Hibaszámítás

A hibaszámítás lépései:

(1) A kimeneti függvény: $y=f(x_{1,}x_{2,}\ldots,x_n)=f(\underline{x})$

(2) A kimenet érzékenységének kiszámítása: $\underline{c}=\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\rightarrow c_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$

(3) A kimeneti érték hibája az egyes bemeneti paraméterek hibájából: $\Delta y_i=c_i\cdot\Delta x_i$

(4) A kimenet érték hibája (hibakomponensek összegzése):

- ➔ előjeles összegzés: $\Delta y=\sum_{i=1}^{n}\Delta y_i$
- ➔ Legrosszabb eset/worst case összegzés: $\Delta y=\sum_{i=1}^{n}|\Delta y_i|$
- ➔ Legvalószínűbb érték alapján: $\Delta y=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2}$

A relatív hiba: $\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta y}{f(\underline{x})}$

Hibaszámítás relatív hibákkal végig számolva:

Az első 2 lépés megegyezik:

(1) A kimeneti függvény: $y=f(x_{1,}x_{2,}\ldots,x_n)=f(\underline{x})$

(2) A kimenet érzékenységének kiszámítása: $\underline{c}=\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\rightarrow c_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$

A harmadik lépés esetén az abszolút hiba kifejezésből indulunk ki. Ahhoz, hogy az egyes hibakomponensekhez tartozó kimeneti érték hibáját relatív hibaként határozzák meg, az egészet el kell osztanunk y-nal:

$$\Delta y_i=c_i\cdot\Delta x_i\Rightarrow\frac{\Delta y_i}{y}=\frac{c_i}{y}\cdot\Delta x_i$$

A továbbiakban tehát a fenti képletet is alkalmazhatjuk a (3)-as pontban.
Ha adott a névleges érték, nincs semmi gond, hiszen a névleges érték és a relatív hiba segítségével az abszolút hibája – Δx_i – számítható. Az esetek nagy többségében, azonban a bemeneti paraméterekről semmilyen más információ nem adott csak a relatív hibája. Ilyen esetekben célszerű tehát a (3)-as lépésben a Δx_i abszolút hiba helyett bevezetni a $h=\Delta x_i/x_i$ relatív hibát. Ez úgy történik meg, hogy az előzőekben kapott egyenlet jobb oldalát x_i/x_i -vel bővítjük:

$$\frac{\Delta y_i}{y}=\frac{c_i}{y}\cdot\Delta x_i\Rightarrow\frac{\Delta y_i}{y}=\frac{c_i}{y}\cdot\Delta x_i\cdot\frac{x_i}{x_i}\Rightarrow\frac{\Delta y_i}{y}=\frac{c_i}{y}\cdot x_i\cdot\frac{\Delta x_i}{x_i}$$

A kapott eredményt még egy kicsit rendezve a következőt kapjuk:

$$\frac{\Delta y_i}{y}=c_i\cdot\frac{x_i}{y}\cdot\frac{\Delta x_i}{x_i}$$

Amit a következőképpen értelmezhetünk:

- c_i : A kimeneti változó érzékenysége az i. bemeneti paraméterre vonatkozóan
- $\frac{x_i}{y}$: Az i. bemeneti paraméter milyen súllyal befolyásolja a kimeneti változót (felfogható egyfajta súlytényezőként is)
- $\frac{\Delta x_i}{x_i}$: Az i. bemeneti változó relatív hibája
- $\frac{\Delta y_i}{y_i}$: A kimeneti változó relatív hibája az i. bemeneti változóra nézve

A fentiek alapján a (3)-as lépés relatív hibákkal felírva:

(3) $\frac{\Delta y_i}{y} = c_i \cdot \frac{x_i}{y} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i}$

(4) Hibakomponensek összegzése:

- ➔ előjeles összegzés: $\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta y_i}{y}$
- ➔ Legrosszabb eset/worst case összegzés: $\Delta y = \sum_{i=1}^{n} |\Delta y_i / y|$
- ➔ Legvalószínűbb érték alapján: $\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i / y)^2}$

Összefoglalva az egyes lépéseket relatív hibákkal számolva:

(1) A kimeneti függvény: $y = f(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n) = f(\underline{x})$

(2) A kimenet érzékenységének kiszámítása: $\underline{c} = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \rightarrow c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

(3) $\frac{\Delta y_i}{y} = c_i \cdot \frac{x_i}{y} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i}$

(4) Hibakomponensek összegzése:

- ➔ előjeles összegzés: $\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta y_i}{y}$
- ➔ Legrosszabb eset/worst case összegzés: $\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} |\Delta y_i / y|$
- ➔ Legvalószínűbb érték alapján: $\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i / y)^2}$

Példák

Példatár – 2.11. (A feladat szövege nem szó szerint lett idézve)
Adott $\underline{\underline{X}}$ 2x2-es mátrix, amelynek elemeit 50ppm relatív hibával ismerünk. Adja meg, hogy a lgrosszabb esetben mennyi az $\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{X}}^{-1}$ inverz mátrix elemeinek relatív hibája.

Megoldás:
Írjuk fel az $\underline{\underline{X}}$ mátrixot és inverzét általános alakban:

$$\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{X}}^{-1} = \frac{1}{det(\underline{\underline{X}})} \cdot \begin{bmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{bmatrix}$$

ahol a determináns:

$$det(\underline{\underline{X}}) = x_1 \cdot x_4 - x_2 \cdot x_3$$

Vizsgálatainkat a továbbiakban az inverz mátrix egy elemére, az y_1-re végezzük el.

(1) Függvénykapcsolat meghatározása:

$$y_1 = \frac{1}{det(\underline{\underline{X}})} \cdot x_4 = \frac{1}{x_1 \cdot x_4 - x_2 \cdot x_3} \cdot x_4$$

A fentiek alapján jól látható, hogy y_1 az $\underline{\underline{X}}$ összes elemétől függ. Ugyanez elmondható az $\underline{\underline{Y}}$ inverz mátrix többi eleméről is, hiszen mindegyik számolásában megjelenik az $\underline{\underline{X}}$

mátrix determinánsának reciproka, aminek számításához $\underline{\underline{X}}$ összes elemére szükség van.

(2) Érzékenység számítása: lánc-szabály felhasználásával

➔ x_1-re: $c_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_1}{\partial det(\underline{\underline{X}})} \cdot \frac{\partial det(\underline{\underline{X}})}{\partial x_1} = -x_4 \cdot \frac{1}{det^2(\underline{\underline{X}})} \cdot x_4 = -\frac{x_4^2}{det^2(\underline{\underline{X}})}$

➔ x_2-re: $c_2 = \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial y_1}{\partial det(\underline{\underline{X}})} \cdot \frac{\partial det(\underline{\underline{X}})}{\partial x_2} = x_4 \cdot \frac{1}{det^2(\underline{\underline{X}})} \cdot x_3 = \frac{x_4 \cdot x_3}{det^2(\underline{\underline{X}})}$

➔ x_3-ra: $c_2 = \frac{\partial y_1}{\partial x_3} = \frac{\partial y_1}{\partial det(\underline{\underline{X}})} \cdot \frac{\partial det(\underline{\underline{X}})}{\partial x_3} = x_4 \cdot \frac{1}{det^2(\underline{\underline{X}})} \cdot x_2 = \frac{x_4 \cdot x_2}{det^2(\underline{\underline{X}})}$

➔ x_4-re: $c_2 = \frac{\partial y_1}{\partial x_3} = \frac{det(\underline{\underline{X}}) - x_4 \cdot x_1}{det^2(\underline{\underline{X}})} = \frac{x_1 \cdot x_4 - x_2 \cdot x_3 - x_4 \cdot x_1}{det^2(\underline{\underline{X}})} = -\frac{x_2 \cdot x_3}{det^2(\underline{\underline{X}})}$

(3) Relatív hiba komponensenként:

➔ x_1-re: $\frac{\Delta y_{11}}{y_1} = -\frac{x_4^2}{det^2(\underline{\underline{X}})} \cdot \frac{det(\underline{\underline{X}})}{x_4} \cdot x_1 \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1} = -\frac{x_4 \cdot x_1}{det(\underline{\underline{X}})} \cdot h$

➔ x_2-re: $\frac{\Delta y_{12}}{y_1} = \frac{x_4 \cdot x_3}{det^2(\underline{\underline{X}})} \cdot \frac{det(\underline{\underline{X}})}{x_4} \cdot x_2 \cdot \frac{\Delta x_2}{x_2} = \frac{x_3 \cdot x_2}{det(\underline{\underline{X}})} \cdot h$

➔ x_3-ra: $\frac{\Delta y_{13}}{y_1} = \frac{x_4 \cdot x_2}{det^2(\underline{\underline{X}})} \cdot \frac{det(\underline{\underline{X}})}{x_4} \cdot x_3 \cdot \frac{\Delta x_3}{x_3} = \frac{x_2 \cdot x_3}{det(\underline{\underline{X}})} \cdot h$

➔ x_4-re: $\frac{\Delta y_{14}}{y_1} = -\frac{x_2 \cdot x_3}{det^2(\underline{\underline{X}})} \cdot \frac{det(\underline{\underline{X}})}{x_4} \cdot x_4 \cdot \frac{\Delta x_4}{x_4} = -\frac{x_2 \cdot x_3}{det(\underline{\underline{X}})} \cdot h$

(4) Hibakomponensek worst case összegzése:

$$\frac{\Delta y_1}{y_1} = \frac{h}{det(\underline{\underline{X}})} \cdot (|x_1 \cdot x_4| + 3 \cdot |x_2 \cdot x_3|) = 26{,}515$$

Szimmetria okokból következik, hogy az y_4-re is ugyanez az eredmény adódik:

$$\frac{\Delta y_1}{y_1} = \frac{\Delta y_4}{y_4} = 26{,}515$$

A fentiekhez hasonlóképpen levezethető y_2-re és y_3-ra is az alábbi összefüggés:

$$\frac{\Delta y_2}{y_2} = \frac{\Delta y_3}{y_3} = \frac{h}{det(\underline{\underline{X}})} \cdot (|x_2 \cdot x_3| + 3 \cdot |x_1 \cdot x_4|) = 26{,}505$$

További példák:

1) Az alábbi jegyzetben: http://portal.mit.bme.hu/oktatas/targyak/vimia206/jegyzet/mt-msc.pdf
2) Gyakorlatokon megoldott példák
3) Példatár 2. fejezetében lévő példák és megoldásaik