SZABTECH 6. GYAKORLAT ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEINEK KIDOLGOZÁSA

① Diszkrétidejű $\Sigma_d(\Phi, \Gamma, C, D)$ rendszer (általában $D=0$)

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma \cdot u_k$$

$$y_k = C \cdot x_k + D \cdot u_k$$

M_c irányíthatósági mátrix: $M_c = [\Gamma, \Phi \cdot \Gamma, \Phi^2 \cdot \Gamma, \ldots, \Phi^{n-1} \cdot \Gamma]$

Egy diszkrétidejű rendszer reverzibilis, ha $\exists \Phi^{-1}$!

A diszkrétidejű lineáris időinvariáns rendszer teljesen elérhető akkor és csak akkor, ha $\operatorname{rank} M_c = n = \dim x$.

A teljes irányíthatóságnak a $\operatorname{rank} M_c = n$ csak elégséges feltétele, és csak akkor szükséges is, ha $\exists \Phi^{-1}$!

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{rank} M_c = n \iff \text{Teljesen elérhető} \\ \operatorname{rank} M_c = n \implies \text{Teljesen irányítható} \end{array}}$$

② Pólusáthelyezési feladat: Mi a zárt körben előre meghatározott pólusokat szeretnénk. Ezek $\varphi_c(z)$ gyökei. Ehhez csatoljuk vissza negatívan az állapotokat a bemenetre. $u_k = -K \cdot x_k$

Ekkor a zárt kör karakterisztikus egyenlete (azt szeretnénk, hogy ez $\varphi_c(z)$-vel egyezzen meg)

$$\varphi_c(z) = \det(z \cdot I - (\Phi - \Gamma \cdot K)) = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)$$

Előírt pólusok

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma \cdot (-K \cdot x_k)$$

$$x_{k+1} = \underbrace{(\Phi - \Gamma \cdot K)}_{} \cdot x_k$$

ez lesz a módosult rendszermátrix

A kívánt pólusáthelyezéshez tartozó K erősítésvektor meghatározható az Ackermann képlettel:

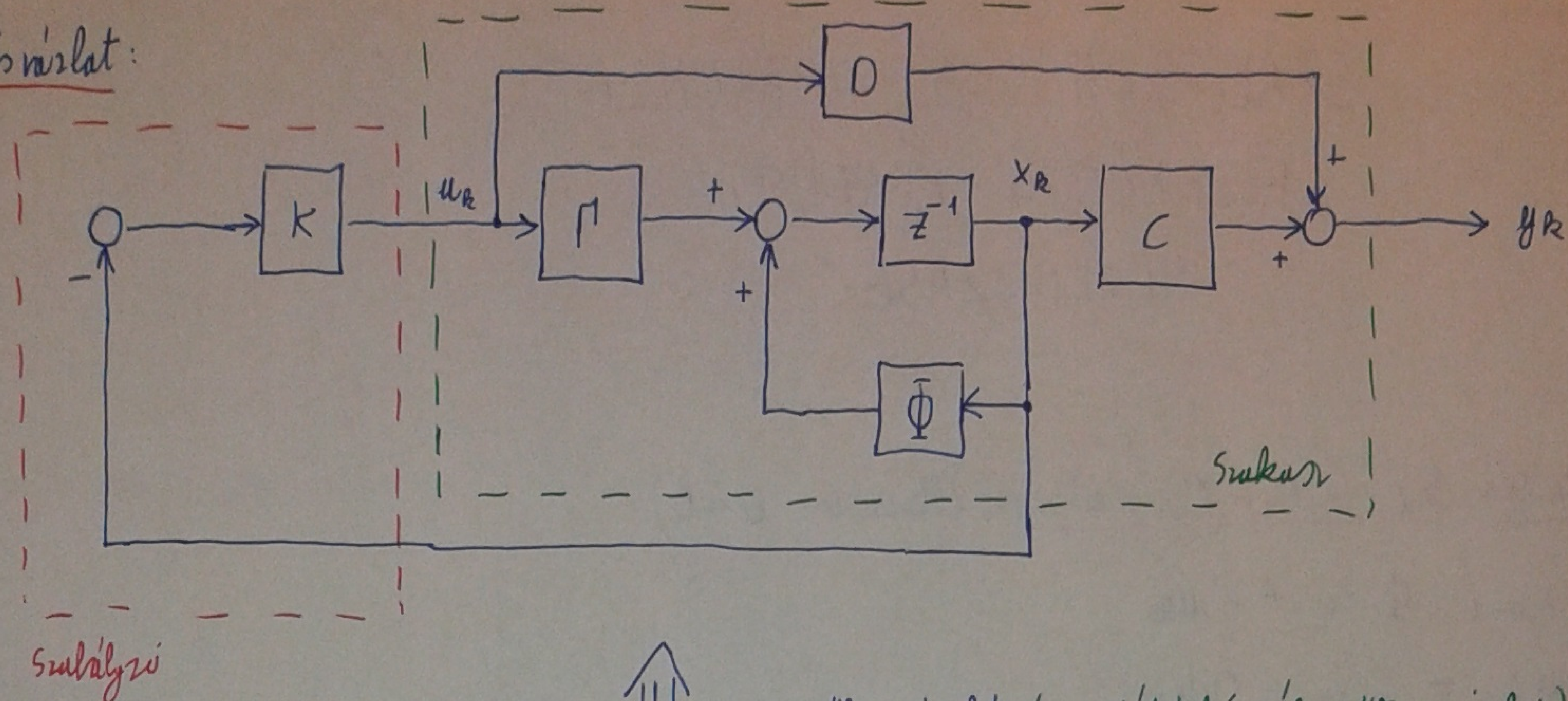
$$K = [\underbrace{0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0}_{n-1 \text{ darab nulla}} \quad 1] \cdot M_c^{-1} \cdot \varphi_c(\Phi)$$

sorvektor

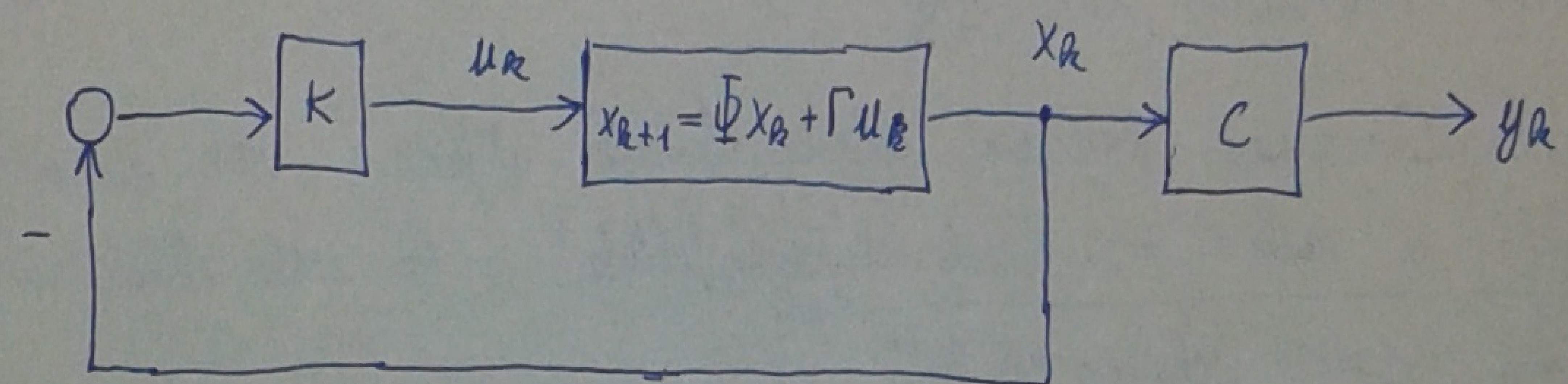
$$(\Phi, \Gamma) \xrightarrow[\varphi_c(z)]{M_c} K$$

Ackermann képlet

Hatásvázlat:



Egyszerűbb rajzolás (ez alább talán célszerűbb rajzolni)
(De a felső szemléletesebb)



③ **Alapjel miatti korrekció** (egységugrás alapjelváltozás):

Állandósult állapotban:

$$x_{k+1} = x_k$$

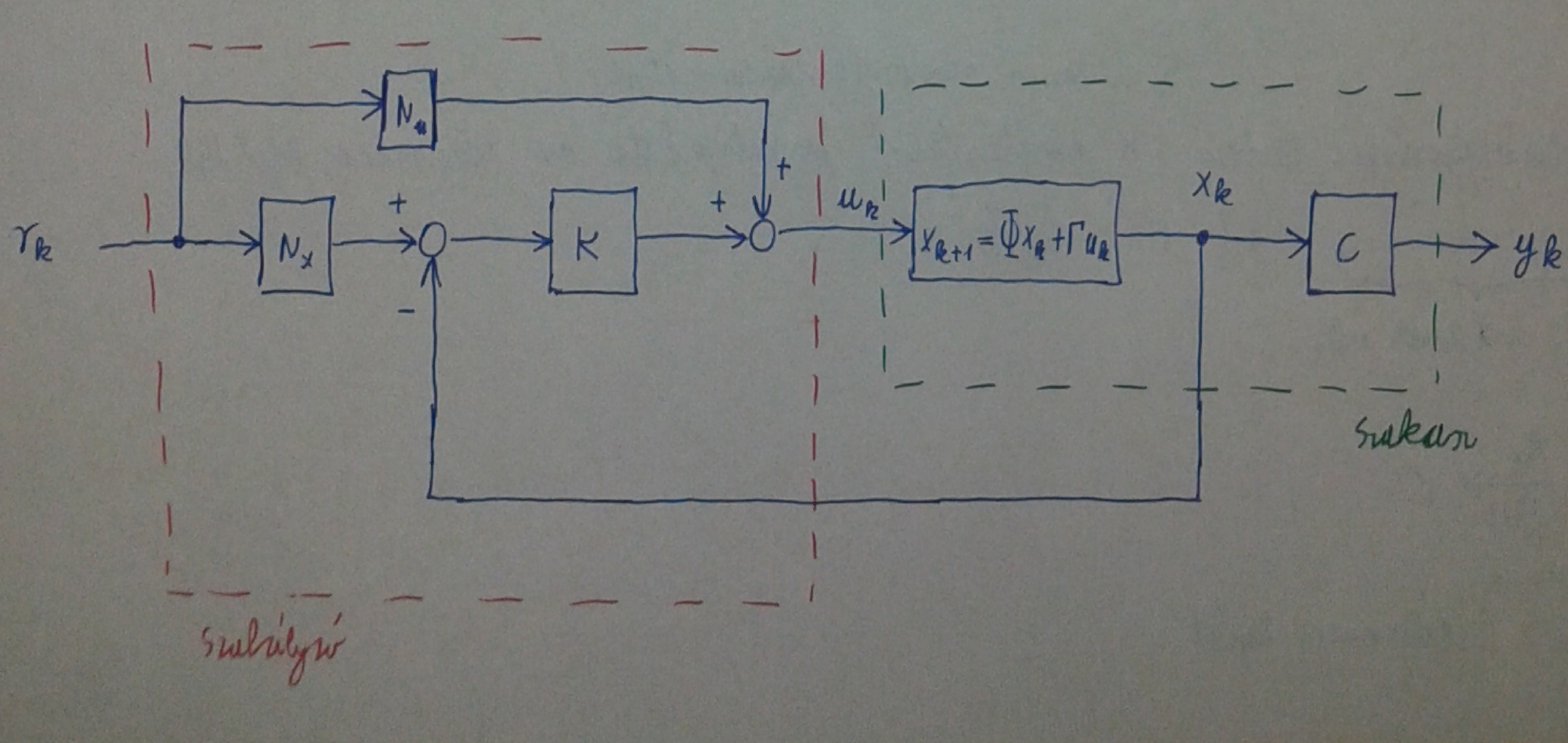
$$x_{k+1} = \Phi \cdot x_k + \Gamma u_k \Longrightarrow 0 = (\Phi - I)\cdot x_k + \Gamma \cdot u_k$$

$x_\infty = N_x$ $\quad$ $u_\infty = N_u$

$$\begin{bmatrix} \Phi - I & \Gamma \\ C & \emptyset \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - I & \Gamma \\ C & \emptyset \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1 \end{bmatrix}$$

SISO esetben: N_x – n elemű oszlopvektor

N_u – skalár



④ **Megfigyelhetőségi mátrix:** $M_o = \begin{bmatrix} C \\ C\cdot\Phi \\ C\cdot\Phi^2 \\ \vdots \\ C\cdot\Phi^{n-1} \end{bmatrix}$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{rank } M_o = n \iff \text{Teljesen megfigyelhető} \\ \text{rank } M_o = n \implies \text{Teljesen rekonstruálható} \end{array}}$

A diszkrétidejű lineáris időinvariáns rendszer teljesen megfigyelhető akkor és csak akkor, ha rank $M_o = n = \dim x$. A teljes rekonstruálhatóságnak rank $M_o = n$ csak elégséges feltétele, de csak reverzibilis rendszerek ($\exists\,\Phi^{-1}$) esetén szükséges feltétele.

⑤ **Állapotmegfigyelő** ← Aktuális!

Aktuális állapotmegfigyelő: $\hat{x}_{k+1} = F\cdot x_k + G\cdot \underset{\uparrow \text{ Aktuális}}{y_{k+1}} + H\cdot u_k$ $\qquad \dim\hat{x} = \dim x = n$

$$F = \Phi - G\cdot C\cdot\Phi$$

$$H = \Gamma - G\cdot C\cdot\Gamma$$

$\tilde{x}_{k+1} = F\cdot\tilde{x}_k$ stabil és gyors! $\leftarrow$ $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$ (Az állapotbecslés hibája)

A $\hat{x}_{k+1}$ becsült állapot számítása valós idejű megvalósítás szempontjából kedvezőbb alakra hozható:

$$\hat{x}_{k+1} = (\Phi - G C\cdot\Phi)\hat{x}_k + G\,y_{k+1} + (\Gamma - G\cdot C\cdot\Gamma)\cdot u_k =$$

$$= \underbrace{\Phi\,\hat{x}_k + \Gamma u_k}_{\uparrow} + G\{\underset{\uparrow}{y_{k+1}} - C\cdot(\underbrace{\Phi\,\hat{x}_k + \Gamma u_k}_{})\}$$

Utolsó mintavételnél azonnal számítható

Csak a következő mintavételnél számítható

új köztes változó ↘

$$\bar{x}_{k+1} = \Phi\,\hat{x}_k + \Gamma\cdot u_k \qquad \leftarrow \text{Time-update}$$

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + G\cdot(y_{k+1} - C\cdot\bar{x}_{k+1}) \qquad \leftarrow \text{Measurement-update}$$

⑥ A megfigyelő tranzienseinek gyorsaságát a megfigyelő $\varphi_o(z)$ karakterisztikus polinomjával írjuk elő:

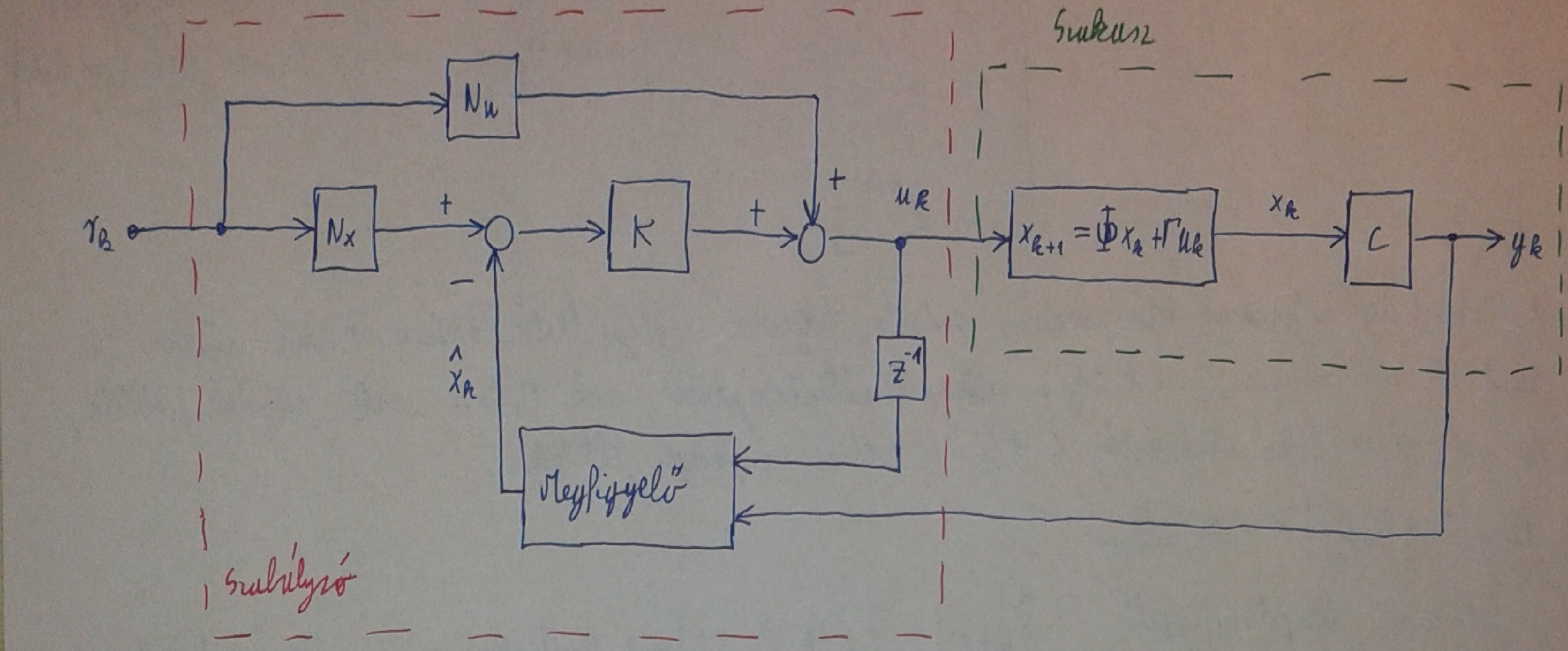
$$\varphi_o(z) = \det(zI - F) = \det(zI - (\Phi - G\cdot C\cdot\Phi)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dualitás}}}{=} \det(zI - (\Phi^T - \Phi^T\cdot C^T\cdot G^T))$$

Az állapotmegfigyelő tervezését így visszavezettük egy $K_I = G^T$ állapot-visszacsatolás megtervezésére.

$$(\Phi, C)_I \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dualitás}}}{\longleftrightarrow} (\Phi^T, \Phi^T\cdot C^T)_{II} \xrightarrow[\substack{M_{c,II} \\ \uparrow \\ \text{Ackermann}}]{\varphi_o(z)} K_{II} \rightarrow G = K_{II}^T \longrightarrow F = \Phi - G\cdot C\cdot\Phi$$

$$\searrow H = \Gamma - G\cdot C\cdot\Gamma$$

⑦ Hatásvázlat:



⑧ Integráló hatás: új állapotváltozó: $x_I = \int y\, dt$ (Kimenet integrálja)

$$\Big\downarrow \text{ Baloldali téglalapszabály (LSR)}$$

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + T \cdot y_k = x_{I,k} + T \cdot C \cdot x_k$$

Bővített állapotegyenlet:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{I,k+1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \emptyset \\ T \cdot C & 1 \end{bmatrix}}^{\tilde{\Phi}} \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ x_{I,k} \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \\ \emptyset \end{bmatrix}}^{\tilde{\Gamma}} \cdot u_k$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} C & \emptyset \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ x_{I,k} \end{pmatrix} + \cancel{D \cdot u_k}$$

Legyen $D \equiv \emptyset$

Új bővített állapotváltozó bevezetése:

$$\tilde{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{I,k} \end{pmatrix} \xRightarrow[\text{állapotegyenlet}]{\text{Bővített}} \begin{array}{l} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{\Phi}\, \tilde{x}_k + \tilde{\Gamma}\, u_k \\ y_k = \tilde{C} \cdot \tilde{x}_k \end{array}$$

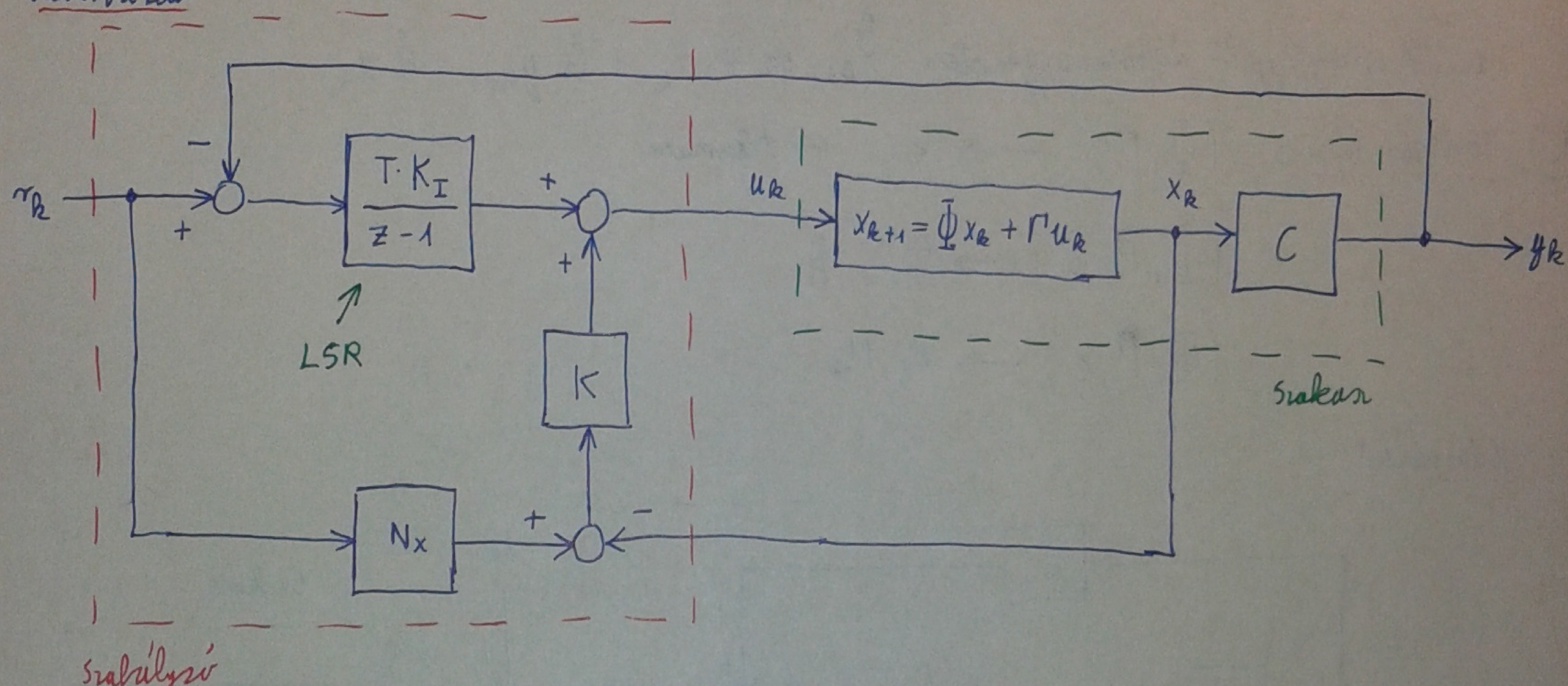
Most a bővített rendszerhez tervezünk állapotvisszacsatolást:

$$u_k \equiv -\tilde{K}\cdot\tilde{x}_k = -\begin{bmatrix} K & K_I \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_k \\ x_{I,k} \end{pmatrix}$$

A zárt rendszer állapotegyenlete: $\tilde{x}_{k+1} = \left(\tilde{\Phi} - \tilde{\Gamma}\tilde{K}\right)\cdot\tilde{x}_k$

$$\left(\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma}\right) \xrightarrow[\tilde{n}_c]{\tilde{\varphi}_c(z)} \tilde{K}$$ ← Ackermann-képlettel

Hatásvázlat:



⑨ Terhelésbecslés: A szakasz bemenetére egy „d_k" zavarjel szuperponálódik. (Feltesszük, hogy d szakaszosan konst.)

Új állapotváltozó bevezetése $x_{d,k} = d_k$

$d_{k+1} = d_k$

Bővített állapotegyenlet:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{d,k+1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix}}^{\hat{\Phi}} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{d,k} \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \\ \emptyset \end{bmatrix}}^{\tilde{\Gamma}} \cdot u_k$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} C & \emptyset \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{d,k} \end{bmatrix}$$

Új bővített állapotváltozó bevezetése:

$$\tilde{X}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{d,k} \end{pmatrix} \xRightarrow[\text{állapotegyenlet}]{\text{Bővített}} \begin{aligned} \tilde{X}_{k+1} &= \hat{\Phi}\,\tilde{x}_k + \tilde{\Gamma}\cdot u_k \\ y_k &= \tilde{C}\cdot\tilde{x}_k \end{aligned}$$

Mivel a $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma}, \tilde{C})$ rendszer nem irányítható, ezért az állapot-visszacsatolást és az alapjel miatti korrekciót az eredeti rendszerhez kell meghatározni.

A megfigyelőt a bővített rendszerhez kell megtervezni.

$$\hookrightarrow (\tilde{\Phi}, \tilde{C})_I \longleftrightarrow (\tilde{\Phi}^T, \tilde{\Phi}^T \cdot \tilde{C}^T) \xrightarrow[\tilde{M}_{c,II}]{\tilde{P}_o(z)} K_{II} = \tilde{G}^T \longrightarrow \tilde{F} = \tilde{\Phi} - \tilde{G}\tilde{C}\tilde{\Phi}$$

$$\tilde{H} = \tilde{\Gamma} - \tilde{G} \cdot \tilde{C} \cdot \tilde{\Gamma}$$

Dualitás

Ackermann

Az állapotmegfigyelő differenciálegyenlete: $\hat{\tilde{x}}_{k+1} = \tilde{F} \cdot \tilde{x}_k + \tilde{G} \cdot y_{k+1} + \tilde{H} \cdot u_k$

(10) Tervezés lépései: $(\Phi, \Gamma) \longrightarrow K$ ← Ackermann

$(\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma}, \tilde{C}) \longrightarrow \tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}$

$(\Phi, \Gamma, C) \longrightarrow N_x, N_u$

Hatásvázlat: