Felsőbb matematika zh (2021 ősz) Matematikai logika pótzh

Név: Neptun kód: | | | | | | |

Az összes feladatban: jelölje $\times$-el a helyesnek gondolt választ.

1. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak? (Minden jó válasz 1, minden rossz válasz -0.5 pontot ér. Ha nem jelöli meg egyik lehetőséget sem, az 0 pont.)

	I	H
$(q \wedge r) \to (p \vee \neg(r \to q))$ érvényes		
$(q \wedge r) \to (p \vee \neg(r \to q))$ kielégíthető		
$\neg(p \vee ((q \to p) \to (p \to q)))$ érvényes		
$\neg(p \vee ((q \to p) \to (p \to q)))$ kielégíthető		

(4 pont)

Megoldás. $(q \wedge r) \to (p \vee \neg(r \to q))$ nem érvényes, mert nem igaz abban a modellben, amelyben p hamis, de q és r igazak. De kielégíthető, mert pl. minden olyan modellben igaz, amelyben p igaz.

$\neg(p \vee ((q \to p) \to (p \to q)))$ kielégíthetetlen (és így nem is érvényes), mert a tagadása érvényes, mert ha $\mathcal{M}(p) = 0$, akkor $\mathcal{M} \models p \to q$, amiből $\mathcal{M} \models (q \to p) \to (p \to q)$ következik. Tehát a megoldás:

	I	H
$(q \wedge r) \to (p \vee \neg(r \to q))$ érvényes		$\times$
$(q \wedge r) \to (p \vee \neg(r \to q))$ kielégíthető	$\times$	
$\neg(p \vee ((q \to p) \to (p \to q)))$ érvényes		$\times$
$\neg(p \vee ((q \to p) \to (p \to q)))$ kielégíthető		$\times$

2. (A, B, C mindegyike vagy lovag, azaz mindig igazat mond, vagy lókötő, azaz mindig hazudik.)

A: B lovag és C lókötő. B: Ha C lovag, akkor A is az. C: A lovag vagy B lókötő.

Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak? (Minden jó válasz 2, minden rossz válasz -1 pontot ér. Ha nem jelöli meg egyik lehetőséget sem, az 0 pont.)

	I	H
A lókötő		
Hármuk közül legalább kettő lovag.		
B lókötő		
C lókötő		

(8 pont)

Megoldás. $\{A \leftrightarrow (B \wedge \neg C), B \leftrightarrow (C \to A), C \leftrightarrow (A \vee \neg B)\}$-nek egyetlen modellje van, az, amiben A, B hamis, C igaz. Tehát a megoldás:

	I	H
A lókötő	$\times$	
Hármuk közül legalább kettő lovag.		$\times$
B lókötő	$\times$	
C lókötő		$\times$

Vagy (elemien): ha A lovag, akkor C lókötő, noha C igazat mond. A tehát lókötő. B nem lehet lovag, mert akkor C hazudik, tehát C lókötő, ami azt jelenti, hogy A igazat mond, amiről már tudjuk, hogy nem lehet. Tehát B is lókötő. De akkor C igazat mond, tehát lovag.

3. Legyen $\Sigma = \{\neg((q \vee \neg p) \to p), \neg(q \vee r)\}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak? (Minden jó válasz 1, minden rossz válasz -0.5 pontot ér. Ha nem jelöli meg egyik lehetőséget sem, az 0 pont.)

	I	H
$\Sigma \models (p \wedge q) \vee \neg r$		
$\Sigma \cup \{(\neg p \vee \neg q) \wedge r\}$ inkonzisztens		
$\Sigma \models (r \to q) \vee \neg p$		
$\Sigma \cup \{p \wedge r \wedge \neg q)\}$ inkonzisztens		

(4 pont)

Megoldás. Az első két állítás és a második két állítás ekvivalens, mert $\Sigma \models \varphi \iff \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen, és mert az utóbbi a teljességi tétel miatt ekvivalens azzal, hogy $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ inkonzisztens.

Σ-nak pontosan egy modellje van: az, amelyben mindhárom kijelentésváltozó hamis. Tehát egy formula pontosan akkor következik Σ-ból, ha igaz ebben a modellben. De $(p \wedge q) \vee \neg r$ és $(r \to q) \vee \neg p$ is igaz ebben a modellben.

Tehát a megoldás:

	I	H
$\Sigma \models (p \wedge q) \vee \neg r$	$\times$	
$\Sigma \cup \{(\neg p \vee \neg q) \wedge r\}$ inkonzisztens	$\times$	
$\Sigma \models (r \to q) \vee \neg p$	$\times$	
$\Sigma \cup \{p \wedge r \wedge \neg q)\}$ inkonzisztens	$\times$	

4. Legyen $\Gamma = \{\neg((q \vee \neg p) \to p), \neg(q \vee r), (\neg p \wedge \neg q) \vee r\}$, $\Delta = \{\neg((q \vee \neg p) \to p), \neg(r \to p)\}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak? (Minden jó válasz 1, minden rossz válasz -0.5 pontot ér. Ha nem jelöli meg egyik lehetőséget sem, az 0 pont.)

	I	H
Γ kielégíthető		
Γ teljes		
Δ kielégíthető		
Δ teljes		

(4 pont)

Megoldás. Γ-nak pontosan egy modellje van ($\mathcal{M}(p) = \mathcal{M}(q) = \mathcal{M}(r) = 0$), ezért kielégíthető és teljes.

$\neg(r \to p) \in \Delta$ miatt r biztosan igaz p pedig hamis Δ minden modelljében; de akkor q bármi lehet, következésképp Δ-nak két modellje van, azaz kielégíthető, de nem teljes. Tehát a megoldás:

	I	H
Γ kielégíthető	$\times$	
Γ teljes	$\times$	
Δ kielégíthető	$\times$	
Δ teljes		$\times$