1. gyakorlat: Jelek leírása

1.1. Példa: a sávhatárolt fehér zaj

Egy jel (legyen pl. ξ) spektrális sûrûségfüggvénye

$$s_\xi(f)=\begin{cases} s_0, ha|f|\le B \\ 0, egyébként \end{cases}.$$

Az ilyen jel *sávhatárolt* (hiszen B-nél nagyobb frekvenciájú összetevõi nincsenek), és *fehér* (a nemzérus intenzitású jelösszetevõk azonos erõsségûek, s a fehér fény összetevõi is ilyenek). Határozzuk meg e jel autokorrelációs függvényét!

Megoldás:

Az autokorrelációs függvény a spektrális sûrûségfüggvény inverz Fourier transzformáltja:

$$R_\xi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(f)\cdot e^{j2\pi f\tau}df\ .$$

Most

$$R_\xi(\tau)=\int_{-B}^{B} s_0\cdot e^{j2\pi f\tau}df=s_0\cdot\left.\frac{e^{j2\pi f\tau}}{j2\pi\tau}\right|_{-B}^{B}=s_0\cdot\frac{e^{j2\pi f\tau}-e^{-j2\pi f\tau}}{j2\pi\tau}.$$

Felismerve a szinuszfüggvény Euler-féle alakját, írhatjuk, hogy

$$R_\xi(\tau)=2Bs_0\cdot\frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}.$$

Ez a függvény számos híradástechnikai modellben felbukkan. Lényeges tulajdonságai:

1/ Argumentumának növekedõ (abszolut) értékeire annak reciprokával majorálhatóan tûnik el (tart a zérushoz). Ez azt jelenti, hogy a jel távoli mintái között is van számottevõ kapcsolat.

2/ Zérus értéket vesz fel, valahányszor $\tau=k/(2B)$, ahol k egész, de nem zérus.

3/ A függvény globális maximuma $\tau=0$-ban van.

4/ Szépen látható, hogy páros függvény, de nem mindenütt pozitív függvény (viszont pozitív definit függvény, de ez más kérdés).

1.2. Példa: Exp. lecsengõ autokorrelációs függvényû folyamat

Egy jel (legyen pl. ξ) autokorrelációs függvénye

$$R_\xi(\tau)=R_0\cdot e^{-|\tau|/T}$$

Határozzuk meg a jel spektrális sûrûségfüggvényét!

Megoldás:

A megadott autokorrelációs függvény Fourier transzformáltját kell képezni:

$$s_\xi(f)=\int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau\ .$$

Most az autokorrelációs függvény szakaszonként eltérõ képlettel írható le, ezért

$$s_\xi(f)=\int_{-\infty}^{0}R_0\cdot e^{\tau/T-j2\pi f\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}R_0\cdot e^{-\tau/T-j2\pi f\tau}d\tau.$$

Az exponensben szereplõ független változót kiemelve, az integrálásokat elvégezve:

$$s_\xi(f)=R_0\left.\frac{e^{(1/T-j2\pi f)\tau}}{1/T-j2\pi f}\right|_{-\infty}^{0}+R_0\left.\frac{e^{(-1/T-j2\pi f)\tau}}{-1/T-j2\pi f}\right|_{0}^{\infty}.$$

A behelyettesítés után:

$$s_\xi(f)=R_0\frac{1}{1/T-j2\pi f}+R_0\frac{1}{1/T+j2\pi f}.$$

Elvégezve a kijelölt mûveletet:

$$s_\xi(f)=R_0\frac{2/T}{(1/T)^2+(2\pi f)^2}=\frac{2TR_0}{1+(2\pi fT)^2}.$$

Figyelemreméltó, hogy ez a spektrális sûrûségfüggvénye az elsõfokú aluláteresztõvel megszûrt szélessávú fehér zajnak, ha a szûrõ határfrekvenciája

$$f_0=\frac{1}{2\pi T}.$$

1.3. Példa: Visszhang hatása stacionárius jelre

Az η folyamat a zérus várható értékû, autokorrelációs függvényû, ξ stacionárius folyamat lineáris transzformáltja: $\eta_t=\xi_t-\xi_{t-T}$.

Határozzuk meg az η folyamat autokorrelációs függvényét, továbbá a ξ és az η folyamatok spektrális sûrûségfüggvényeinek hányadosát a frekvencia függvényében!

Megoldás:

Az autokorrelációs függvény:

$$\begin{aligned}L_\eta(t_1,t_2)&=M(\xi_{t_1}-\xi_{t_1-T})(\xi_{t_2}-\xi_{t_2-T})=\\&R_\xi(t_2-t_1)-R_\xi(t_2-t_1+T)-R_\xi(t_2-t_1-T)+R_\xi(t_2-t_1)=.\\&2R_\xi(t_2-t_1)-R_\xi(t_2-t_1+T)-R_\xi(t_2-t_1-T)\end{aligned}$$

Az autokorrelációs függvény csak az idõkoordináták különbségétõl függ, így a kimenõ folyamat stacionárius. A kimenõ jel autokorrelációs függvényének Fourier transzformáltja, azaz spektrális sûrûségfüggvénye:

$$\begin{aligned}s_\eta(f)&=2s_\xi(f)-s_\xi(f)\cdot e^{j2\pi fT}-s_\xi(f)\cdot e^{-j2\pi fT}=\\&s_\xi(f)\big(2-2\cos(2\pi fT)\big)=4\cdot s_\xi(f)\cdot\sin^2(\pi fT)\end{aligned}$$

A keresett hányados tehát:

$$4\cdot\sin^2(\pi fT).$$

Ki tudta volna ezt elõre megmondani (és milyen megfontolással)? Ötlet: mi lehet a megadott transzformáció átviteli függvénye?

1.4. Példa: Folyamat, egyenáramú realizációkkal

Adott a ξ sztochasztikus folyamat, amelyre $\xi_t=\alpha$, ahol α egy, az [-1,+1] intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó.

a) Határozza meg a folyamat várható érték idõfüggvényét!
b) Határozza meg a folyamat autokorrelációs függvényét!
c) Stacionárius-e (valamilyen értelemben) ez a folyamat?
d) Ergodikus-e ez a folyamat?

Megoldás:

a) , hiszen a szimmetrikus eloszlású valószínûségi változó várható értéke zérus.

b) $L(t_1,t_2) = M(\xi_{t_1}\xi_{t_2}) = M(\alpha^2) = \int_{-1}^{1} x^2/2\,dx = 1/3$.

c) Gyengén mindenképpen (hiszen a várható érték idõfüggvény konstans, s az autokorrelációs függvény csak az idõkülönbségtõl, pontosabban még attól sem függ). Erõsen is stacionárius, hiszen

$$F(x_1 \ldots x_n, t_1 \ldots t_n) = P(\xi_{t_1} \le x_1, \ldots \xi_{t_n} \le x_n) = P(\alpha \le \min_i x_i)$$

nem függ az idõpontoktól.

d) A folyamat nem ergodikus, egyetlen realizáció mit sem árul el a többiek viselkedésérõl. Az $\xi_t = \alpha = 1/2$ realizáció láttán semmi okunk se lenne sejteni, hogy pl. van negatív értékû realizáció is.

1.5. Példa: Jelérték predikciója, egyetlen minta alapján

A ξ valós folyamat zérus várható értékû, 2 V^2/kHz spektrális sûrûségû fehér zajból 1 kHz határfrekvenciájú aluláteresztõ szûréssel keletkezik. Határozza meg ξ várható érték idõfüggvényét a $t_1 = 2.0\ ms$ idõpillanatban, és $L_\xi(t_2, t_3)$ autokorrelációs függvényét, ha $t_2 = 3.0\ ms$ és $t_3 = 3.75\ ms$! Adja meg $\xi_{3.75ms}$ legjobb lineáris becslését, ha tudja, hogy $\xi_{3.0ms} = 0.8\ V$!

Megoldás:

A keletkezõ jel zérus várható értékû, sávhatárolt és fehér, autokorrelációs függvénye:

$$R_\xi(\tau) = 2Bs_0 \cdot \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}.$$

Így tehát $M(\xi_{t_1}) = 0$ és $L(\xi_{t_2}\xi_{t_3}) = R(t_3 - t_2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sin(2\pi \cdot 1 \cdot 0.75)}{2\pi \cdot 1 \cdot 0.75} = -\dfrac{8}{3\pi} \cong -0.8488\ V^2$

A legjobb elõrejelzés:

$$\hat{\xi}_{t_3} = \frac{R(t_3 - t_2)}{R(0)} \cdot \xi_{t_2} \cong -0.1698\ V.$$

1.6. Példa: Gauss folyamat

Ismert a ξ Gauss folyamat $m_\xi = 0$ várhatóérték-időfüggvénye és $\sigma^2 = 1$ szórásnégyzete.

a) Adja meg a ξ_t valószínűségi változó $f_\xi(x)$ sűrűségfüggvényét!
b) Határozza meg a ξ folyamat átlagteljesítményét!
c) Határozza meg $R_\xi(0)$ értékét!

d) Vezessük át a ξ folyamatot egy ideális négyzetreemelő áramkörön: $\zeta_t = \xi_t^2$! Határozza meg a ζ kimenő folyamat várható értékét!

Megoldás:

a) $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

b) $M(\xi_t^2) = 1$.

c) $R_\xi(0) = 1$.

d) $M(\zeta_t) = M(\xi_t^2) = 1$

1.7. Példa: Szinuszos realizációjú folyamat

Értelmezzük a ξ sztochasztikus folyamatot az alábbi módon:

$$\xi_t = a \cdot \cos(2\pi ft) + b \cdot \sin(2\pi ft),$$

ahol *a* és *b* valószínűségi változók. Ismert továbbá az, hogy $M(a^2) = 1$ és $f = 1kHz$.

a) Mely feltételeknek kell eleget tegyenek az *a* és *b* valószínűségi változók ahhoz, hogy a fentiekben megadott ξ folyamat gyengén stacionárius legyen?

Feltéve, hogy *a*-t és *b*-t úgy választottuk meg, hogy a ξ folyamat gyengén stacionárius,

b) határozza meg a ξ folyamat átlagteljesítményét és

c) az időkülönbség azon legkisebb értékét, amelynél a minták teljesen korrelálatlanok.

Megoldás:

a) A gyenge stacionaritás feltétele, hogy a várhatóérték időfüggvény állandó, és az autokorrelációs függvény csak az időpontok távolságának függvénye legyen.

A várhatóérték időfüggvény:

$$M(\xi_t) = M(a) \cdot \cos(2\pi ft) + M(b) \cdot \sin(2\pi ft),$$

mely akkor és csak akkor nem időfüggő, ha .

A folyamat autokorrelációs függvénye:

$$L(t_1, t_2) = M(\xi_{t_1}\xi_{t_2}) = M(a^2) \cdot \cos(2\pi ft_1)\cos(2\pi ft_2) + M(ab) \cdot \cos(2\pi ft_1)\sin(2\pi ft_2) +$$

$$+ M(b^2) \cdot \sin(2\pi ft_1)\sin(2\pi ft_2) + M(ab) \cdot \sin(2\pi ft_1)\cos(2\pi ft_2),$$

Egyszerű, ám ügyes átalakítással:

$$L(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\left(M(a^2) + M(b^2)\right) \cdot \cos\left(2\pi f(t_2 - t_1)\right) +$$

$$+ M(ab) \cdot \sin\left(2\pi f(t_1 + t_2)\right) + \frac{1}{2}\left(M(a^2) - M(b^2)\right) \cdot \cos\left(2\pi f(t_1 + t_2)\right)$$

A második sor tagjai az időpontok abszolut helyzetétől függenek, s az eredményt csak akkor nem befolyásolják, ha $M(ab) = 0 \quad \textit{és} \quad M(a^2) = M(b^2)$.

b) A folyamat átlagteljesítménye $L(t_1, t_1) = L(t_1, t_1) = R(0) = 1$.

c) Az autokorrelációs függvény első zérushelye a cos függvény argumentumának 1/2 értékénél van, ebből: $T = \frac{\pi}{2 \cdot 2\pi f} = 250\mu s$

2. gyakorlat: Mintavételezés, kvantálás, jeltömörítés

2.1. Példa: a mv.i frekvencia megválasztása

Egy valós értékû, stacionárius jel (egy 50 ohmos ellenálláson mért feszültség) spektrális sûrûségfüggvénye (a pozitív frekvenciák tartományában) általában zérus, kivéve a 0-3 *kHz* és a 7-8 *kHz* sávot, ahol értéke ugyanaz az állandó.
a) Hogyan viselkedik a jel spektrális sûrûségfüggvénye a negatív frekvenciákon?
b) Határozza meg a jel spektrális sûrûségét (azokon a frekvenciákon, ahol nem zérus), ha tudja, hogy a jel teljesítménye 0.2 *mW*!
c) Milyen frekvenciával kell ebbõl a jelbõl mintákat venni ahhoz, hogy a mintákból a jel tökéletesen visszaállítható legyen? Határozza meg az összes szóbajövõ frekvenciát, és adja meg a visszaállításhoz alkalmazandó szûrõ(ke)t!

<u>Megoldás:</u>

a) Valós értékû jel spektrális sûrûségfüggvénye páros függvény.
b) A sp. sûrûségfüggvény integrálja ("területe") a jel teljesítménye, ebbõl

$$s_0 = P_{jel} / (2 \cdot B_{össz}) = 0.2 / (2 \cdot 4) = 25\ \mu W / kHz\ .$$

Szigorúan véve az autokorrelációs függvény nem teljesítmény, hanem jel-négyzet dimenziójú, s így a Fourier transzformáltja jel-négyzet-per-frekvencia jellegû. Most a jel feszültség, s így $P_{jel} = U^2 / R$ alapján

$$s_0 = 50 \cdot 25\ \Omega \cdot \mu W / kHz = 1250\ (mV)^2 / kHz$$

c) felett minden mintavételi frekvencia megfelelõ, s ekkor a visszaállításhoz 8 *kHz* határfrekvenciájú (sõt: $f_s/2$ határfrekvenciájú) aluláteresztõ szûrõ megfelelõ.
Némi gondolkodással (s a spektrum "tologatásával") belátható, hogy a intervallumba esõ
mintavételi frekvenciák esetében sem jön létre a spektrum "átlapolódása", s így a mintasorozat spektrumából az analóg jelhez illeszkedõ áteresztõsávú szûrõvel az analóg jel komponensei (és csakis azok) "kiválogathatóak".

2.2. Példa: Szivárgás és aliasing

Egy 8 *kHz* mintavételi frekvenciával mûködõ PCM rendszer bemeneti és kimeneti szûrõje a zárótartományban (4 *kHz*-tõl) 40 *dB* csillapítású. A rendszer a 0.3-3.4 *kHz* átviteli sávban lényegében tökéletes, alakhû átvitelt biztosít. Így a rendszer bemenetére adott, 2 *V* amplitúdójú, 1.8 *kHz* frekvenciájú szinuszos jel hatására a kimenõ jel 1.8 *kHz*-s összetevõje ugyancsak 2 *V* amplitúdójú lesz.
a) Mennyi a kimenõ jel 6.2 *kHz* frekvenciájú összetevõjének az amplitúdója?
b) Milyen frekvenciájú összetevõi vannak még a kimenõ jelnek?
c) Milyen frekvenciájú komponensek jelen(het)nek meg a kimeneten, ha a bemenõ jelet egyenirányítjuk?

<u>Megoldás:</u>

a) A kimenõ szûrõ csillapítása miatt 20 *mV*.
b) Az $n \cdot 8 \pm 1.8$ *kHz* frekvenciájú összetevõk

c) A bemenõ jel egyenirányításával egy olyan periódikus jel keletkezik, amelynek az alapfrekvenciája $2 \cdot 1.8 = 3.6 kHz$, de ennek a felharmonikusai is számottevõ intenzitásúak. A keletkezõ termékek frekvenciája tehát $n \cdot 8 \pm k \cdot 3.6 kHz$.
Ezek között vannak olyan termékek is, amelyeket a kimenõ szûrõ kevéssé csillapít, pl. a 0.8 *kHz* és a 2.8 *kHz* frekvenciájú komponens.

2.3. Példa: Egyenletes (azonos lépcsőméretű) kvantálás

Tanultuk, hogy egyenletes kvantálásnál jól használható az a modell, amely a kvantálási zaj mintáit egyenletes eloszlású valószínűségi változóknak tekinti. Ezt a modellt alkalmazva
a) Bizonyítsa be, hogy a kvantálási zaj mintáinak várható értéke zérus!
b) Határozza meg a minták négyzetének várható értékét!
c) Határozza meg a minták szórásnégyzetét!
d) Következik-e ebbõl a modellbõl, hogy a kvantálási zaj spektrális eloszlása is egyenletes? Részletesen indokolja álláspontját!

Megoldás:

a) Az, hogy a minták eloszlása egyenletes, azt jelenti, hogy a sûrûségfüggvényük $f(x) = 1/\Delta\, ,\, ha\ x \in (-\Delta/2, \Delta/2)$, ahol 6 a kvantálási lépcsõ. Így a minták várható értéke:

$$M(\varepsilon_k) = \int_{-\Delta/2}^{-\Delta/2} x/\Delta \cdot dx = 0 .$$

b) $M(\varepsilon_k^2) = \int_{-\Delta/2}^{-\Delta/2} x^2/\Delta \cdot dx = \ldots = \Delta^2/12$

c) $D^2(\varepsilon_k) = M(\varepsilon_k^2) - M^2(\varepsilon_k) = \Delta^2/12$
d) Abból, hogy a minták egyénileg milyen arculatot mutatnak, önmagában szinte semmi sem következik együttes viselkedésükre (ko-varianciájukra). Az elméleti vizsgálódást viszont megkönnyíti az a modell, amely a mintákat függetlennek (de legalább korrelálatlannak) tekinti. E modellbõl már következik, hogy a spektrális eloszlás egyenletes.

2.4. Példa: A kvantálási zaj spektrális viselkedése

A gyengén stacionárius $x(t)$ jelet mintavételezzük, A/D átalakítóval digitalizáljuk, hibamentes digitális csatornán továbbítjuk, majd D/A átalakító és simító szûrõ segítségével visszaalakítjuk.
Az $x(t)$ jel spektrális sûrûségfüggvénye

$$s_{\square}(f) = 6 s_0 \cdot \left(1 - |f| / (12B)\right), ha 7B < |f| < 10B ,$$

egyébként zérus.
a) Mekkora lehet az a minimális mintavételi frekvencia, amely elvileg tökéletes jelvisszaállítást eredményez, ha a D/A átalakítót követõ szûrõ (alkalmasan választott határfrekvenciájú) aluláteresztõ?
b) Mekkora lehet az a minimális mintavételi frekvencia, amely elvileg tökéletes jelvisszaállítást eredményez, ha a D/A átalakítót követõ szûrõ tetszõlegesen megválasztható? Rajzolja fel a szûrõ átviteli függvényét!

c) Azonos (felbontású) átalakítókat alkalmazva az **a)** vagy a **b)** esetben lesz jobb a jel-zaj viszony a visszaállított jelben?
d) Milyen jel-zaj viszony változás várható akkor, ha az **a)** feladatban meghatározott sûrûségû jelmintákból a **b)** feladatban meghatározott szûrõvel állítjuk vissza a jelet?

Megoldás:

a) $20B$ a mintavételi frekvencia, $10B$ az aluláteresztõ szûrõ határfrekvenciája.
b) $20B/3$ a mintavételi frekvencia, a visszaállító szûrõ a $7B$-$10B$ között áteresztõ sávszûrõ.
c) Az (visszaállított) analóg jelben mutatkozó zaj spektrális sûrûsége

$$s_\varepsilon(f) = \frac{1}{f_s} M(\varepsilon_k^2) \cdot \left|H(f)\right|^2$$

A zaj mintáinak teljesítménye mindkét esetben azonos, a mintavételi frekvencia és a visszaállító szûrõ azonban különbözõ. A spektrális sûrûségfüggvényt integrálva az adódik, hogy az **a)** esetben a zaj teljesítménye $M(\varepsilon_k^2)$, míg a **b)** esetben ennek 0.9-szerese.
d) A zaj most a sávszélességkülönbségnek megfelelõen 0.3-szeresére csökken.

2.5. Példa: Elõrejelzés több minta alapján

Adott a ξ_k diszkrét stacionárius sztochasztikus folyamat, melynek autokorrelációs függvénye: $R_\xi(n) = 1/(1+n^2)$. Határozza meg a minimális négyzetes középhibát szolgáltató elsõ és másodfokú (lineáris) prediktort! Határozza meg mindkét elõrejelzés négyzetes középhibáját!

Megoldás:

Az egyetlen minta alapján mûködõ prediktorra:

$$R_0 a_1 = R_1 \;\Rightarrow\; a_1 \cdot 1 = 1/2.$$

Így tehát a legjobb elsõfokú prediktornál: $a_1 = 1/2$.
Az elõrejelzés négyzetes középhibája:

$$\mathrm{E} = R_0 - a_1 \cdot R_1 = 1 - 1/2 \cdot 1/2 = 3/4.$$

A két minta alapján mûködõ prediktorra:

$$\begin{matrix} R_0 a_1 + R_1 a_2 = R_1 \\ R_1 a_1 + R_0 a_2 = R_2 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1/2 = 1/2 \\ a_1 \cdot 1/2 + a_2 \cdot 1 = 1/5 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} a_1 + a_2/2 = 1/2 \\ a_1 + 2 \cdot a_2 = 2/5 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} 3/2 \cdot a_2 = -1/10 \\ 3/4 \cdot a_1 = 4/10 \end{matrix}$$

és így .
Az elõrejelzés négyzetes középhibája:

$$\mathrm{E} = R_0 - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 = 1 - 8/15 \cdot 1/2 + 1/15 \cdot 1/5 = 56/75.$$

A javulás igen csekély, mindössze 1/300.

2.6. Példa: Elõrejelzés több minta alapján

Az $x(t), t \in (-\infty, \infty)$ gyengén stacionárius sztochasztikus folyamat autokorrelációs függvénye:

$$R(t) = R_0 \cdot e^{-|t/T|}$$

a) Határozza meg, és rajzolja fel a folyamat spektrális sűrűségfüggvényét!
b) Az x jelet egy B határfrekvenciájú aluláteresztő szűrővel szűrjük. Határozza meg a szűrő kimeneti jelének teljesítményét!
c) Jelölje x_k az eredeti x folyamatból T közönként vett mintákat, azaz legyen $x_k = x(kT)$! Határozza meg az x_k értékek négyzetes középben legjobb lineáris előrejelzését szolgáltató

$$\hat{x}_k = a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2}$$

másodrendű prediktor együtthatóit!

Megoldás:

a) Ezt a feladatot az elsõ gyakorlaton megoldottuk, F. transzformáltat kell számolni, külön integrálva a t változó negatív és pozitív értékeire. Az eredmény:

$$s(f) = \frac{2R_0T}{1+(2\pi fT)^2}.$$

b) $P_{ki} = \int_{-B}^{B} s(f)df = \frac{1}{2\pi fT} \cdot 2R_0T \cdot 2\arctan(2\pi BT) = R_0 \frac{2}{f}\arctan(BT)$

c) $R_0 = R_0, \quad R_1 = e^{-1} \cdot R_0, \quad R_2 = e^{-2} \cdot R_0$, így az egyenletrendszer:

$$\begin{matrix} R_0a_1 + R_1a_2 = R_1 \\ R_1a_1 + R_0a_2 = R_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_0a_1 + e^{-1}R_0a_2 = e^{-1}R_0 \\ e^{-1}R_0a_1 + R_0a_2 = e^{-2}R_0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 + e^{-1}a_2 = e^{-1} \\ e^{-1}a_1 + a_2 = e^{-2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} e^{-1}a_1 + e^{-2}a_2 = e^{-2} \\ e^{-1}a_1 + a_2 = e^{-2} \end{matrix}$$

A megoldás tehát: $a_2 = 0 \quad és \quad a_1 = e^{-1}$. Az eredmény érdekessége, hogy a legjobb másodfokú prediktor nem különbözik az elsõfokútól.

2.7. Példa: Tömörítés rekurzív kódolóval

Egy jel két megelõzõ mintán alapuló, (négyzetes középben) legjobb elõrejelzése: $\hat{x}_k = x_{k-1} - 0.8 \cdot x_{k-2}$.Tekintsük azt a rekurzív kódolót, amelyben az e szabálynak megfelelõ másodfokú prediktort alkalmazzák! A kódolóban a kvantáló a legközelebbi egész számra kerekít.
a) Rajzolja fel a kódoló és a dekódoló blokkvázlatát!
b) Határozza meg a kvantáló kimenõ mintáját, ha az aktuális bemenõ minta 7, a megelõzõ ütemben dekódolt minta 3, az azt megelõzõben dekódolt minta pedig -8!
c) Határozza meg ugyanezen jel egyetlen mintán alapuló legjobb elõrejelzését (az $\hat{x}_k = a \cdot x_{k-1}$ alakú becslésben az a paraméter értékét)!

Megoldás:

a) A prediktort külön rajzoljuk ki, mert egyébként kusza lesz a rajz.
b) A kvantáló bemenetén: 7-(3-0.8*(-8))=-2.4. A kvantáló kimenete tehát -2.
c) A kétmintás elõrejelzési feladat megoldását ismerve a jel autokorrelációs együtthatóit kiszámíthatjuk. Legyen az egyszerûség kedvéért a jel teljesítménye 1, ekkor igaz kell legyen, hogy

$$1 \cdot 1 - r_1 \cdot 0.8 = r_1 \quad és \quad 1 \cdot r_1 - 1 \cdot 0.8 = r_2.$$

Az elsõ egyenletbõl $r_1 = 1/1.8$=0.555, s éppen ez a legjobb egymintás elõrejelzési szabály együtthatója is.

3. gyakorlat: Átvitel rádión, átviteli rendszerek zaja

3.1. Példa

Számítsa ki a 10 *km* szakasztávolságú, 450 *MHz* frekvencián üzemelõ rádióösszeköttetés szabadtéri csillapítását! Az adó és a vevõantenna nyeresége egyaránt 20 *dB*. Határozzuk meg a vett jel feszültségét, ha a leadott jel teljesítménye 1 *watt*, a vevõ bemenõ impedanciája (az antenna hullámimpedanciája) pedig 50 8!

Megoldás:

Ismétlésképpen felidézzük, hogy szabadtéri terjedésrõl akkor beszélünk, ha a hullám homogén térben terjed, nincs reflexió, szóródást okozó akadály. A szakaszcsillapítás az adóantennába betáplált és a vevõantennából kicsatolt teljesítmény hányadosa (logaritmikus egységben, *dB*-ben). Az adóantennába betáplált $P_{adó}$ teljesítmény r távolságban S teljesítménysûrûséget hoz létre:

$$S = \frac{P_{adó} \cdot G_T}{4\pi r^2},$$

ahol figyelembe vettük az adóantenna irányítottságát is. A vett jel teljesítménye a vevõantenna hatásos felületétõl is függ:

$$P_{vett} = S \cdot A_h \,, \; ahol \quad A_h = G_R \frac{\lambda^2}{4\pi}.$$

Mindent összevetve:

$$P_{vett} = \frac{P_{adó} \cdot G_T \cdot G_R \cdot \lambda^2}{4\pi \cdot r^2 \cdot 4\pi},$$

ahonnan:

$$a_{sz} = \frac{P_{adó}}{P_{vett}} = \left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{1}{G_T} \cdot \frac{1}{G_R}.$$

Behelyettesítve és áttérve logaritmikus léptékre:

$$a_{sz}^{[dB]} = 10\lg\left(\frac{4\pi \cdot 10^4}{2/3}\right)^2 - 20 - 20 \cong 80 + 20\lg(19) - 40 = 65.5dB.$$

A vett jel teljesítménye a szakaszcsillapításból számítható:

$$P_{vett} = P_{adó} \cdot 10^{-65.5/10} = 1 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{0.45} \cong 0.282 \mu W.$$

Ez a teljesítmény az antenna hullámimpedanciájához illesztett bemeneti kapun hoz létre feszültséget:

$$U_R = \sqrt{P_{vett} \cdot R} = \sqrt{2.82 \cdot 10^{-7} \cdot 50} = 10^{-3} \cdot \sqrt{14.1} \cong 3.75 mV.$$

3.2. Példa: Kétutas terjedés

Vizsgálja meg, miként függ a vételi térerõsség a szakasztávolságtól és a vevõantenna magasságától kétutas hullámterjedés esetén!

És a példa: egy 10 *km* szakasztávolságú földfelszíni rádióösszeköttetés vevõantennája 10 *m* magasságban van. Akár növeljük, akár csökkentjük az antenna magasságát, a vett jel teljesítménye csökken. Tudjuk, hogy az adóantenna 20 *m* magasságban van, s azt is, hogy mindkét antenna nyeresége 10-10 *dB*.

a) Mekkora az üzemi hullámhossz?

b) Mekkora a szakaszcsillapítás?

Megoldás:

Az eredõ hullám a kétutas terjedés miatt két hullám összegeként keletkezik: az egyik a direkt hullám, a másik a jól vezetõ földfelszínen visszavert összetevõ. Az eredõ térerõsség nyilván

$$E_R = E_0 + \Gamma_f \cdot E_0 e^{-j2\pi\Delta/\lambda}$$

alakú, ahol szerepel a föld reflexiós tényezõje (többé-kevésbé ráhúzható, hogy mínusz egy), és az útkülönbség. Az útkülönbség egy bûvös ábrával kényelmesen kiszámítható:

$$\Delta = \frac{2 \cdot h_T h_R}{r},$$

ahol a számlálóban az antennamagasságok szerepelnek, a nevezõben pedig a szakasztávolság (az antennák talpponti távolsága) foglal helyet. Behelyettesítve:

$$|E_R| = |E_0| \cdot \left|e^{-j\pi\Delta/\lambda}\right| \cdot \left|e^{+j\pi\Delta/\lambda} - e^{-j\pi\Delta/\lambda}\right| = 2|E_0| \cdot |\sin(\pi\Delta/\lambda)|.$$

Végeredményben:

$$|E_R| = 2|E_0| \cdot \left|\sin\left(\pi \frac{2h_T h_R}{r \cdot \lambda}\right)\right|.$$

Néhány megjegyzés:

Nagy szakasztávolságok mellett a szinuszfüggvény argumentuma kicsiny, s a függvény értéke jól közelíthetõ magával az argumentummal. Ekkor tehát az eredõ térerõ nagyjából fordítottan arányos a szakasztávolsággal. A vett jel teljesítménye ezért ebben a zónában a szakasztávolság negyedik hatványa szerint csökken. Pontosabban:

$$a_{kétutas} = a_{egyutas} \cdot \left|\frac{E_0}{E_R}\right|^2 \cong \left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{G_T G_R} \left(\frac{r \cdot \lambda}{4\square h_T h_R}\right)^2,$$

amelybõl egyszerûsítések után:

$$a_{kétutas} \cong \frac{1}{G_T G_R} \left(\frac{r^2}{h_T h_R}\right)^2.$$

Ami a legmegrázóbb (örömteli tény): eltûnt a csillapítás frekvenciafüggése (na persze az antennanyereségeké megmarad).

Ha $r < 4h_T h_R / \lambda$, akkor a szinusz argumentuma nagyobb 1/2-nél. E határon belül beszélünk interferencia-zónáról. Bizonyos szakaszonként teljes kioltás léphet fel, a szakaszhossz függ a vevõantenna magasságától is.

A térerõsség az antennamagasság periódikus függvénye.

És most a példa megoldása:

a) Most $\left|\sin\left(2\pi \frac{h_T h_R}{\lambda r}\right)\right| = 1$, tehát az argumentum $2\pi \frac{h_T h_R}{\lambda r} = \frac{\pi}{2} + k\pi$. A legkevésbé sallangos megoldásban k=0, így 1=1/12.5=0.08 *m*.

b) Kiszámítjuk a szabadtéri terjedés szakaszcsillapítását, s azt csökkentjük az interferencia ezúttal kedvezõ hatása miatti 6 *dB*-vel (kétszeres térerõ egyenlõ négyszeres teljesítmény).

$$a_{sz} = 20\lg\left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right) - G_T^{dB} - G_R^{dB} = ... \cong 104 dB.$$

A válasz tehát kb.98 *dB*.

3.3. Példa

Milyen magasan kell elhelyezni a vevõantennát, ha a terjedés kétutas, és az antenna levezetõ kábelének csillapítása 0.2 *dB/m*? Az adóantenna magassága 20 *m*, a szakasztávolság 5 *km*, az üzemi frekvencia 450 *MHz*.

<u>Megoldás:</u>

A vevõ bemenetén kialakuló feszültség arányos a vételi térerõvel:

$$U_{vett} = U_0 \cdot 10^{-\alpha \cdot h_R/20} \cdot \sin\left(\pi \frac{2h_T h_R}{r \cdot \lambda}\right).$$

Nyilván megfelelõ, ha a vett feszültség relatív értékének természetes logaritmusát vizsgáljuk:

$$\Lambda = \ln\left(\frac{U_{vett}}{U_0}\right) = -\alpha \cdot h_R \cdot \ln(10)/20 + \ln\left(\left| \cdot \sin\left(\pi \frac{2h_T h_R}{r \cdot \lambda}\right)\right|\right).$$

Abban a (minimális) magasságban, ahol a térerõ már elég nagy, a szinuszfüggvény még nyilván pozitív értékû (az abszolut érték nem okoz gondot). A szélsõérték helyén a derivált zérus:

$$\frac{d\Lambda}{dh_R} = -\alpha \cdot \ln(10)/20 + \pi \frac{2h_T}{r \cdot \lambda} \cdot ctg\left(\pi \frac{2h_T h_R}{r \cdot \lambda}\right) = 0.$$

Ez az egyenlet könnyûszerrel megoldható:

$$h_R = \frac{r \cdot \lambda}{h_T} \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\pi \frac{2h_T}{r \cdot \lambda} \frac{8.7}{\alpha\square}\right) = \frac{r \cdot \lambda}{h_T} \frac{1}{2\pi} \cdot 1.022,$$

és ebbõl további behelyettesítéssel 27.12 *m* adódik megoldásnak, szemben a kábel nélküli 41.67 *m*-el.

3.4. Példa

Határozza meg a levezetõ kábelbõl és elõerõsítõbõl álló rendszer zajtényezõjét, mindkét sorrendû összekapcsolás esetén! A kábel hossza 15 *m*, csillapítástényezõje 1 *dB/m*, hõmérséklete 290 *K*, az erõsítõ zajtényezõje 3 *dB*, erõsítése 20 *dB*.

<u>Megoldás:</u>

Elõször tekintsük az antenna - levezetõ kábel - elõerõsítõ sorrendû elrendezést! Ekkor

$$G_1 = \frac{1}{L} = \frac{1}{31.62}, \text{ hiszen } L = 1 \cdot 15 = 15dB = 31.62.$$

A láncbakapcsolt négypólusok zajtényezõjére nyert kifejezés szerint pedig:

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} = 31.62 + \frac{2-1}{1/31.62} = 2 \cdot 31.62 \Rightarrow 15 + 3 = 18dB.$$

A másik, antenna - elõerõsítõ - levezetõ kábel sorrend egészen más eredményt szolgáltat. Ekkor:

$$F = 2 + \frac{31.62 - 1}{100} \cong 2.3 \Rightarrow 3.6dB.$$

Tanulság: a csillapítás a zaj szempontjából kritikus hatás, hiszen a jelet gyengíti, a zajt viszont termeli. Ahol lehet, kerülni kell, illetve körültekintõen kell bánni vele.

3.5. Példa

Mekkora romlást okoz az eredõ zajhõmérsékletben az antennát és a vevõt összekötõ 1 *dB* csillapítású, 290 *K* hõmérsékletû kábel, ha az antenna saját zajhõmérséklete 20 *K*? A vevõ zajtényezõje 0.5 *dB*. Mekkora a romlás *dB*-ben kifejezve?

Megoldás:

Levezetõ kábel nélkül:

A zajtényezõ $F = 1 + \frac{T_{redukált}}{T_0}$ lévén, $T_{redukált} = T_0 \cdot (F-1) = 290 \cdot (1.122 - 1) = 35.4K$, így

$$T_{eredõ} = T_{antenna} + T_{redukált} = 20 + 35.4 = 55.4K .$$

Ha beiktatjuk a kábelt, akkor - mint azt az elõzõ példában láttuk -, az antennára csatlakozó komplexum zajtényezõje az L- szeresére nõ, most 0.5 *dB* helyett 1.5 *dB* lesz. Szorzószámban 1.122 helyett 1.41 lép fel. Így tehát:

$$T_{eredõ} = 20 + 290 \cdot 0.41 = 139.8K ,$$

$$\text{ami } 10\lg\left(\frac{139.8}{55.4}\right) = 4dB$$

leromlást jelent.

3.6. Példa

Egy 40 *K* zajhõmérsékletû antenna 1 *dB* csillapítású, szobahõmérsékletû kábellel csatlakozik egy erõsítõhöz. Az antenna által vett jel teljesítménye 1 *nW*, sávszélessége 20 *MHz*. Határozza meg, legfeljebb mekkora lehet az erõsítõ zajtényezõje, ha a kimenetén elvárt jel-zaj viszony 39 *dB* ($k = 1.38 \cdot 10^{-23}\, Ws/K$)!

Megoldás:

Az antenna talppontjára redukált zajteljesítmény: 1/8000 *nW*, azaz 0.125 *pW*, az eredõ zajhõmérséklet *P*/*kT*=...=450 *K*. A kábel és az erõsítõ együttesének eredõ zajhõmérséklete tehát 450-40=410 *K*, amibõl az eredõ zajtényezõjük *LF*=2.41. Ebbõl az erõsítõ zajtényezõjére az *F*=1.91 korlátot kapjuk.

4. Forráskódolás és hibavédõ kódolás

4.1. Példa: forráskódolás

a) Lehet-e olyan egyértelmûen megfejthetõ bináris kódot szerkeszteni, amelyben a kódszavak hossza rendre 2,3,3,3,3,4,4,4,5,5?
b) Mekkora lehet ennek a forrásnak az entrópiája, ha tudjuk, hogy éppen megegyezik az **a)** kérdésben szereplõ kód átlagos szóhosszúságával?

Megoldás:

a) A Kraft egyenlõtlenség egyenlõséggel teljesül, tehát lehet.
b) A feladat szövege szerint: $\sum_{i=1}^{10} p_i \cdot ld\left(\frac{1}{p_i}\right) = \sum_{i=1}^{10} p_i \cdot l_i$, ez viszont akkor bizonyosan teljesül, ha $ld(1/p_i) = l_i, ha\, i = 1...10$, azaz $p_i = 2^{-l_i}$. Így a kérdezett entrópia 49/16. Igényes megoldás megemlítené: ez (még) nem bizonyítja, hogy nincs más, ugyanilyen tulajdonságú valószínûségeloszlás.

4.2. Shannon kód szerkesztése

A forrásszimbólumokat valószínûségeik szerint csökkenõ sorba rendezzük, azaz $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$. Shannon szerint mármost az i-edik szimbólumot megjelenítõ kódszó az $F_i \in [0,1)$ szám $l_i = \lceil ld\, 1/p_i \rceil$ bitre csonkolt értéke, ahol $F_1 = 0$ és

$$F_i = \sum_{k=1}^{i-1} p_k \quad , ha\; i = 2, 3, \ldots, n.$$

Az alábbi táblázat egy 6 szimbólumos forrás kódjának elkészítését mutatja.

szimb./i	x1/1	x2/2	x3/3	x4/4	x5/5	x6/6
p_i	0.4	0.25	0.12	0.1	0.08	0.05
l_i	2	2	4	4	4	5
F_i	0.0	0.4	0.65	0.77	0.87	0.95
bináris F_i	0.00000	0.01100	0.10100	0.11000	0.11011	0.11110
kódszó	**00**	**01**	**1010**	**1100**	**1101**	**11110**

A Shannon kód gyakran rövidíthetõ. Példánkban látható, hogy az utolsó szimbólumhoz tartozó kódszó utolsó eleme elhagyható, a kód ettõl még prefix (mentes) marad. Hasonlóképpen, elhagyható a harmadik kódszó utolsó eleme is. Ha sort tudunk rá keríteni - elég idõnk van - célszerû kiszámítani a kód átlagos szóhosszát, s összevetni az entrópiával.

Azt, hogy ezzel az eljárással prefix (azaz prefix-mentes) kódot állítunk elõ, egyszerûen lehet bizonyítani. A kódszavak elé egy bináris pontot képzelve valamennyi kódszó megfelel egy 0-1 közötti számnak. Vegyük észre, hogy az l hosszú a szám (kódszó) csak azoknak a b kódszavaknak (számoknak) lehet az elõtagja, amelyekre

$$b < a + 2^{-l}.$$

Az l_{i-1} hosszúra csonkolt F_{i-1} tehát csakis olyan számoknak lehet az elõtagja, amelyekre

$$b < csonkolt(F_{i-1}) + 2^{-l_{i-1}} \le F_{i-1} + 2^{-l_{i-1}} \le F_{i-1} + p_{i-1} = F_i$$

Tehát: az l_{i-1} hosszú i-1-edik kódszó nem lehet elõtagja sem az i-ediknek, sem pedig a többieknek. Ezt a bizonyítást nem kell elmondani, de jó, ha mi tudjuk.

4.3. Jellegzetes zéhá példa

Egy diszkrét, emlékezetnélküli, véletlen forrás szimbólumait a

$$P = \{0.5, 0.25, 0.15, 0.1\}$$

valószínuségeloszlás szerint szolgáltatja. Pistike alkot egy kódot, amelyben a kódszavak a szimbólumok fenti sorrendjében a következoek:

(01), (10), (011), (1011).

a) Egyértelmuen dekódolható-e a fenti kód (indokolja válaszát) ?
b) A fenti kódhosszúságokkal lehet-e prefix mentes kódot konstruálni ?
c) Határozza meg a várható kódszóhosszat! Milyen messze esik ez az érték a tömöríthetoség elvi alsó határától (adja meg az eltérést %-ban)?

Megoldás:

a) Tekintve, hogy az elso kódszó elotagja a harmadiknak, s a második is a negyediknek, az a gyanunk ébredhet, hogy az egyértelmu megfejthetoséggel is baj lehet. Valóban, ha például az adó kétszer egymás után a harmadik kódszót adja: 011 011, akkor a kódolt jelnek ezt a szakaszát akár 01 1011-nek is olvashatjuk. Pistike kódja tehát nem egyértelmuen megfejtheto kód. Megjegyezzük, sok olyan kód létezik, ami noha nem prefix (mentes), ennek ellenére egyértelmuen megfejtheto.
b) A Kraft egyenlotlenség teljesül a 2, 2, 3, 4 számokra, hiszen 1/4+1/4+1/8+1/16 < 1, ezért e szóhosszakkal lehet prefix kódot szerkeszteni, pl. (00), (01), (100), (1100).
c) A várható kódszóhossz:

$$L = L = 0.5 \cdot 2 + 0.25 \cdot 2 + 0.15 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 = 2.05$$

A tömöríthetoség alsó határát a z eloszlás entrópiája adja, ez most

$$H(P) = 0.5 \cdot ld(1/0.5) + 0.25 \cdot ld(1/0.25) + 0.15 \cdot ld(1/0.15) + 0.1 \cdot ld(1/0.1).$$

Nekem így 1.7428 jött ki.

4.4. Példa: hibavédelem blokk kóddal

Adott egy lineáris kód a kódszavaival:

$$c_1 = [0\,0\,0\,0\,0] \quad c_2 = [1\,0\,1\,0\,0] \quad c_3 = [0\,1\,1\,1\,0] \quad c_4 = [1\,1\,0\,1\,0]$$

a) Adja meg a kód generátormátrixát!
b) Határozza meg az egyhibás átvitelhez tartozó szindrómákat!
c) Létrehozható-e egyetlen kódszó módosításával olyan lineáris kód, amely minden egyhibát javít?

Megoldás:

a) Mivel a kódszavak száma 4, az üzenetvektorok mérete k=2, így a generátormátrixnak két sora (és természetesen 5 oszlopa) van. Bázisvektornak csak c_1 nem választható, a többiek közül bármelyik kettõ megfelel. Pl.

$$G=\begin{bmatrix}c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10100\\01110\end{bmatrix}.$$

Ez a generátormátrix ráadásul szisztematikus kódot állít elõ.

b) Állítsuk elõ a paritásellenõrzõ mátrix transzponáltját:

$$H^T=\begin{bmatrix}100\\110\\100\\010\\001\end{bmatrix}.$$

E mátrix sorai éppen az egyhibás hibamintákhoz tartozó szindrómákat tartalmazzák. Látható, hogy van két egyezõ sor, tehát van két olyan egyhibás helyzet, amelyeket ez a kód nem tud megkülönböztetni (elsõ és harmadik pozíció hibája).

c) Nem. A csupa nulla kódszó eleme kell legyen a kódnak, hiszen a kód lineáris, õ tehát nem módosítható. A maradék három kódszó bármelyikében bármit változtatunk, valamelyik másik kódszónak is változni kell, ha a kód linearitását meg akarjuk õrizni. Ha pl. a paritásellenõrzõ mátrix transzponáltjának elsõ sorát módosítjuk, legyen az most (101), akkor módosul c_2, új értéke $c_2=[10101]$, de változik c_3 is, hiszen õ c_1 és c_2 összege kell legyen.

4.5. Példa: hibavédelem blokk kóddal

A bináris, lineáris és szisztematikus (23,12) Golay kód 6 hiba jelzésére képes.

a) Mekkora lehet e kód minimális távolsága?

b) Hány hiba javítására lehet alkalmas ez a kód?

c) Hány kódszava van ennek a kódnak?

d) Hányféle szindróma képzõdhet e kód alkalmazásánál? Hány szindróma jelez egy-, két- és háromhibás hibamintát?

e) Felismerhetõ-e, ha a valamelyik kódszót négy hiba éri?

f) Mely elemei hibásodhattak meg a kódszónak, ha a dekódolásnál számolt szindróma

$$s=(\overset{1}{0}\,\overset{2}{0}\,\overset{3}{1}\,\overset{4}{0}\,\overset{5}{0}\,\overset{6}{0}\,\overset{7}{0}\,\overset{8}{0}\,\overset{9}{1}\,\overset{10}{0}\,\overset{11}{0})\ ?$$

Megoldás:

a) 6 hiba garantáltan akkor jelezhetõ, ha a kódtávolság (legalább) 7.

b) Ha a kódtávolság 7, akkor 3 hiba garantáltan javítható.

c) Az üzenetvektorok 12 bitesek, tehát a kódszavak száma $2^{12}=4096$.

d) A szindróma 23-12=11 bites, tehát 2024 féle szindróma van. 23 féle egyhibás helyzet lehetséges, $23 \cdot 22/2 = 253$ féle kéthibás helyzet van, a háromhibás lehetõségek száma pedig $23 \cdot 22 \cdot 21/(2 \cdot 3) = 1771$.

e) A hibás kódszó ténye felismerhetõ, az azonban, hogy a hibás kódszó négy vagy három hiba következtében jött-e létre, már nem állapítható meg, ugyanis ez a kód perfekt kód. Ez azt jelenti, hogy a legfeljebb három hibás kódszavak teljesen kitöltik a teret ($1 + 23 + 253 + 1771 = 2048$), s így egy kódszó bármely negyedik szomszédja biztosan harmadik szomszédja valamelyik másik kódszónak.

f) Feltételezzük, hogy a paritásellenõrzõ mátrix $\boldsymbol{H} = \left(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{I}\right)$ alakú. A szindróma úgy keletkezik, hogy a vett sorozatot szorozzuk e mátrix transzponáltjával, s ez végsõ soron egyenlõ lesz az $\boldsymbol{eH}^T$ szorzattal, ahol $\boldsymbol{e}$ a hibaminta. Rá lehet jönni, ha a hibaminta 12+3=15. és 12+9=21. eleme 1 értékû, akkor éppen a megadott szindróma keletkezik, hiszen ezeket az elemeket a mátrix egységmátrix almátrixa szorozza.

4.6. Hibajavítás lineáris kóddal

Vizsgáljuk azt a bináris (8,4) kódot, amelynek generátormátrixa

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Állapítsuk meg, szisztematikus-e ez a kód, és állítsuk elõ a paritásellenõrzõ mátrixát! Próbáljuk meg kitalálni, hány hiba jelzésére/javítására lehet alkalmas! Képezzük azt a generátormátrixot, amely szisztematikusan állítja elõ ugyanezt a kódot! Képezzük az $u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ üzenethez tartozó kódszót, s tételezzük fel, hogy e kódszó elsõ bitje meghibásodik! Demonstráljuk a (táblázatos) hibajavítás folyamatát!

Megoldás:

A mátrix baloldalán elhelyezkedõ almátrix nem egységmátrix, tehát a kód nem lehet szisztematikus.

A mátrix sorai mind kódszavak, s legtöbbjük csak három 1-es elemet tartalmaz (a súlyuk 3). E kódszavak távolsága a csupa 0-t tartalmazó kódszótól (amely minden lineáris kódnak eleme) mindössze 3. Következésképpen e kód minimális távolsága sem lehet háromnál nagyobb. Hogy nem is kisebb, ez csak akkor látszik, ha valamennyi kódszót elõállítjuk, s kikeressük közülük a minimális súlyút. Az a kód, amelynek a kódtávolsága 3, 2 hibát jelezni, 1 hibát javítani tud.

A mátrix két utólsó sorát összeadva a balodali egységmátrix létrehozható:

$$\boldsymbol{G}_{sz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A paritásellenõrzõ mátrix:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\boldsymbol{u}$ üzenethez tartozó kódszó:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{G}_{sz} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A meghibásodott kódszó:

$$\hat{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezt szorozzuk a paritásellenõrzõ mátrix transzponáltjával, hogy elõállítsuk a szindrómát:

$$\boldsymbol{s} = \hat{\boldsymbol{c}} \cdot \boldsymbol{H}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Már csak az lehet kérdés, melyik egyhibás hibavektornak ez a szindrómája. Természetesen annak, amelynek az elsõ eleme 1. Érdemes megfigyelni, hogy az a kéthibás hibavektor, amelynek az *utolsó* két eleme 1, ugyanezt a szindrómát szolgáltatja.

5. Analóg modulációs eljárások

5.1. A lineáris modulációs lánc alapsávi ekvivalense

Bizonyítsa be, hogy az 5.1.ábra szerinti, $H_P(.), H_D(.), H_{Ch}(.)$ átviteli függvényekkel és az F frekvenciával, mint vivõfrekvenciával jellemzett lineáris (szorzó demodulátoros) rendszer tulajdonképpen a

$$H_e(f) = H_P(f)\frac{H_{Ch}(f+F)+H_{Ch}(f-F)}{4}H_D(f)$$

átviteli függvényû lineáris transzformációt valósítja meg!

Megoldás:

Kísérjük végig, mi történik a bemenõjel egyetlen, f frekvenciájú harmonikus (nem szinuszos, hanem komplex exponenciális) összetevõjével! A 6.1.ábra egyes pontjain ezeket a jeleket tüntettük fel. Az áttekintés fontos tanulsága, hogy a bizonyítandó tétel csak korlátozással érvényes: nem ad számot a keletkezõ (demodulált) jel $f-2F$, illetve $f+2F$ frekvenciájú összetevõjérõl. Egyúttal persze az is megállapítható, hogy ezek az összetevõk *értelmes* paraméterértékek esetén elhanyagolhatóak. Megjegyezhetõ, hogy a TV képjel átvitelére éppen ilyen modulációs eljárást használnak.

További megjegyzés: a vizsgált modell $H_{Ch}(.)$ átviteli függvényû eleme azt sugallja, hogy a csatorna diszperzióját írja le. Ez így is van, de jól jegyezzük meg: a két *szorzó funkció* ***közötti*** csatornáról van szó, s így beleértendõ az adó kimenõ szûrõje és a vevõ bemenõ szûrõje is! Valójában tehát az *adószûrõ*, az adószûrõvel kialakított modulált jelet átvivõ *átviteli csatorna* és a modulált jelet a sávon kívüli zajoktól (és más felhasználóktól származó jelektõl) megtisztító *vevõszûrõ* együttesérõl van szó

5.1. ábra:

$$(1)-\begin{bmatrix}\text{elõszûrõ}\\ H_P(.)\end{bmatrix}-(2)-\begin{pmatrix}\text{szorzás}\\ \cos(2\pi Ft)\end{pmatrix}-(3)-\begin{bmatrix}\text{adó} & \text{csatorna} & \text{vevõ}\\ \text{szûrõ} & H_{Ch}(.) & \text{szûrõ}\end{bmatrix}-(4)-\begin{pmatrix}\text{szorzás}\\ \cos(2\pi Ft)\end{pmatrix}-(5)-\begin{bmatrix}\text{utószûrõ}\\ H_D(.)\end{bmatrix}-(6)$$

1: $e^{j2\pi ft}$

2: $H_P(f)\cdot e^{j2\pi ft}$

3: $\frac{1}{2}H_P(f)\cdot e^{j2\pi(f+F)t}+\frac{1}{2}H_P(f)\cdot e^{j2\pi(f-F)t}$

4: $\frac{1}{2}H_P(f)\cdot H_{Ch}(f+F)\cdot e^{j2\pi(f+F)t}+\frac{1}{2}H_P(f)\cdot H_{Ch}(f-F)\cdot e^{j2\pi(f-F)t}$

5: $\begin{cases}\frac{1}{4}H_P(f)\cdot H_{Ch}(f+F)\cdot e^{j2\pi(f+2F)t}+\frac{1}{4}H_P(f)\cdot H_{Ch}(f+F)\cdot e^{j2\pi ft}+\\ +\frac{1}{4}H_P(f)\cdot H_{Ch}(f-F)\cdot e^{j2\pi(f-2F)t}+\frac{1}{4}H_P(f)\cdot H_{Ch}(f-F)\cdot e^{j2\pi ft}\end{cases}$

6: ezt tessék kitalálni!

5.2. Példa: AM jel vizsgálata

Egy kísérleti AM modulátor kimenetét 50 8-os ellenállásra kapcsoljuk. A vivofrekvencia $f_c = 800\ kHz$.
A moduláló jel: $m(t) = 0.1 \cdot \sin(2\pi f_1 t) + 0.5 \cdot \cos(2\pi f_2 t)$, ahol $f_1 = 1\ kHz$ és $f_2 = 2\ kHz$.
A modulátor kimeneti feszültsége az ellenálláson:

$$s_{AM}(t) = A \cdot \left[1 + m(t)\right] \cdot \cos(2\pi f_c t)\text{, ahol } A = 100\ V$$

a) Határozza meg az ellenálláson lévo teljesítménysuruség spektrumot (spektrális suruségfüggvényt)!
b) Határozza meg a vivoben és az oldalsávokban lévo átlagteljesítmény értékeket.
c) Határozza meg a modulációs mélységet!
d) Határozza meg a terhelésen megjeleno teljesítmény maximális értékét!

Megoldás:

a) A modulált jel az $f_c \pm f_1$ és az $f_c \pm f_2$ frekvenciákon tartalmaz spektrális komponenseket. Szigorúan véve spektrális sûrûségfüggvény nem létezik, hiszen a spektrum diszkrét. Ilyenkor persze azt mondjuk, hogy a spektrum Dirac-deltákat tartalmaz a szóban forgó frekvenciákon. A diszkrét komponensek teljesítménye megadható, ezek szolgáltatják a Dirac-delták "nagyságát".

$f_c - f_2, 798\,kHz$	$f_c - f_1, 799\,kHz$	$f_c = 800\ kHz$	$f_c + f_1, 801\,kHz$	$f_c + f_2, 802\,kHz$
25 V	5 V	100 V	5 V	25 V
6.25 W	0.25 W	100 W	0.25 W	6.25 W

Megemlíthetjük, hogy itt a negatív frekvenciákat fel sem tüntettük, gyakorlatiasan szinuszos komponensekre gondoltunk, és nem komplex exponenciális összetevõkre.
b) A táblázatból látszik, hogy a vivõ egymaga 100 *watt*-tal, az alsó és a felsõ oldalsáv pedig egyaránt 6.5 - 6.5 *watt*-tal részesedik a jel összes teljesítményébõl.
c) Van olyan idõpillanat, amikor a moduláló jel mindkét összetevõje egyidejûleg veszi fel a lehetséges legnegatívabb értékét, ezért a moduláló jel legnegatívabb értéke -0.6, tehát a modulációs mélység 60 százalék.
d) A moduláló jel idõfüggvényét felrajzolva látszik, hogy a (pozitív) csúcsértékét fõleg a 2 *kHz*-s összetevõ nagysága határozza meg, így a csúcsteljesítmény kb. $100^2 \cdot 1.5^2 / 50 = 450$ *watt*.

5.3. Példa: ?? jel vizsgálata

Egy modulátor az

$$s_m(t) = 3^{[V]} \cdot \cos(3\pi \cdot t^{[ms]} + 2)$$

bemenõ jel hatására a

$$s_{??}(t) = 4^{[V]} \cdot \cos(500\pi \cdot t^{[ms]} + 21 + 5\sin(3\pi \cdot t^{[ms]} + 2))$$

modulált jelet állítja elõ.
a) Milyen fajtájú modulációs módszerrõl van itt szó (AM vagy SzM, DSB vagy SSB, FM vagy PM, stb.)?
b) Mekkora a moduláló jel és a modulált jel amplitúdója? Egyáltalán, van-e a szóban forgó jeleknek efféle paramétere?
c) Mekkora a modulált jel fázis- és frekvencialökete? Egyáltalán, vannak-e a modulált jelenek efféle paraméterei?
d) Becsülje meg a modulált jel sávszélességét!

Megoldás:

a) A modulált jel amplitúdója állandó, tehát csak szögmodulációról lehet szó. A szög *deriváltja* valóban *arányos* a moduláló jellel, tehát frekvenciamodulációról van szó.
b) Mindkét jel szinuszos, van amplitúdójuk, sorrendben 3 *volt* és 4 *volt*. A moduláló jel frekvenciája 1.5 *kHz*, a modulált jel võfrekvenciája pedig 250 *kHz*.
c) A szögmodulált jelnek mindkét jellemzõje létezik, függetlenül a moduláció altípusától. A fázislötyögés maximuma 5 radián, ez tehát a fázislöket. A frekvencialöket a fázis deriváltjának maximális értékébõl:

$$f_D = \frac{1}{2\pi} 5 \cdot 3\pi = 7.5,$$

egysége pedig *kHz*, hiszen ez kompatibilis a *ms* léptékû idõvel.
d) Többféle becslés is szóba jöhet. Egy durva becslés szerint

$$B_S \geq 2(f_D + B),$$

ahol B a moduláló jel sávszélessége. Ez most itt 18 *kHz*. Szinuszos moduláló jelre alkalmazható a

$$B_S \cong 2 f_0 \cdot (1 + \sqrt{m_f} + m_f)$$

becslés, ahol f_0 a moduláló jel frekvenciája, m_f pedig a fázislökete. Ebbõl most

$$B_S \cong 2 \cdot 1.5 \cdot (1 + \sqrt{5} + 5) \cong 3 \cdot 8.24 = 24.72 kHz$$

adódik.

5.4. A kislöketû fázismodulátor nemlineáris torzítása

Tanultuk, hogy kislöketû szögmodulált (fázismodulált) jelek elõállításának kézenfekvõ módszere a

$$\eta_t = \cos(2\pi Ft) - \mu_t \cdot \sin(2\pi Ft)$$

szabály megvalósítása (AM-DSB/SC és 90 fokkal eltolt vivõ). Ez a kifejezés nyilván a modulált jel kvadratúrafelbontása. Vizsgáljuk meg közelebbrõl, milyen is ez a modulált jel!

Megoldás:

Írjuk fel a modulált jel ún. modulációs felbontását! Ez valójában nem jelent mást, mint az eredõ jel amplitúdójának és fázisának meghatározását. Tkp. középiskolai trigonometriai ismeretekbõl következik, hogy

$$\eta_t = \sqrt{1 + \mu_t^2} \cdot \cos(2\pi Ft + \arctan \mu_t).$$

Eredményünk tanulságai:

- járulékos AM jött létre, ez nem öröm, de nem is nagy baj, a frekvenciasokszorozón múlik, érzékeny- e a bemenõ jel ezen fogyatékosságára.

- a modulációs tartalomban van némi nemlineáris torzulás, hiszen nem μ_t, hanem $\arctan \mu_t$ a tényleges tartalom. Az árkusz tangens függvény sorfejtésében az elsõfokú tag után harmadfokú következik, ha tehát a fázislöket 0.1 körüli, akkor a hiba mindössze néhány (kb. három) tízezred, relatív értékben néhány ezrelék. 0.5 (radiános) fázislöketnél a hiba már kb. 5 század, azaz 10 százalék.

- fordított értelmû tanulság is levonható. Ha elõállítunk egy tisztességes fázismodulált jelet, majd sávját korlátozzuk, akkor a kislöketû jelhez hasonló szerkezetû jelet állítunk elõ, csak a lökete nem kicsi. Következmény: nemlineáris torzítás.

5.5. Szögmodulált jelek demodulálása fázistolós szorzóval

A szögmodulált jelek demodulálásának egyik kedvelt módszere, hogy a modulált jelet és az õ Φ fázistolású, T késleltetésû származékát összeszorozzák, majd a szorzatot aluláteresztõ szûrõvel szûrik. Mutassuk meg, hogy ekként elõ lehet állítani magát a modulációs tartalmat!

<ins>Megoldás:</ins>

A szorzat:

$$\cos(2\pi F t+\mu_t)\cdot\cos(2\pi F t-\Phi+\mu_{t-T}) =$$
$$= 0.5\cdot\cos(\Phi+\mu_t-\mu_{t-T})+0.5\cdot\cos(2\pi\cdot 2Ft-\Phi+\mu_t+\mu_{t-T})$$

Az aluláteresztõ szûrõ az összeg második tagját eltávolítja, így kimenetén már csak az elsõ taggal találkozunk. Ha 7 értékét ügyesen választjuk meg (pl. 270°), akkor ez viszont éppen a $\mu_t-\mu_{t-T}$ különbség szinusza lesz, amely kis argumentumok esetén éppen az argumentum, ami viszont kb. $T\cdot\dot{\mu}_t$ (a modulációs tartalom deriváltja). Ez frekvenciamodulációnál éppen a moduláló jel.