

2. Zárthelyi

2011 tavasz A2

Munkaidő: 90 perc

1. Legyen $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Döntse el, hogy invertálható-e $\underline{A}^{101}$. Ha igen, határozza meg az $(\underline{A}^{101})^{-1}$ sajátértékeit és sajátvektorait!

2. Legyen $\mathbb{R}^4$ -en a skalárszorzat a szokásos: $x \cdot y = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ és a norma a skalárszorzat által indukált: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2$. Legyen továbbá az $L \subseteq \mathbb{R}^4$ az $\mathbb{R}^4$ -nek az $e = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ által generált (egydimenziós) altere és legyen $\mathbf{A}$ az L -re való merőleges vetítés operátora (azaz az az operátor, mely minden $x \in \mathbb{R}^4$ -hez a hozzá (az adott normában) legközelebb eső L -beli vektort rendeli). Határozzuk meg $\mathbf{A}$ mátrixát $\mathbb{R}^4$ szokásos bázisában (azaz abban a bázisban, mely pontosan azokból a számnégyesekből áll, melyeknek egy kivételével minden elemük 0, a nem-nulla elem pedig 1).

3. Legyen $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ az origón kívül, $f(0, 0) = 0$. Deriválható-e f az origóban?

4. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arctg n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n \arctg^2 \frac{1}{n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} n \cos \frac{1}{n} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n$$

5. Abszolút konvergens ill. feltételesen konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 9}$ sor?

6.

(a) Igaz-e egy lineáris teret önmagába képező lineáris operátorra az, hogy

(a1) ha sajátértéke a 0, akkor nem kölcsönösen egyértelmű

(a2) ha nem kölcsönösen egyértelmű, akkor sajátértéke a 0.

(b) Melyik igaz, melyik nem egy f kétváltozós függvényre egy adott pontban?

(b1) Ha parciálisan deriválható, akkor folytonos.

(b2) Ha létezik az összes parciális derivált, akkor totálisan deriválható.

(c) Melyik igaz, melyik nem egy numerikus sorra?

(c1) Ha abszolút konvergens, akkor konvergens is.

(c2) Ha divergens, akkor a tagjai nem 0-hoz tartanak.

2. Zárthelyi megoldásokkal 2011 tavasz A2 Munkaidő: 90 perc

1. Legyen $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Döntse el, hogy invertálható-e $\underline{A}^{101}$. Ha igen, határozza meg az $(\underline{A}^{101})^{-1}$ sajátértékeit és sajátvektorait!

MO. $\underline{A}$ invertálható, mert oszlopvektorai lineárisan függetlenek így $\underline{A}^{101}$ is invertálható. 2p

$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = (1 - \lambda)(-2 - \lambda)$ -ból $\underline{A}$ sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 1, -2$. 2p

Az $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$ mátrixú homogén egyenlet megoldásából a $\lambda = 1$ -hez tartozó sajátvektor $(3, 1)$, míg a $\lambda = -2$ -hez tartozó sajátvektor $(0, 1)$. 2p

Mivel ha $\underline{v}$ sajátvektora $\underline{A}$ -nak a λ sajátértékkel, akkor $\underline{v}$ sajátvektora $(\underline{A}^{101})^{-1}$ -nek

$\frac{1}{\lambda^{101}}$ sajátértékkel, tehát

$(\underline{A}^{101})^{-1}$ sajátértékei 1 és $-\frac{1}{2^{101}}$, és a hozzájuk tartozó sajátvektorok: $(3, 1)$ illetve $(0, 1)$ 4p

(és persze mindkét sajátaltér legfeljebb egydimenzós lehet, továbbá ezen két különböző sajátértéken kívül harmadik nem lehet, mert az ahhoz tartozó sajátvektornak lineárisan függetlennek kellene lennie a többi sajátvektortól).

10p

2. Legyen $\mathbb{R}^4$ -en a skalárszorzat a szokásos: $x \cdot y = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ és a norma a skalárszorzat által indukált: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2$. Legyen továbbá az $L \subseteq \mathbb{R}^4$ az $\mathbb{R}^4$ -nek az $e = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ által generált (egydimenziós) altere és legyen $\mathbf{A}$ az L -re való merőleges vetítés operátora (azaz az az operátor, mely minden $x \in \mathbb{R}^4$ -hez a hozzá (az adott normában) legközelebb eső L -beli vektort rendeli). Határozzuk meg $\mathbf{A}$ mátrixát $\mathbb{R}^4$ szokásos bázisában (azaz abban a bázisban, mely pontosan azokból a számnégyesekből áll, melyeknek egy kivételével minden elemük 0, a nem-nulla elem pedig 1).

MO. Projekció tétellel tetszőleges $x \in \mathbb{R}^4$ vektor esetén az x vetülete L -re az a $c_x e \in L$ ($c_x \in \mathbb{R}$), melyre $x - c_x e \perp e \leadsto (x - c_x e) \cdot e = 0 \leadsto x \cdot e - c_x \|e\|^2 = 0 \leadsto c_x = \frac{1}{4}(x \cdot e)$ (hisz $\|e\|^2 = 4$). 4p

Nomármost, ha $x = (a, b, c, d)$, akkor $x \cdot e = a + b + c + d$, tehát

(*) $\mathbf{A}x = c_x e = \frac{1}{4}(x \cdot e)e = \frac{1}{4}(a + b + c + d)e$. 2p

Így, ha a szokásos bázis elemei: i, j, k, l , akkor $x = i$ esetén (*)-ban $a = 1, b = c = d = 0$, tehát $\mathbf{A}i = \frac{1}{4}e = \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1)$ és persze ugyanígy ugyanez adódik a másik három báziselem esetén is, tehát a keresett mátrix

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{4p}$$

10p

3. Legyen $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ az origón kívül, $f(0, 0) = 0$. Deriválható-e f az origóban?

MO. Nem: 1) A parciálisok az origóban: $f(x, 0) = x$ minden x -re $\leadsto$

$\leadsto f_x(0, 0) = f'(x, 0) = 1, f(0, y) = -y$ minden y -ra $\leadsto f_y(0, 0) = f'(0, y) = -1$. 3p

2) $g(h, k) \doteq \frac{f(0 + h, 0 + k) - 0 - (1, -1) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\frac{h^3 - k^3}{h^2 + k^2} - (h - k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^2 k - k^2 h}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$ 3p

és g -nek nincs határértéke az origóban:

$g(h, 0) = 0 \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0, g(h, -h) = -\frac{2h^3}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{\sqrt{8}} \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} -\frac{2}{\sqrt{8}} \neq 0$. 4p

10p

Folytatás a következő oldalon.

4. Konvergens-e az alábbi numerikus sorok?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arctg n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \arctg^2 \frac{1}{n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cos \frac{1}{n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n$

MO.

(a) Divergens: $\arctg n \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow \frac{1}{n} \cdot \arctg n \sim \frac{1}{n}$ 3p

(b) Divergens: $\arctg^2 \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2} \rightsquigarrow n \arctg^2 \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ 3p

(c) Divergens: $\cos \frac{1}{n} \rightarrow 1 \rightsquigarrow n \cos \frac{1}{n} \rightarrow \infty$ 2p

(d) Konvergens: $\left| \frac{1}{n^2} \cos n \right| \leq \frac{1}{n^2}$ 2p
10p

5. Abszolút konvergens ill. feltételesen konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 9}$ sor?

MO. a) $a_n = \frac{n}{n^2 + 9} \sim \frac{1}{n}$, tehát nem abszolút konvergens. 3p

b) Leibniz-el feltételesen konvergens, mert $a_n \rightarrow 0$, 3p

és $n \geq 3$ -re monoton csökkenő, hisz ha $f(x) \doteq \frac{x}{x^2 + 9}$, akkor $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{(x^2 + 9)^2} \leq 0$ ha $x \geq 3$. 4p
10p

6.

(a) Igaz-e egy lineáris teret önmagába képező lineáris operátorra az, hogy

(a1) ha sajátértéke a 0, akkor nem kölcsönösen egyértelmű

(a2) ha nem kölcsönösen egyértelmű, akkor sajátértéke a 0.

(b) Melyik igaz, melyik nem egy f kétváltozós függvényre egy adott pontban?

(b1) Ha parciálisan deriválható, akkor folytonos.

(b2) Ha létezik az összes parciális derivált, akkor totálisan deriválható.

(c) Melyik igaz, melyik nem egy numerikus sorra?

(c1) Ha abszolút konvergens, akkor konvergens is.

(c2) Ha divergens, akkor a tagjai nem 0-hoz tartanak.

MO.

(a1) Igaz: mivel $\mathbf{A}0 = 0$, ha van $x \neq 0$, hogy $\mathbf{A}x = 0x = 0$ akkor $\mathbf{A}$ nem kölcsönösen egyértelmű. 1p

(a2) Igaz: ha $\mathbf{A}$ nem kölcsönösen egyértelmű, akkor van $x \neq y$, hogy $\mathbf{A}x = \mathbf{A}y \rightsquigarrow \rightsquigarrow \mathbf{A}(x - y) = 0 = 0(x - y)$ és $x - y \neq 0$. 3p

(b1) Nem: ha $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ az origón kívül és $f(0, 0) = 0$, akkor f -nek az origóban mindkét parciálisa létezik, de nem tehető folytonossá itt. 2p

(b2) Nem: lásd (b1), hisz folytonosság szükséges feltétele a deriválhatóságnak. 1p

(c1) Igaz: Cauchy konvergenca kritériummal, felhasználva, hogy $|\sum_n^m a_k| \leq \sum_n^m |a_k|$. 2p

(c2) Nem: pl. $\sum \frac{1}{n}$. 1p
10p