A2 ZÁRTHELYI

2014. OKTÓBER 20.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$	NÉV
max. pontszám	10	10	10	10	10	50	NEPTUN KÓD
elért pontszám							GYAK VEZ

1.) Vizsgáljuk meg, hogy a

$$\mathbf{v}_1 := (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 := (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 := (3, 2, 1)$$

vektorok lineárisan összefüggőek-e vagy függetlenek.

2.) Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi halmaz alteret alkot-e $\mathbf{R}^3$-ban

$$\{(x, y, z) \,|\, x = 3y,\ z = -2y,\ y \in \mathbf{R}\}.$$

3.) Határozzuk meg az

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

4.) Milyen t értékek esetén oldható meg az alábbi egyenletrendszer egyértelműen?

$$\begin{aligned} tx + y + z &= 1, \\ x + ty + z &= t, \\ x + y + tz &= t^2. \end{aligned}$$

5.) Tekintsük $\mathbf{R}^4$-ben az egységkockát $C := \{(x, y, z, u) \,|\, 0 \leq x, y, z, u \leq 1\}$. Mekkora szöget zár be a kocka testátlója (az origót az $(1, 1, 1, 1)$ ponttal összekötő szakasz) és egyik oldaléle (az origót a $(0, 0, 0, 1)$ ponttal összekötő szakasz) ?

1.) Vizsgáljuk meg, hogy a

$$\mathbf{v}_1 := (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 := (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 := (3, 2, 1)$$

vektorok lineárisan összefüggőek-e vagy függetlenek.

$\boxed{\textbf{MEGOLDÁS.}}$

$\boxed{\textbf{2p}}$

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

azaz

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0).$$

Ekvivalensen $\boxed{\textbf{2p}}$

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0).$$

Ebből $\boxed{\textbf{2p}}$

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0, \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0, \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ebből $\boxed{\textbf{3p}}$

$$k_1 = -\frac{1}{2}t,\ k_2 = -\frac{1}{2}t,\ k_3 = t.$$

Tehát lineárisan **összefüggenek** $\boxed{\textbf{1p}}$.

2.) Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi halmaz alteret alkot-e $\mathbf{R}^3$-ban

$$\{(x, y, z) \,|\, x = 3y,\ z = -2y,\ y \in \mathbf{R}\}.$$

$\boxed{\textbf{MEGOLDÁS.}}$

A feltételek alapján $\boxed{\textbf{6p}}$ $(x, y, z) = (3y, y, -2y) = y(3, 1, -2)$, tehát a $\boxed{\textbf{4p}}$ $(3, 1, -2)$ vektor által kifeszített altér.

3.) Határozzuk meg az

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

MEGOLDÁS.

A karakterisztikus polinom **1p**

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 9\lambda^2 - 20\lambda.$$

3p Ennek gyökei a sajátértékek, 0, -4 és -5.

2p A $\lambda = 0$-hoz tartozó sajátvektor az

$$(A - 0 \cdot I)\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

egyenlet nemtriviális megoldásai, ahonnan a sajátvektor (konstans szorzó erejéig egyértelmű)

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2p Hasonlóan, a $\lambda = -4$-hez tartozó sajátvektor az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

egyenletből

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2p Végül, a $\lambda = -5$-höz tartozó sajátvektor az

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

egyenletből

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4.) Milyen t értékek esetén oldható meg az alábbi egyenletrendszer egyértelműen?

$$\begin{aligned} tx + y + z &= 1, \\ x + ty + z &= t, \\ x + y + tz &= t^2. \end{aligned}$$

MEGOLDÁS.

2p Az egyenletrendszer együttható mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}.$$

4p Az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha A invertálható, ami azzal ekvivalens, hogy $\det A \neq 0$.

3p

$$\det A = (t-1)^2(t+2).$$

1p Tehát $t \neq 1, -2$ esetén az egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

5.) Tekintsük $\mathbf{R}^4$-ben az egységkockát $C := \{(x,y,z,u) \,|\, 0 \leq x,y,z,u \leq 1\}$. Mekkora szöget zár be a kocka testátlója (az origót az $(1,1,1,1)$ ponttal összekötő szakasz) és egyik oldaléle (az origót a $(0,0,0,1)$ ponttal összekötő szakasz) ?

MEGOLDÁS.

A kocka testátlóját reprezentálja a $\mathbf{d} := (1,1,1,1)$ vektor **1p**, az oldalélet $\mathbf{u} := (0,0,0,1)$ **1p**. Jelölje a keresett szöget θ **1p**. Ekkor **2p + 1p + 1p + 1p + 1p**

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{d} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{d}\|} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ezért $\theta = 60^\circ$ **1p**.