1. feladat (15 pont)
Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását, és az $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást:

$$y' + 3\,y\,\operatorname{ch} x = 3x^2\,\mathrm{e}^{-3\,\operatorname{sh} x}$$

Mo. (H) $y' + 3\,y\,\operatorname{ch} x = 0$ ... $y_H = C\,\mathrm{e}^{-3\,\operatorname{sh} x}$, $C \in \mathbb{R}$ **(5p)**

(I) $y_{ip} = c(x)\,\mathrm{e}^{-3\,\operatorname{sh} x}$ ... $c(x) = x^3$ **(5p)**

$\Longrightarrow$ $y_{iá} = y_H + y_{ip} = C\,\mathrm{e}^{-3\operatorname{sh} x} + x^3\,\mathrm{e}^{-3\operatorname{sh} x}$ **(2p)**
$1 = C + 0 \Longrightarrow C = 1.$ **(3p)**

---

2. feladat (17 pont)
Vezessan be az $u = \dfrac{y}{x}$ új változót az alábbi differenciálegyenletbe, majd határozza meg az általános megoldást! (Elég az implicit alak.)

$$y' = \frac{y^2 - 3xy + 2x^2}{xy - 3x^2}$$

Mo. $u'x + u = y'$. **(3p)** Behelyettesítve: $u'x + u = \dfrac{u^2 - 3u + 2}{u - 3}$ **(4p)** , vagyis

$$u' = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{u-3}, \qquad (\mathbf{3p})$$

aminek általános megoldása

$$\frac{(u-3)^2}{2} = 2\ln|x| + c, \qquad (\mathbf{5p})$$

vagyis az eredeti differenciálegyenlet megoldása:

$$\frac{\left(\frac{y}{x} - 3\right)^2}{2} = 2\ln|x| + c. \qquad (\mathbf{2p})$$

3. feladat (22 pont)
Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y''' + 2y'' + 5y' = 4\mathrm{e}^{-x} + 5x$$

Mo. A $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $0, -1 \pm 2i$ **(3p)** , tehát $y_h = c_1 + e^{-x}(c_2 \cos(2x) + c_3 \sin(2x))$ **(4p)** . Az inhomogén egyenlet megoldásait $y_{ip} = Ae^{-x} + (Bx + C)x$ **(3p)** alakban keressük. Ekkor

$$\begin{array}{rl} 5 \cdot | & y'_{ip} := -Ae^{-x} + 2Bx + C \\ 2 \cdot | & y''_{ip} = Ae^{-x} + 2B \qquad\qquad (\mathbf{5p}) \\ 1 \cdot | & y'''_{ip} = -Ae^{-x} \end{array}$$

$-4A = 4$, $10B = 5$, $4B + 5C = 0$, tehát $A = -1, B = \dfrac{1}{2}$, $C = -\dfrac{2}{5}$ **(4p)** , így az általános megoldás:

$$y = y_{ip} + y_h = -e^{-x} + \frac{x^2}{2} - \frac{2x}{5} + c_1 + e^{-x}(c_2 \cos(2x) + c_3 \sin(2x)) \qquad (\mathbf{3p})$$

---

4. feladat (14 pont)
Van-e olyan megoldása az $f(n+2) = \dfrac{7}{2}f(n+1) + 2f(n)$ lineáris rekurziónak, amelyre a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ numerikus sor abszolút konvergens? Adja meg azt a megoldást, amelyre $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 3$.

Mo. A lineáris rekurziós általános megoldása: $0 = q^{n+2} - \dfrac{7}{2}q^{n+1} - 2q^n = q^n(q^2 - \dfrac{7}{2}q - 2)$ egyenlet gyökei $q_1 = 4$, $q_2 = -\dfrac{1}{2}$ **(3p)** , tehát $f(n) = c_1 4^n + c_2 \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. **(2p)** . $\sum f(n)$ konvergens, ha $c_1 = 0$, **(2p)** , és ekkor abszolútértéke $\dfrac{1}{2}$ hányadosú geoetriai sor, így a sor abszolút konvergens. **(2p)** .

$$3 = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = c_2 \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{c_2}{3} \quad (\mathbf{4p}),$$

tehát $c_2 = -9$ **(1p)** .

5. feladat (5+19+8=32 pont)
a) Ismertesse a hányadoskritérium valamelyik alakját!
b) Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

$$b1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+3)\ 7^{n+4}} \qquad\qquad b2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-1}{4n^3+6n}$$

Mo. a) Tétel kimondása. **(5p)**
*b*1) Hányadoskritériummal **(2p)** :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)\ \ 3^{n+3}\ \ 7^{n+4}}{7^{n+5}\ \ (n+4)\ \ 3^{n+2}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{3}{7}\ \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{3}{7} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens } \mathbf{(3p)}$$

Mivel $\dfrac{3^{n+2}}{(n+3)\ 7^{n+4}} \overset{(\mathbf{2p})}{\leq} \dfrac{3^{n+2}}{7^{n+4}}$, így

$$|s - s_{99}| \overset{(\mathbf{2p})}{=} \sum_{n=100}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+3)7^{n+4}} \overset{(\mathbf{2p})}{\leq} \sum_{n=100}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{7^{n+4}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\frac{3^{102}}{7^{104}}}{1-\frac{3}{7}}$$

*b*2) Minoráns kritériummal **(2p)** $\dfrac{3n^2-1}{4n^3+6n} \overset{(\mathbf{2p})}{\geq} \dfrac{2n^2}{4n^3+6n^3} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \dfrac{1}{5n}$, és $\sum \dfrac{1}{n}$ divergens, tehát a sor divergens. **(2p)**

IMSC feladat (8 IMSC pont) Egy fa növekedésének sebessége arányos a maximális elérhető magasságának (H) és pillanatnyi magasságának különbségével. Tegyük fel, hogy egy tölgyfa legfeljebb 45 méter magasra nő és 10 évesen 5 méter magas. Hány évesen éri el a 30 méteres magasságot? (A fa méretét ültetésének pillanatában vehetjük nullának.)

Mo. Legyen $h(t)$ a fa magassága az ültetéstől számított t idő elteltével, a feladatban szereplő konstansok pedig legyenek $H = 45\,\mathrm{m}$, $t_1 = 10\,\text{év}$, $h_1 = 5\,\mathrm{m}$, $h_2 = h(t_2) = 30\,\mathrm{m}$, ahol t_2 a kérdés.

A feladat szövege alapján a keresett $h(t)$ függvény a

$$\dot{h}(t) = \lambda\big(H - h(t)\big) \qquad (\mathbf{2p})$$

differenciálegyneletet elégíti ki. A differenciálegyenlet elsőrendű, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet, melynek megoldása:

$$h_{\mathrm{H,ált}}(t) = Ae^{-\lambda t}, \qquad h_{\mathrm{I,part}}(t) = H, \qquad h_{\mathrm{I,ált}}(t) = Ae^{-\lambda t} + H. \qquad (\mathbf{2p})$$

A $h(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} h(t) = H$ feltételeket kielégítő megoldás: $h(t) = H(1 - e^{-\lambda t})$ **(1p)** .

A $h(t_1) = h_1$ feltételből kapjuk, hogy $\lambda = -\frac{\ln\frac{H-h_1}{H}}{t_1} = \frac{\ln(9/8)}{t_1}$, ahonnan

$$h(t) = H\left(1 - (8/9)^{t/t_1}\right), \qquad (\mathbf{2p})$$

és a $h(t_2) = h_2$ egyenlet megoldása:

$$t_2 = t_1 \frac{\ln\big((H-h_2)/H\big)}{\ln(8/9)} = t_1 \frac{\ln(3)}{\ln(9/8)} = 93{,}3\,\text{év}. \qquad (\mathbf{1p})$$
