfokra, melyek gyengén izomorfak és melyekre $\Delta(G_2) - \Delta(G_1) = 100$ teljesül. ($\Delta(G)$ jelöli a G gráf maximális fokszámát.)*

Megoldás: Legyen G_1 egy 102-élű út, G_2 pedig egy ugyanennyi élű csillag! Ez jó példa (a **42.** feladatban láttuk, hogy az azonos pontszámú fák mind gyengén izomorfak).

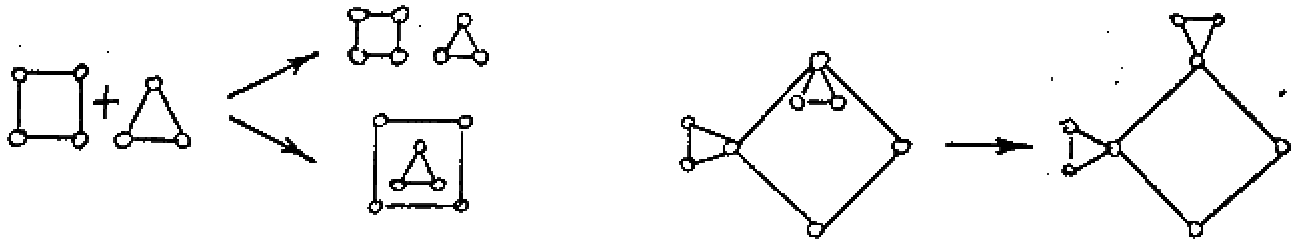
5 Egyéb feladatok

47. *Mutassuk meg, hogy ha egy síkbarajzolható gráfnak van zárt Euler-vonala, akkor a duálisa páros gráf!*

Megoldás: A gráfunknak ilyenkor minden pontja páros fokú. Ekkor minden vágása is páros sok élt tartalmaz (az egyik oldalra kerülő pontok fokszámösszegéből vonjuk le ezen oldal pontjai között futó élek számának kétszeresét). Így a duális gráfban minden kör hossza páros. Mivel egy gráf akkor és csak akkor páros, ha minden köre páros hosszúságú, ezzel az állítást beláttuk.

48. *Bizonyítsuk be, hogy egy kétszeresen összefüggő síkbarajzolható gráf duálisa is kétszeresen összefüggő!*

Megoldás: Ha egy síkbarajzolható gráf nem összefüggő és komponenseit külön-külön síkbarajzoljuk, akkor ezek a síkbarajzolások úgy is egymás mellé helyezhetőek, hogy az egyes komponensek *korlátos* tartományai az új lerajzolásnak is tartományai maradjanak. (A baloldali ábra felül egy "jó", alul egy "rossz" egymás mellé helyezést mutat.) Ugyanígy egy összefüggő, de nem kétszeresen összefüggő gráf is átrajzolható úgy, hogy az egyes kétszeresen összefüggő komponenseinek korlátos tartományai az egész rajznak tartományai maradjanak (ld. a jobboldali ábrát).



Mármost ha G^* nem volna kétszeresen összefüggő, akkor rajzoljuk át a fenti értelemben "jó" alakba. A külső tartományának G-ben megfelelő pont elvágó pont lesz, ami kétszeresen összefüggő gráf esetén lehetetlen.

49. *Lehet-e egy hatszorosan összefüggő gráf síkbarajzolható?*

Megoldás: Nem, hisz minden pontja – még az esetleges hurokélek és többszörös élek nélkül is – legalább hatodfokú lenne, és akkor a **3.** feladat szerint nem lehetne síkbarajzolható.

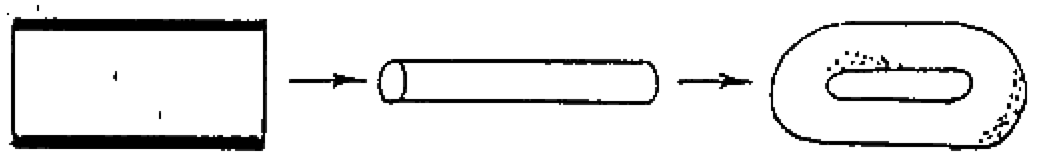
50. *Lehetséges-e, hogy két gyengén izomorf gráf közül az egyiknek van Hamilton-köre, a másiknak nem?*

Megoldás: Nem. Tegyük fel, hogy az első gráfban van Hamilton-kör. Ekkor ez a gráf nyilván kétszeresen összefüggő. Ha háromszorosan is összefüggő, akkor a másik gráf izomorf vele, tehát annak is van Hamilton-köre. Ha nem, akkor Whitney tétele miatt a második gráf az elsőből pontpárokon keresztül való átfordításokkal megkapható. Mivel minden átfordítás során a Hamilton-kört két részre vágjuk és az egyik oldalát megfordítva visszaillesztjük, utána is marad Hamilton-kör. Így a kérdésre a válasz mindenképp nemleges.

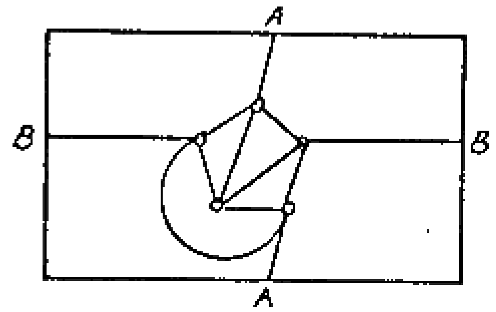
Megjegyzés: Az első gráf Hamilton-körét alkotó élek a gyenge izomorfia miatt a második gráfban is egy C kört alkotnak. Önmagában ebből azonban még nem következik, hogy C a második gráfban Hamilton-kör, mert két gyengén izomorf gráf pontjainak a száma lehet különböző, tehát mindenképp ki kell használni a gráfok kétszeres összefüggőségét.

6 A síkbarajzolhatóságnál általánosabb fogalmak

51. *Ha egy téglalap két szemközti (az ábrán megvastagított) élét azonosítjuk, egy hengerpalásthoz jutunk, ha annak a két szemközti határoló körét azonosítjuk, akkor egy "mentőöv"-szerű felülethez, az ún.* **tóruszhoz.** *Mutassuk meg, hogy a K_5 gráf kereszteződés nélkül felrajzolható a tóruszra!*

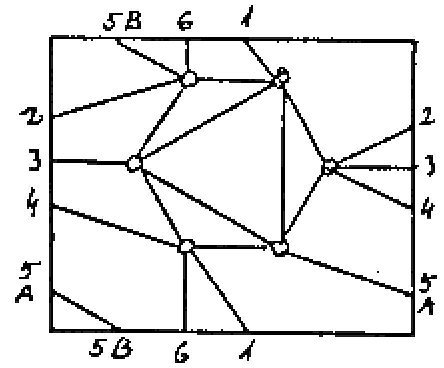


Megoldás: Az ábrán egy olyan rajz látható, melyet a szemközti élek, ill. körök azonosítása előtt helyeztünk el a téglalapon. A két A jelű, ill. a két B jelű pont azonosításával épp a K_5 lerajzolását fejeztük be.



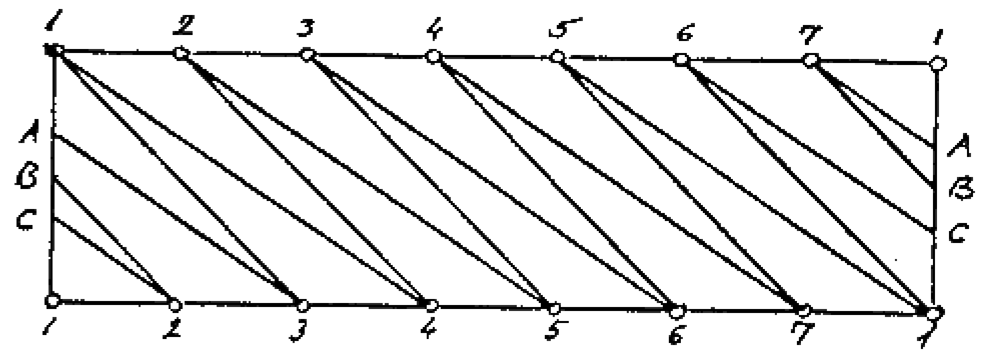
52. *Mutassuk meg, hogy még a K_6 gráf is kereszteződés nélkül felrajzolható a tóruszra!*

Megoldás: Ld. az ábrát, most is az eredeti téglalapon.

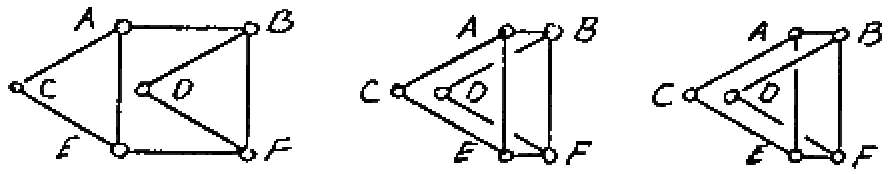


53. *Mutassuk meg, hogy még a K_7 gráf is kereszteződés nélkül felrajzolható a tóruszra!*

Megoldás: Ld. az ábrát, most is az eredeti téglalapon.



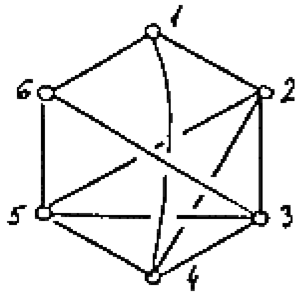
54. *A baloldali ábrán egy gráfot úgy rajzoltunk síkba, hogy élei ne keresztezzék egymást. A másik két ábra között az a különbség, hogy a D pont "jobbra mozgatásával" a középső ábrán megszüntethetőek az élkereszteződések, míg a jobboldalin az ACE és a BDF körök "egymásba hurkolódnak". Nevezzünk egy gráfot* **hurkolásmentesen beágyazhatónak**, *ha létezik olyan lerajzolása, melyben nincsenek egymásba hurkolódó pontdiszjunkt körök. Gondoljuk végig, hogy a síkbarajzolható gráfok mind ilyenek!*



Megoldás: Az állítás nyilvánvaló, hisz ha egy gráf élek keresztezése nélkül lerajzolható a síkba, akkor azon a rajzon bármely két pontdiszjunkt kör vagy diszjunkt tartományokat zár be, vagy az egyikük által tartalmazott korlátos tartományt a másik kör is körbeveszi.

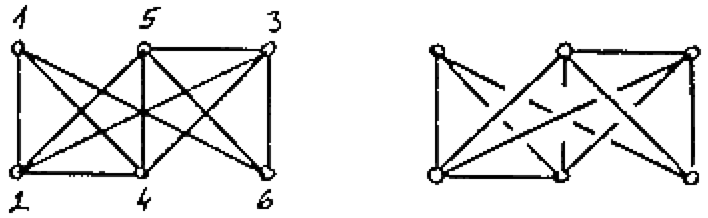
55. *(a) Mutassuk meg, hogy az ábrán látható beágyazás nem hurkolásmentes!*

(b) Bizonyítsuk be, hogy ugyanez a gráf – bár nem síkbarajzolható –, hurkolásmentesen is beágyazható!



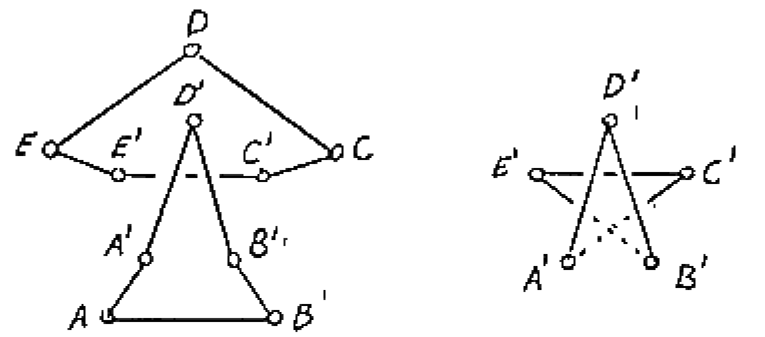
Megoldás: Az (a) állítás igazolásához elég észrevennünk, hogy az $(1,2,4)$ és a $(3,5,6)$ körök egymásba hurkolódnak. Ha a gráfot a baloldali ábrán látható módon újra lerajzoljuk, azonnal látszik, hogy tartalmazza a $K_{3,3}$ részgráfot, tehát nem síkbarajzolható. Ha két pontdiszjunkt kört keresünk benne, azok nyilván három hosszúságúak (hisz a gráfnak összesen is csak 6 pontja van), és mivel a két kör egyike a $\{2,4\}$, másika a $\{3,5\}$ élt kell, hogy tartalmazza, az egyetlen lehetőség a fent látott $(1,2,4)$, $(3,5,6)$ körpár.

Ezek után könnyű egy hurkolásmentes beágyazást találni, ld. pl. a jobboldali ábrát.



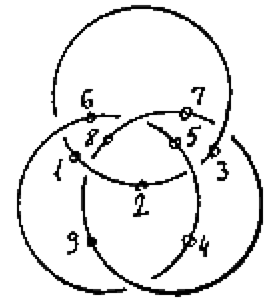
56. *Bizonyítsuk be, hogy a Petersen-gráfot nem lehet hurkolásmentesen beágyazni!*

Megoldás: A baloldali ábra jelölését használva a D' pontból kiindulva megállapíthatjuk, hogy a $\{C', E'\}$ él vagy mind az $\{A', D'\}$, mind a $\{B', D'\}$ alatt halad (mint az ábrán), vagy mindkettő fölött, hisz különben egymásba hurkolódnának az (A, A', D', B', B) és a (C, C', E', E, D) körök. Alkalmazzuk ezt az észrevételt az $\{A', B', C', D', E'\}$ pontok által meghatározott csillagötszög C' és E' pontjaiból kiindulva is! A jobboldali ábrán azonnal látszik, hogy az $\{A', C'\}$ és a $\{B', E'\}$ élek egyike sem haladhat a másik alatt.



57. *Az 54. feladat középső ábrája pontok folytonos mozgatásával átvihető volt a gráf egy "szokásos" síkbarajzolásába. Létezhet-e síkbarajzolható gráfnak olyan hurkolásmentes beágyazása, melyre ez nem lehetséges?*

Megoldás: Igen, ld. az ábrát. Az $(1,2,3)$ kör teljes terjedelmében a $(4,5,6)$ kör alatt, utóbbi pedig teljes terjedelmében a $(7,8,9)$ kör alatt halad, végül ez utóbbi teljes terjedelmében az $(1,2,3)$ alatt. Így a három kör közül semelyik kettő nem hurkolódik egymásba, ennek ellenére a pontok folytonos mozgatásával nem juthatnánk el diszjunkt lerajzolásukba.



7 A síkbarajzolhatóságnál speciálisabb fogalmak

Definíció: Nevezzünk körvonalra rajzolhatónak egy gráfot[2], ha úgy is lerajzolható a síkba élkereszteződések nélkül, hogy minden pontja a külső, nem korlátos tartományt határoló körön fekszik.

58. *A $K_3, K_4, K_5, K_{2,2}, K_{2,3}, K_{3,3}$ gráfok közül melyek rajzolhatóak körvonalra?*

Megoldás: Az első és a negyedik egy-egy kör, azok nyilván ilyenek. A harmadik és az utolsó egyáltalán nem rajzolható síkba. A K_4 és a $K_{2,3}$ gráfok síkbarajzolhatóak, de körvonalra nem (ez próbálkozással látszik, de a következő feladatban be is bizonyítjuk).

59. *Hogy lehetne felismerni a körvonalra rajzolható gráfokat egy, a "közönséges" síkbarajzolhatóságot felismerő algoritmus segítségével?*

Megoldás: Egy gráf nyilván akkor és csak akkor lesz körvonalra rajzolható, ha hozzávéve egy olyan pontot, melyet minden más ponttal összekötünk, a keletkezett gráf még síkbarajzolható marad. Ez pedig az algoritmussal ellenőrizhető.

Ebből egyébként azonnal adódik, hogy az előző feladatban látott $K_4, K_{2,3}$ gráfok körvonalra nem rajzolhatóak, hisz egy pont hozzávételével a K_5-öt, illetve egy, a $K_{3,3}$-at részgráfként tartalmazó gráfot kapnánk.

60. *Példákon szemléltessük, hogy – a síkbarajzolható gráfok osztályával ellentétben – a körvonalra rajzolható gráfok osztályából kivezethet a soros bővítés és a dualitásképzés!*

Megoldás: Legyen G_1 egy négy élű kör egy átlójával és G_2 egy olyan három élű kör, melynek mindhárom élét 2–2 párhuzamos éllel helyettesítettük. Nyilván mindkettő körvonalra rajzolható, ugyanakkor ha G_1 átlóját sorosan bővítjük vagy G_2 duálisát képezzük, akkor a $K_{2,3}$ gráfot kapjuk, amelyről láttuk, hogy nem ilyen.

[2] A fogalomnak nincs elterjedt magyar neve, angolul 'outerplanar graph'.

61. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf körvonalra rajzolható, akkor nem tartalmazhatja részgráfként a K_4 és a $K_{2,3}$ részgráfokat vagy ezek soros bővítését!*

Megoldás: Az állítás nyilvánvaló, hisz a fenti két gráfról láttuk, hogy rosszak és a körvonalra rajzolható gráfok osztályából nem vezet ki a részgráf képzés vagy a soros összehúzás (sőt, a tetszőleges összehúzás sem).

62. *Az előző feladat feltétele elégséges is a körvonalra rajzolhatósághoz?*

Megoldás: Igen. Legyen ugyanis G egy körvonalra nem rajzolható gráf. Két esetet különböztessünk meg.

Ha G egyáltalán nem síkbarajzolható, akkor tartalmaz egy olyan H részgráfot, mely az egyik Kuratowski-gráffal vagy annak soros bővítésével izomorf. Legyen ennek P egy tetszőleges 2-nél magasabb fokú pontja.

Ha G síkbarajzolható, csak körvonalra nem, akkor G-hez hozzávéve egy P pontot, melyet minden más ponttal összekötünk, egy síkba nem rajzolható gráfhoz jutunk és ennek létezik egy olyan H részgráfja, mely valamelyik Kuratowski-gráffal vagy annak soros bővítésével izomorf. Ebben az esetben P pont nyilván H-nak egy nem másodfokú pontja, hisz az eredeti G gráf még síkbarajzolható volt.

Mindkét esetben H-ból elhagyva a P pontot, a hozzá illeszkedő éleket (és az esetleges ezután keletkező elsőfokú pontokat), az eredeti G gráfnak egy olyan részgráfjához jutunk, mely épp a K_4 vagy $K_{2,3}$ gráfok egyikével (vagy valamelyikük soros bővítésével) izomorf.

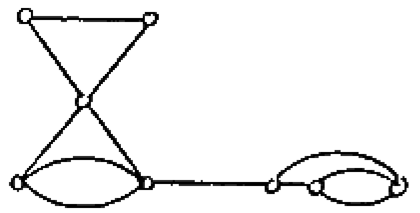
63. *Milyen tulajdonsághoz jutnánk, ha csak a $K_{2,3}$ részgráfokat és soros bővítéseiket zárnánk ki?*

Megoldás: Nyilván azt kell végiggondolnunk, hogy mi lesz, ha K_4 vagy annak soros bővítése még megengedett. Ha K_4-nek akárcsak egyetlen élét sorosan bővítjük, akkor a keletkezett gráfban már lesz $K_{2,3}$-mal vagy annak soros bővítésével izomorf részgráf. Így ha egy $K_{2,3}$-at és soros bővítéseit nem tartalmazó gráf nem tartozik a körvonalra rajzolható gráfok osztályába, akkor minden, nem ebbe az osztályba tartozó kétszeresen összefüggő komponense épp K_4.

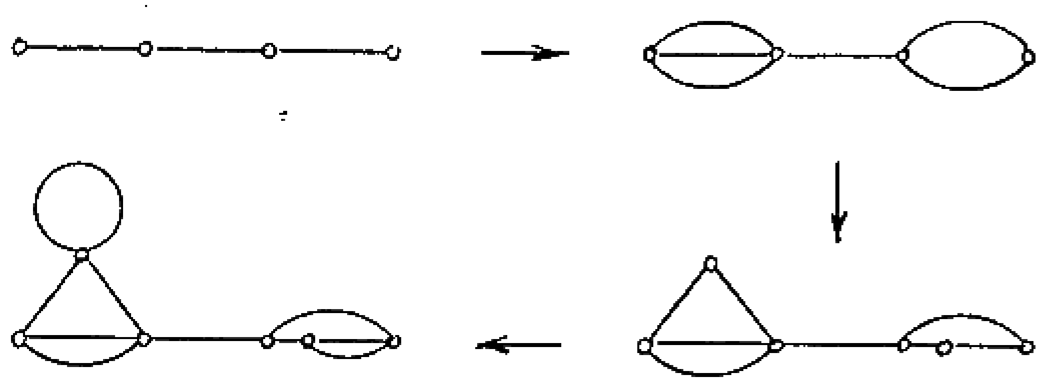
Ezt úgy is mondhatjuk, hogy egy kétszeresen összefüggő, legalább 5 pontú gráf akkor és csak akkor körvonalra rajzolható, ha $K_{2,3}$-at és soros bővítéseit nem tartalmazza.

Definíció: Egy gráfot soros-párhuzamosnak nevezünk, ha közönséges és hurokélek hozzáadásával, valamint élek soros vagy párhuzamos bővítésével előállítható egy erdőből.

64. *Mutassuk meg, hogy az alábbi gráf soros-párhuzamos!*



Megoldás:



65. *Mutassuk meg, hogy a K_4 gráf nem soros-párhuzamos!*

Megoldás: Ha az előző feladatban leírt műveletekkel megkonstruálható egy gráf, akkor az utolsó lépés után vagy nem kétszeresen összefüggő, vagy vannak benne soros vagy párhuzamos élek. Mivel K_4 egyszerű gráf (tehát nincsenek benne párhuzamos élek), minden pontja harmadfokú (tehát soros élek sincsenek benne) és kétszeresen összefüggő, így nem lehet soros-párhuzamos.

Megjegyzések: Belátható, hogy egy gráf akkor és csak akkor soros-párhuzamos, ha nem tartalmazza részgráfként K_4-et vagy annak soros bővítését. Wagner tételének analógiájaképp úgy is jellemezhetőek a soros-párhuzamos gráfok, mint amelyek nem tartalmazzák a K_4 gráfot minorként.

66. *Az előző feladat megoldásában szereplő megjegyzések felhasználásával mutassuk meg, hogy a soros-párhuzamos gráfok mind síkbarajzolhatóak és a duálisuk is soros-párhuzamos!*

Megoldás: Ha egy G gráf nem síkbarajzolható, akkor tartalmazza valamelyik Kuratowski-gráfot vagy soros bővítését részgráfként. Mivel K_5-ből egy pont elhagyásával K_4-et, $K_{3,3}$-ból pedig egy él elhagyásával K_4 soros bővítését kapjuk, ezért G nem lehet soros-párhuzamos sem.

A második állításhoz tegyük fel, hogy G soros-párhuzamos (tehát síkbarajzolható, így létezik a duálisa), de G^* nem lenne soros-párhuzamos. Ekkor az élhalmazának lenne két olyan diszjunkt A, B részhalmaza, hogy G^*-ból A éleit elhagyva és B éleit összehúzva K_4-hez jutnánk. Ha viszont G-ben az A-nak megfelelő éleket összehúznánk és a B-nek megfelelőket hagynánk el, akkor így K_4 duálisához jutnánk. Mivel K_4 izomorf a saját duálisával, G nem lehetne soros-párhuzamos, ami ellentmondás.