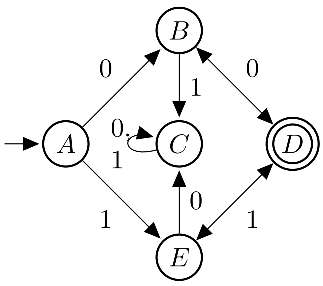
1. Véges automaták

1. Legyen $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Adjon meg egy véges automatát, amely azokat a szavakat fogadja el, amelyekben a nullák száma páratlan, az egyesek száma osztható 3-mal!

   Megoldás: A nullák n számának kettővel, az egyesek e számának hárommal való osztási maradékát érdemes az állapotokban nyilvántartani. Ezért 6 állapot lesz, a q_{ij} állapot felel meg annak, hogy $n \equiv i \pmod 2$ és $e \equiv j \pmod 3$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1, 2$. Az üres szóra $n = e = 0$, ezért q_{00} a kezdőállapot, az elfogadó állapot pedig a q_{10}, az átmeneti függvény ezek szerint:

δ	0	1
q_{00}	q_{10}	q_{01}
q_{01}	q_{11}	q_{02}
q_{02}	q_{12}	q_{00}
q_{10}	q_{00}	q_{11}
q_{11}	q_{01}	q_{12}
q_{12}	q_{02}	q_{10}

2. Mely szavakból áll az alábbi véges automata által elfogadott nyelv?



   Megoldás: Olyan szavakból, amik páros számú nullát és páros számú egyeseket tartalmazó blokkokból állnak elő.

   Ugyanis az elfogadó állapotba először két nulla vagy két egyes olvasásával juthatunk el, ennél rövidebb szót az automata nem fogad el. Utána csak két darab nullás vagy két darab egyes olvasásával kerülhetünk újra az elfogadó állapotba, tehát csak akkor fogadunk el egy szót, ha felépíthető úgy, hogy egyszerre két darab nullást vagy két darab egyest írunk. Azaz a szó páros hosszú nullás és egyes blokkokból áll.

   Kicsit formálisabban: az egyes állapotokban végződő nyelveket megadjuk, és ellenőrizzük, hogy a következő karakternek megfelelő átmenet a nyelvek közötti átmenetnek felel meg.

   A**:** $\{\varepsilon\}$

   B**:** páratlan sok `0`-ra végződik de más páratlan hosszú blokk nincs

   E**:** páratlan sok `1`-re végződik de más páratlan hosszú blokk nincs

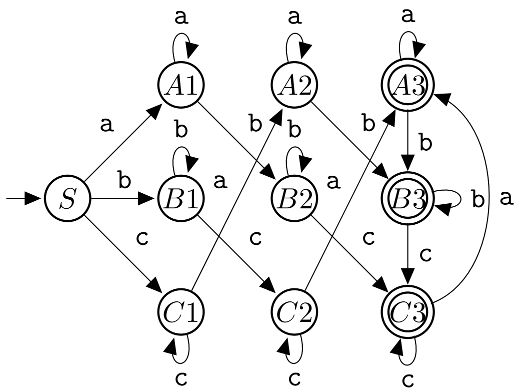
   C**:** van egy nem utolsó páratlan hosszú blokk

   D**:** minden blokk páros hosszú, a szó nem üres

   Világos, hogy minden szó pontosan egybe esik bele az 5 felsorolt kategória közül. Azt kell még megnézni, hogy az átmenetek megfelelőek, azaz pl. ha van egy a B-nek megfelelő szó, azaz páratlan sok `0`-ra végződik de más páratlan hosszú blokk nincs benne, akkor egy `0` az utolsó blokkot párossá teszi, és ennek megfelelően a D halmazba (és állapotba) jutunk, ha pedig `1` jön, akkor keletkezett egy nem utolsó páratlan blokk, azaz a C-be jutunk. Hasonlóan végig kell gondolni a többi átmenetet is.

3. Legyen $\Sigma = \{\texttt{a},\texttt{b},\texttt{c}\}$. Álljon az L nyelv az összes olyan szóból, melyben mindhárom karakter előfordul, és ha két szomszédos karakter nem azonos, akkor `a` után csak `b`, `b` után csak `c` és `c` után csak `a` jöhet. Adjon meg egy véges automatát az L nyelvhez!

Megoldás: Az állapotokban tárolni kell, hogy mi volt az utolsó betű (hogy tudjuk, mi a helyes folytatás), és hogy hányféle betű fordult már elő. Ennek megfelelően Xi jelöli azt, amikor X az utolsó betű és i féle betű volt már.



Az automata tényleg az L nyelvet fogadja el. ugyanis egy betű után vagy azonos betű jöhet (hurokélek), vagy `a` után `b`, `b` után `c` és `c` után `a`. Valamint az elfogadó állapot eléréséhez kell legalább egy `a`, `b` és `c` betűt olvasni, ezért az $X3$ típusúak az elfogadók. (Megjegyzés: ez egy hiányos automata, amit egy további állapot felvételével teljessé lehet tenni.)

4. Egy nemdeterminisztikus véges automata állapotainak halmaza $Q = \{A, B, C\}$, kezdőállapota az A, az elfogadó állapotok halmaza $F = \{B, C\}$, az ábécé $\{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}$. Az átmeneti függvényt az alábbi táblázat írja le. A tanult eljárással készítsen belőle determinisztikus véges automatát!

δ	a	b	c
A	A, B, C	B	A, C
B	B	A, C	A, B
C	C	C	A, B

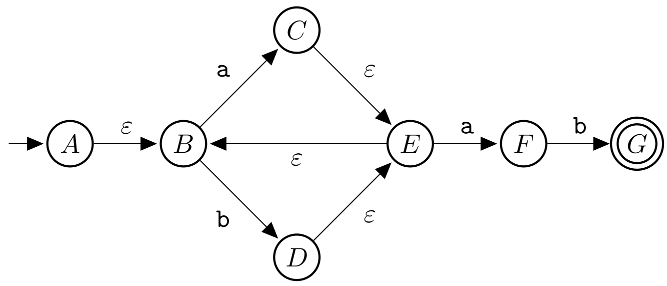
Megoldás: Az új állapotok Q részhalmazai közül kerülnek ki, minden elfogadó lesz, amiben van F-beli. A kezdőállapot az $\{A\}$. Táblázatosan egyszerű az automatát megkonstruálni: egy $X \subseteq Q$ sorhoz az X elemeinek megfelelő sorokat kell uniózni. Minden így keletkező halmazhoz kell egy sor a táblázatban. Az áttekinthetőség kedvéért az állapotokat a halmazt jelölő zárójelek elhagyásával, csak az elemek felsorolása jelöli.

δ	a	b	c
A	ABC	B	AC
ABC	ABC	ABC	ABC
B	B	AC	AB
AC	ABC	BC	ABC
AB	ABC	ABC	ABC
BC	BC	AC	AB

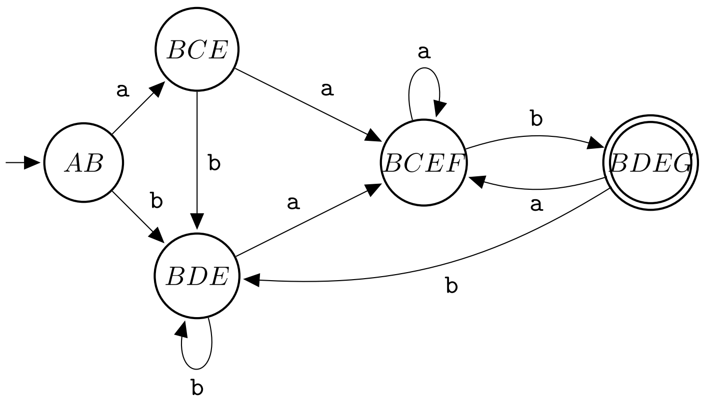
Mivel az A kivételével mindegyik állapotban van B vagy C, ezért az A kivételével minden elfogadó. (Ebből látszik, hogy az automata által elfogadott nyelv az üres szó kivételével mindent tartalmaz.)

5. Az alábbi ε-átmenetes véges automatából a tanult eljárással készítsen determinisztikus véges automatát!

   Ráadás: Mely szavakból áll az automata által elfogadott nyelv?

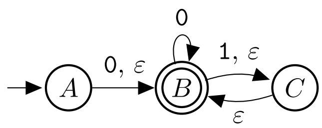


Megoldás: Először meghatározzuk az állapotok $\mathcal{E}$ ε-lezártját:
$\mathcal{E}(A) = \{A, B\}$, $\mathcal{E}(B) = \{B\}$, $\mathcal{E}(C) = \{B, C, E\}$, $\mathcal{E}(D) = \{B, E, D\}$, $\mathcal{E}(E) = \{B, E\}$, $\mathcal{E}(F) = \{F\}$, $\mathcal{E}(G) = \{G\}$. A determinizáló eljárásban adódó minden állapot helyett a lezártját kell venni, a kezdőállapot az $\mathcal{E}(A)$. elfogadó az $\mathcal{E}(G)$. Az így kapott automata:



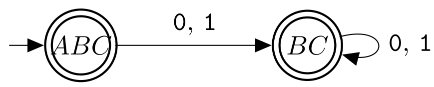
Ebből az automatából is látszik (bár az eredetiből talán még egyszerűbben), hogy az elfogadó állapotba akkor és csak akkor jutunk el, ha van legalább 3 karakter és az utolsó kettő `ab`.

6. Az alábbi ε-átmenetes véges automatából a tanult eljárással készítsen determinisztikus véges automatát! Mely szavakat fogadja el az automata?



Megoldás: Az egyes állapotok ε-lezártjai: $\mathcal{E}(A) = \{A, B, C\}$, $\mathcal{E}(B) = \{B,C\}$, $\mathcal{E}(C) = \{B,C\}$.

A determinisztikus automata kezdőállapota $\mathcal{E}(A)$, a B és C állapotok mindig együtt jelennek meg, és elfogadóvá is teszik az állapotot.

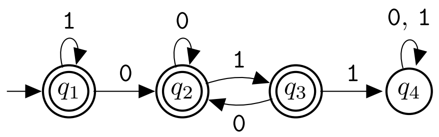


Világos, hogy ez a VA minden szót elfogad. (Az eredeti automatán is látszik, hogy mindent elfogad, csak nem ennyire világosan. Egy elfogadó számítás: először egy ε-átmenettel átlép a B elfogadó állapotba. Ha `0` jön, akkor ott marad, `1` hatására átlép C-be, ahonnan ε-nal rögtön visszamegy B-be.)

7. Álljon az $L \subseteq \{\texttt{0},\texttt{1}\}^*$ nyelv az olyan szavakból, amelyekben nem fordul elő a `011` részszó. Adjon az L nyelvre véges automatát!

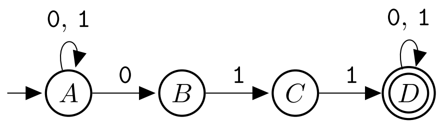
Megoldás: **1. változat – Gondolkodós, bizonyítós**

Hogy nézhet ki a nyelv egy szava? Tetszőleges számú `1` lehet az elején, utána akárhány `0`-blokk jöhet, de két ilyen blokk között csak egy darab `1` állhat. Ehhez megadhatunk egy 4 állapotú DVA-t. A q_1 kezdőállapotban maradunk, amíg a nyitó `1`-k jönnek. A q_2 állapot felel meg a `0`-ra végződő szavaknak, amik az L-ben vannak. A q_3 az az állapot, ahova a `01`-re végződő, L-beli szavak vezetnek, a q_4 pedig az, ahova a rossz szavak (amikben szerepel a tiltott részszó) visznek. A q_4 kivételével mindegyik elfogadó állapot. Ebből a leírásból adódnak az átmenetek: q_4 kivételével a `0` átmenetek a q_2-be visznek, `1` hatására q_1-ből saját magába, q_2-ből q_3-ba, onnan q_4-be léphetünk.

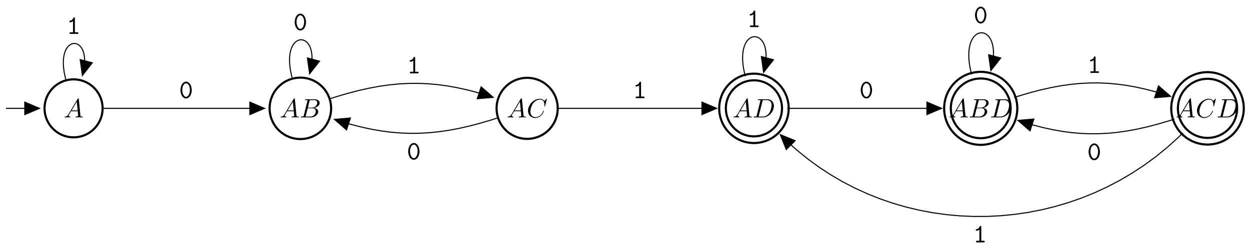


2. változat – Ha nem akarunk sokat gondolkodni (és bizonyítani)

Egy `011`-et elfogadó nemdeterminisztikus automatát egyszerű megadni: a kezdőállapotban kivárjuk a megfelelő pillanatot, amikor is a `011` részszóval átmegyünk az elfogadó állapotba, amit később már nem hagyunk el:

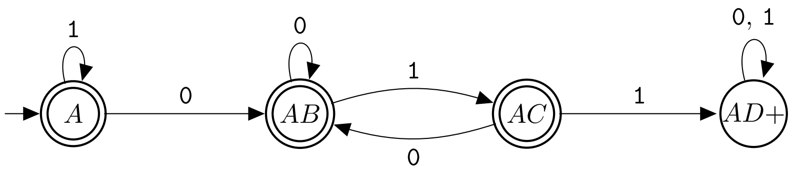


Ezt determinizáljuk,



majd ebből elkészítjük a komplementert elfogadó determinisztikus véges automatát, amihez a nem elfogadó állapotokat kell elfogadóvá, az elfogadókat nem elfogadókká tenni.

Kicsit egyszerűbb lesz az eredmény, ha észrevesszük, hogy a felrajzolt automata utolsó három állapota mind elfogadó, és ha ezeket elérjük már csak közöttük mozgunk. Ezért ez a három állapot összevonható egyetlen állapotba, és ezen még meg kell cserélni mi elfogadó, mi nem, tehát a végeredmény:

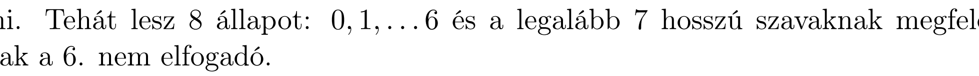


ami (az állapotnevektől eltekintve) megegyezik az 1. megoldásnál kitalált automatával.

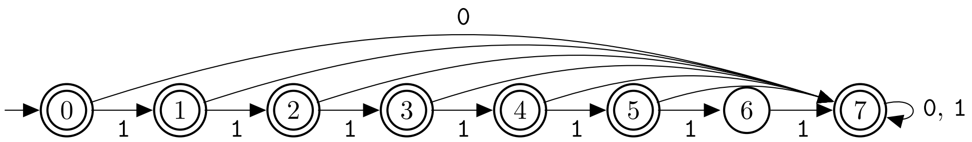
8. Legyen $\Sigma = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$. Adjon véges automatát az alábbi nyelvekre!
   (a) L_6: az összes szó, kivéve a 6 hosszúak
   (b) L_{61}: az összes szó, kivéve a 6 db `1`-ből álló
   (c) L_{610}: az összes szó, kivéve kettő, a 6 db `1`-ből, valamint a 6 db `0`-ból álló szó.

Megoldás:

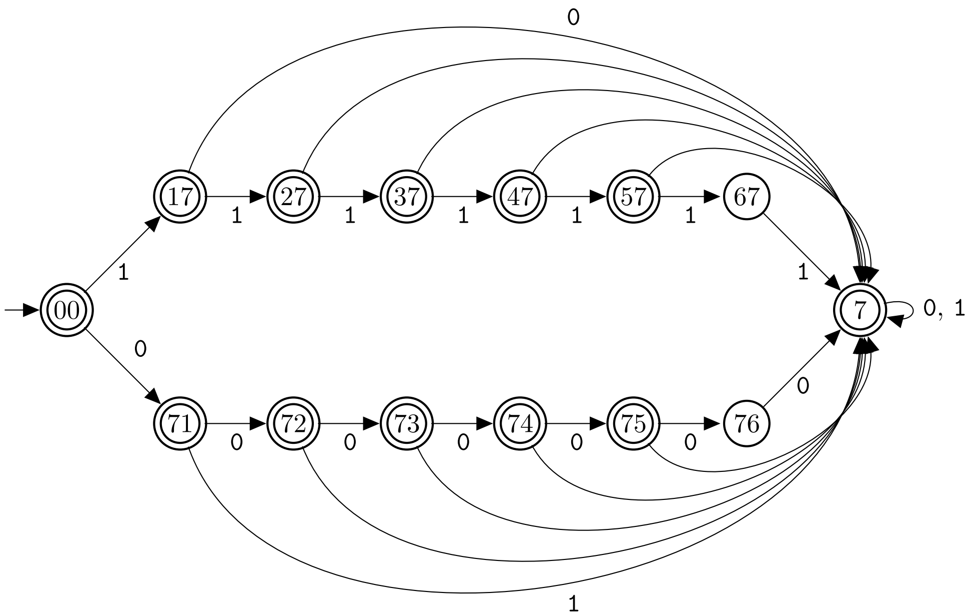
(a) Csak számolni kell, hányadik karakternél tartunk, és ha elértük a hetediket, onnan már nem kell állapotot váltani. Tehát lesz 8 állapot: $0, 1, \ldots 6$ és a legalább 7 hosszú szavaknak megfelelő 7. állapot, melyek közül csak a 6. nem elfogadó.



(b) Az előzőt módosítsuk úgy, hogy ha az első 6 lépés valamelyikében egy `0` jön, akkor egyből ugorjunk a 7., elfogadó állapotba, mert nem számít, hogyan folytatódik a szó, el kell fogadni.

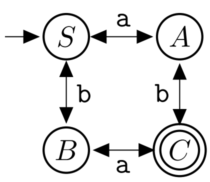


(c) Ez két nyelv metszete $L_{610} = L_{61} \cap L_{60}$, ahol L_{61} az előző nyelv, L_{60} pedig az amiből csak a 6 db `0`-ból álló szó hiányzik. Ennek megfelelően alkalmazhatjuk a metszetre vonatkozó konstrukciót, az előző automatára és arra, ami ugyanilyen, csak a `0`- és az `1`-átmenetek fel vannak cserélve. Az új automata állapotainál az első szám jelzi az L_{61}-hez tartozó automata állapotát, a második az L_{60}-automatájának állapotát. Vegyük észre, hogy ha a szó `0`-val kezdődik, akkor az első automata rögtön a 7. állapotba ugrik és végig ott is marad, míg ha `1` az első karakter, akkor a második automata vált egyből a 7. állapotba. Tehát igazából két út lesz, lényegében a két eredeti automata a kezdőállapotuknál és a 7. állapotnál összeragasztva.

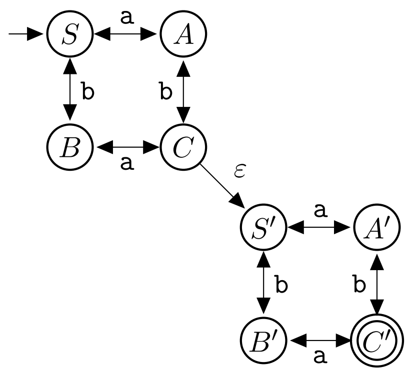


9. Legyen $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$ és $L \subseteq \Sigma^*$ álljon azokból a szavakból, melyekben az `a`-k száma és a `b`-k száma is páratlan. Adjon véges automatát az L^2 és L^* nyelvekre!

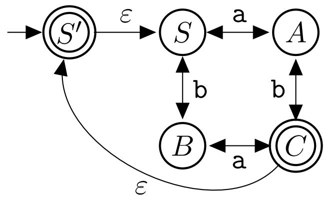
Megoldás: Induljunk ki az L szokásos DVA-jából.



Erre alkalmazhatjuk a konkatenálásra tanult konstrukciót L^2-hez



A tranzitív lezártat megadó konstrukció alapján az L^*-hoz tartozó automata a következő:



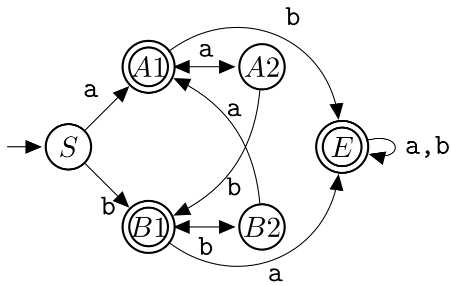
10. Legyen $\Sigma = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ és $L \subseteq \Sigma^*$ álljon azokból a nem üres szavakból, melyekben van páratlan blokk. Adjon DVA-t az L^* nyelvhez!

Megoldás:
1. változat: Készíthetünk VA-t úgy, hogy egy L-et felismerő automatára alkalmazzuk a tranzitív lezártra vonatkozó konstrukciót, majd ezt determinizáljuk.

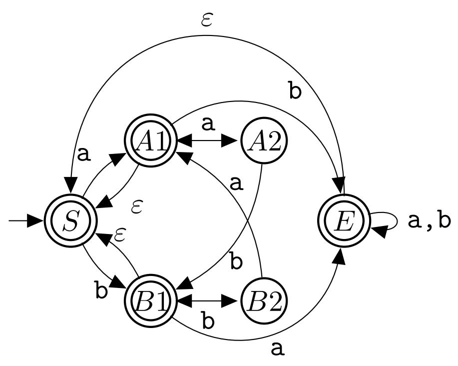
Az L nyelvnél csak arra kell figyelni, hogy az aktuális blokk páros vagy páratlan sok betűt tartalmaz. Ha páratlant, és vége a blokknak, akkor a szót elfogadjuk. Ehhez vegyünk fel hat állapotot:

- S: kezdőállapot
- $A1$: az aktuális blokk páratlan `a`-t tartalmaz
- $A2$: az aktuális blokk páros `a`-t tartalmaz
- $B1$: az aktuális blokk páratlan `b`-t tartalmaz
- $B2$: az aktuális blokk páros `b`-t tartalmaz
- E: a szót elfogadjuk

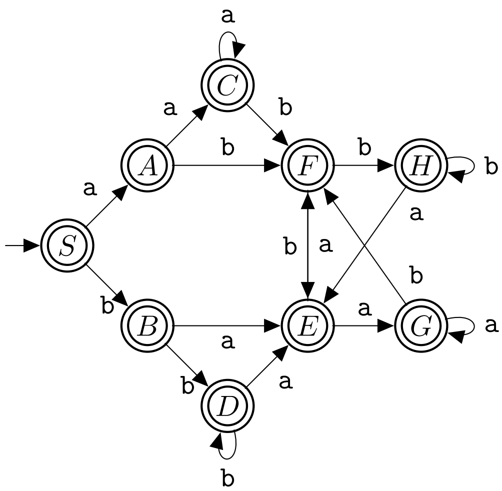
Az átmenetek a vártnak megfelelőek, páros és páratlan között a megfelelő betűt olvasva mehetünk, páratlanból a másik betűt olvasva az elfogadóba jutunk, párosból pedig a másik páratlanba. Természetesen a két páratlan állapot is elfogadó, ugyanis az utolsó blokk is számít. Az automata így a következőképp néz ki:



Ebből a tranzitív lezárt (mivel a kezdőállapotba nem vezet átmenet, nincs szükség új kezdőállapotra):



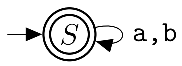
Determinizálás után:



ahol az állapotok nevei: $A = \{S, A1\}$, $B = \{S, B1\}$, $C = \{S, A1, A2\}$, $D = \{S, B1, B2\}$, $E = \{S, A1, E\}$, $F = \{S, B1, E\}$, $G = \{S, A1, A2, E\}$, $H = \{S, B1, B2, E\}$.

2. változat – gondolkodós:

Milyen szavakból áll az L^* nyelv? Az üres szó definíció szerint benne van. Vegyünk egy $x \in \Sigma^*$ tetszőleges nem üres szót. Ha x-ben van páratlan blokk, akkor $x \in L \subseteq L^*$. Ha x-ben minden blokk páros, és mondjuk $x = \mathtt{aa} \cdots = \mathtt{a}y$, akkor $y \in L$, hiszen az elején páratlan darab $\mathtt{a}$ maradt, másrészt $\mathtt{a} \in L$, tehát $x \in L^2 \subseteq L^*$. Ezért $L^* = \Sigma^*$, és ehhez egy DVA:



. . . .