Villamosmérnök A3 (2017 ősz) **4. vizsga ZH**

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $(x+1)y' - y = e^x(x+1)^2$ differenciálegyenletet!

Megoldásvázlat. Elsőrendű lineáris. y_{ha}: $y' = y/(x+1)$ szétválasztható. $y \equiv 0$ szinguláris megoldás.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \rightsquigarrow \ln|y| = \int \frac{dy}{y}\,dy = \int \frac{dx}{x+1}\,dx = c + \ln|x+1|$$
$$\rightsquigarrow |y| = c_1\,|x+1| \quad (c_1 > 0) \quad \rightsquigarrow \left|\frac{y}{x+1}\right| = c_1 \overset{\text{Bolzano}}{\rightsquigarrow} \frac{y}{x+1} = c \quad (c \neq 0)$$

vagyis $y_{ha} = c(x+1)$.

y_{ip} állandók variálásával: y_{ip}-t $c(x)(x+1)$ alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve

$$e^x(x+1)^2 = (x+1)(c'(x+1)+c) - c(x+1) = c'(x+1)^2 \rightsquigarrow c' = e^x \rightsquigarrow c = e^x \rightsquigarrow y_{ip} = e^x(x+1)$$

vagyis az inhomogén általános megoldása $y_{ha} + y_{ip} = (c+e^x)(x+1)$.

2. Oldja meg Laplace-transzformáció segítségével az $y'' - 4y' + 4y = 64\sin 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdetiérték-problémát!

Megoldásvázlat. Mindkét oldalt Laplace-transzformálva

$$\frac{128}{s^2+4} = s^2Y - sy(0) - y'(0) - 4(sY - y(0)) + 4Y = Y(s^2 - 4s + 4) - 1$$
$$\rightsquigarrow Y = \frac{128}{(s^2+4)(s-2)^2} + \frac{1}{(s-2)^2} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{C}{s-2} + \frac{D+1}{(s-2)^2}$$

amiből $A = 8$, $B = 0$, $C = -8$, $D = 16$, és így

$$y = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{s^2+4} - \frac{8}{s-2} + \frac{17}{(s-2)^2}\right\} = 8\cos 2t - 8e^{2t} + 17te^{2t}.$$

3. Legyen F az xy-síkban az origó középpontú, R sugarú kör mint kifelé irányított, kétdimenzióbeli valódi **felület**nek az x tengely feletti része. $\int_F r/|r|^2\,df = ?$

Megoldásvázlat. Az integrandus párhuzamos a felületi normálissal, így

$$\int_F r/|r|^2\,df = \int_F nr/|r|^2\,|df| = \frac{1}{R}\int_F 1\,|df| = \frac{1}{R}R\pi = \pi$$

ahol n a felületi egységnormálist jelenti.
VAGY A definíciókból: A felülete egyenlete $r(u) = R(\sin u, \cos u)$, $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\mathrm{CROSS}(r_u(u)) = \mathrm{CROSS}(R(\cos u, -\sin u) = R(\sin u, \cos u)$, tehát

$$\int_F r/|r|^2\,df = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R}{R^2}(\sin u, \cos u)R(\sin u, \cos u)\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u\,du = \pi.$$

4. Legyen $v(x,y,z) = (x^2 + yz, x^2 + y + z, x^2 + y + z)$, T a koordinátasíkok és az $x + 2y + 2z = 2$ síkok által határolt tetraéder (vagyis amelynek a csúcsai az origó és a $(2,0,0)$, $(0,1,0)$ és $(0,0,1)$ pontok), F pedig az a felület, amit a T kifelé irányított határából kapunk az $x + 2y + 2z = 2$ sík elhagyásával. $\int_F \operatorname{rot} v\,df = ?$

Megoldásvázlat. A Stokes-tétel miatt $\int_F \operatorname{rot} v\, df = \int_L v\, dr$, ahol $L = L_1 + L_2 + L_3$, ahol L_1 a $(0,0,1)$ és $(0,1,0)$ pontokat, L_2 a $(0,1,0)$ és $(2,0,0)$ pontokat, L_3 pedig a $(2,0,0)$ és $(0,0,1)$ pontokat összekötő szakasz. $\int_{L_1} v\, dr = 0$, mert az integrandus merőleges L_1-re.
$L_2 : r_2(t) = (2t, 1-t, 0)$, $t \in [0,1]$, ezért

$$\int_{L_2} v\, dr = \int_0^1 ((2t)^2, (2t)^2 + 1 - t, (2t)^2 + 1 - t)(2,-1,0)\, dt$$
$$= \int_0^1 4t^2 + t - 1\, dt = \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t\Big|_0^1 = \frac{8+3-6}{6} = \frac{5}{6}$$

$L_3 : r_3(t) = (2-2t, 0, t)$, $t \in [0,1]$, ezért

$$\int_{L_3} v\, dr = \int_0^1 ((2-2t)^2, (2-2t)^2 + t, (2-2t)^2 + t)(-2,0,1)\, dt$$
$$= \int_0^1 -(2-2t)^2 + t\, dt = \int_0^1 -4t^2 + 9t - 4\, dt = -\frac{4}{3}t^3 + \frac{9}{2}t^2 - 4t\Big|_0^1 = \frac{-8+27-24}{6} = -\frac{5}{6}$$

vagyis $\int_L v\, dr = \int_{L_1} v\, dr + \int_{L_2} v\, dr + \int_{L_3} v\, dr = 0$.

VAGY a Stokes–tétel miatt $\int_F \operatorname{rot} v\, df = \int_L v\, dr = \int_H \operatorname{rot} v\, df$, ahol L az előző megoldásbeli görbe, H pedig a $(2,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ csúcsú háromszöglap az „origó felé" irányítva. H egy egyenlete $r(u,v) = (2(1-u-v), v, u)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0, 1-u]$; $r_u(u,v) \times r_v(u,v) = -(1,2,2)$, és így

$$\int_H \operatorname{rot} v\, df = \int_0^1 \int_0^{1-u} -(0, 5v+4u-4, 4-4v-5u)(1,2,2)\, dv\, du = \int_0^1 \int_0^{1-u} 2(u-v)\, dv\, du = 0,$$

amiből tehát $\int_F \operatorname{rot} v\, df = 0$ következik.

VAGY a definíciókból. $\operatorname{rot} v = (0, y - 2x, 2x - z)$, és ha F_1 a tetraéder azon lapja, ami része az yz síknak; F_2 az, ami része az xy síknak; F_3 pedig az, ami része az xz síknak, akkor $\int_{F_1} v\, df = 0$, mert az integrandus merőleges a felületi normálisra ($\operatorname{rot} v$ az yz síkban van).
$F_2 : r(u,v) = (2v, u, 0)$, $v \in [0,1]$, $u \in [0, 1-v]$, $r_u \times r_v = (0,0,-2)$, ezért

$$\int_{F_2} \operatorname{rot} v\, df = \int_0^1 \int_0^{1-v} (0, u - 4v, 4v)(0,0,-2)\, du\, dv = \int_0^1 \int_0^{1-v} -8v\, du\, dv$$
$$= \int_0^1 [-8vu]_0^{1-v}\, dv = \int_0^1 8(v^2 - v)\, dv = \frac{8}{3}v^3 - 4v^2\Big|_0^1 = -\frac{4}{3}.$$

$F_3 : r(u,v) = (2u, 0, v)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0, 1-v]$, $r_u \times r_v = (0,-2,0)$, ezért

$$\int_{F_3} \operatorname{rot} v\ \ df = \int_0^1\int_0^{1-u} (0, -4u, 4u - v)(0,-2,0)\ \ dv\ \ du = \int_0^1\int_0^{1-u} 8u\ \ dv\ \ du = \frac{4}{3}$$

vagyis $\int_F \operatorname{rot} v\, df = \int_{F_1} \operatorname{rot} v\, df + \int_{F_2} \operatorname{rot} v\, df + \int_{F_3} \operatorname{rot} v\, df = 0$.

VAGY: lezárva a tetraédert a $(2,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ csúcsú H háromszöglappal (ahol H úgy van irányítva, hogy $F \cup H$ a tetraéder kifelé irányított határa), a Gauss-Osztrogradszkij tétel és $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$ miatt $0 = \int_V \operatorname{div} \operatorname{rot} v\, dV = \int_{F \cup H} \operatorname{rot} v\, df$, vagyis $\int_F \operatorname{rot} v\, df = -\int_H \operatorname{rot} v\, df$. Utóbbi kiszámításához H egy egyenlete $r(u,v) = (2(1-u-v), u, v)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0, 1-u]$; $r_u(u,v) \times r_v(u,v) = (1,2,2)$, és így

$$\int_H \operatorname{rot} v\, df = \int_0^1 \int_0^{1-u} (0, 5u+4v-4, 4-4u-5v)(1,2,2)\, dv\, du = \int_0^1 \int_0^{1-u} 2(u-v)\, dv\, du = 0,$$

amiből tehát $\int_F \operatorname{rot} v\, df = 0$ következik.

5. (a) Definiálja az A lineáris operátor skalárinvariánsát!
(b) Mi az $r(u,v)$, $(u,v) \in A$ felület felszíne?
(c) Legyen $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonosan deriválható $\mathbb{R}^2$-en. Igazak-e a következő állítások?
(c1) Ha $\operatorname{rot} v = 0$, akkor v minden zárt görbe menti integrálja 0.
(c2) Ha v minden zárt görbe menti integrálja 0, akkor $\operatorname{rot} v = 0$.

Megoldásvázlat. (a) A skalárinvariánsa az A (tetszőleges bázisban felírt) mátrixa főátlóbeli elemeinek összege.
(b) $\int_A |r_u(u,v) \times r_v(u,v)| \, du \, dv$
(c1) Igen, a Stokes–tétel miatt.
(c2) Igen, tétel volt (a feltétel miatt v vonalmenti integráljai csak a végpontoktól függnek, ezért v-nek van potenciálfüggvénye, azaz $v = \operatorname{grad} u$, ahol u kétszer folytonosan deriválható, és így $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$).

IMSc-feladat. Számítsa ki az $f(t) = t$ ha $0 \le t \le 1$, $f(t) = 1$ ha $1 < t$ függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldásvázlat. $s > 0$-ra

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^1 e^{-st} t \, dt + \int_1^\infty e^{-st} \, dt \\
&= \frac{-e^{-st}}{s} t \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s} \, dt - \frac{1}{s} \lim_{b\to\infty} (e^{-sb} - e^{-s}) \\
&= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^1 + \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s^2}
\end{aligned}$$