VIK A3 Matematika - 3. Vizsgadolgozat

2015. január 14.

Minden feladat 10 pontot ér. Rendelkezésre álló idő: 90 perc. Kizárólag az előre kiadott Laplace-transzformációs táblázat használható! Jó munkát!

1. Határozzuk meg az
$$\frac{y'(x)}{y(x)^3} + \frac{2}{xy(x)^2} = \frac{1}{x^3}, \quad y(x) \neq 0$$
differenciálegyenlet általános megoldását!
(Javaslat: használjunk $u(x) = \frac{1}{y(x)^2}$ helyettesítést!)

2. Írja fel a Stokes-tételt! Szemléltesse a Stokes-tételt $\mathbf{v}(x, y, z) = z^2\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$ vektormező és az $\mathcal{F} : x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$ felület esetén!

3. Határozza meg a $\mathbf{v}(x, y, z) = (x - 2z)\,\mathbf{i} + (2x + y)\,\mathbf{j} + (x - y + z)\,\mathbf{k}$ vektor-vektor függvény felületmenti integrálját (fluxusát) az $x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2$ henger mentén, kifelé mutató normális mellett!

4. Számolja ki a következő integrált, ahol $G : |z| = 2$
$$\oint_G \left(\frac{1}{(z^4 + 81)^4} + \frac{\sin z}{z^2(z^2 + 1)} + ze^{-\frac{1}{z^2}} \right) \mathrm{d}\,z$$

5. Milyen α valós szám esetén lesz a
$$\mathbf{v}(x, y, z) = (2xy - z^\alpha - yz)\,\mathbf{i} + (x^2 + z^\alpha - xz)\,\mathbf{j} + (2yz - 2xz - xy)\,\mathbf{k}$$
vektor-vektorfüggvény potenciálos! Számítsuk ki ebben az esetben $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}$-t!