

# ÜTKÖZÉSEK

A játék népszerű neve természet és milliárd és milliárd és milliárd részecske vég nélkül játssza az egészet ami billiárd és billiárd és billiárd

PIET HEIN

[„Atomryiades”, Grooms (1966)]

## 9.1 Bevezetés

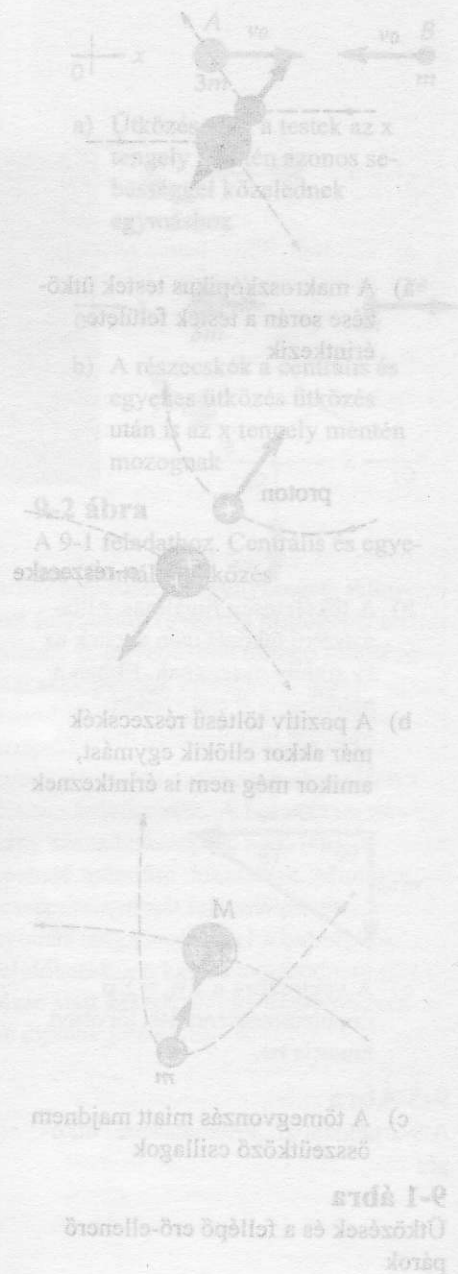
Az ütközések nagy szerepet játszanak mindennapi életünkben. Az *ütközés* fogalmába mindazok a gyakori események beletartoznak, amikor két összetütköző test között rövid, de intenzív kölcsönhatás lép fel. Sarkunk minden lépéskor ütközik a padlóval, vagy akár milyen finoman is tesszük le a teáscsészét a csészealjra, a csésze hirtelen gyorsulással koccan le, a labdajátékok során a labda erőteljesen ütközik a különböző ütőkkel, rakettekkel és botokkal stb. A repülő űrhajók összekapcsolása is ütközési folyamat. A fizikusok nagy gyorsítókat hoznak létre, hogy elektronok, protonok, neutronok, vagy az  $\alpha$ -részecskék áramát ütköztessék atomokkal, ill. atommagokkal. Az ütközési folyamat elemzése során fontos adatokhoz juthatunk a részecskéknek a belső felépítésére és tulajdonságaira vonatkozóan.

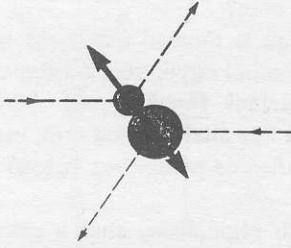
Az ütközés során nem szükséges, hogy a részecskék fizikailag is érintkezzenek (9-1 ábra). Érintkezésről lényegében csak makroszkopikus értelemben beszélhetünk, mikroszkopikusan ennek a kifejezésnek tulajdonképpen nincs értelme, hiszen a kölcsönhatás ekkor végső soron az anyagi felületek elektronjai közötti elektrosztatikus taszításra vezethető vissza, s az elektronok közötti távolság ebben az esetben nem definiálható pontosan. Két töltött részecske – pl. egy proton és egy  $\alpha$ -részecske (egy hélium atommag) – esetében a pozitív töltések már akkor erős elektrosztatikus taszító erőt fejtenek ki, amikor a két részecske még nem is érintkezik egymással. Ezt a folyamatot *szóródásnak* nevezzük.

Az ütközések során általában bonyolult és időben gyorsan változó erők lépnek fel, és a legtöbb esetben ezeket az eröket nem is írjuk le pontosan. Az ütközési folyamatok elemzésének legfontosabb sajátossága az, hogy anélkül jutunk ismeretekhez a folyamatról, hogy ismernénk a folyamatban szereplő eröket. A folyamat leírásához csupán az impulzus- és energiamegmaradás törvényét használjuk fel.

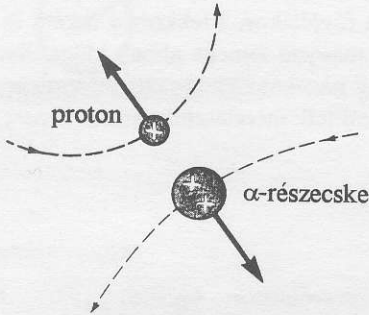
Mit is jelent tehát az ütközés? A legfontosabb ismérvei a következők:

- 1) Az ütköző testek közötti kölcsönhatás hirtelen lép fel és meghatározható az a  $\Delta t$  időintervallum, amely alatt ez végbemegy. A  $\Delta t$  időtartam előtt és után a testek között nem lép fel kölcsönhatás.

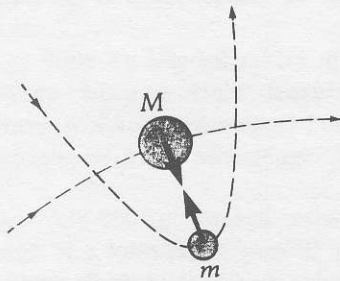




- a) A makroszkopikus testek ütközése során a testek felülete érintkezik



- b) A pozitív töltésű részecskék már akkor ellökik egymást, amikor még nem is érintkeznek



- c) A tömegvonzás miatt majdnem összeütköző csillagok

### 9-1 ábra

Ütközések és a fellépő erő-ellenerő párok

- 2) A  $\Delta t$  ütközés következtében fellépő kölcsönhatási erők olyan nagyok, hogy a rendszerre ható minden egyéb külső erő elhanyagolható. Ily módon csak a rendszer tagjai között fellépő belső erőkkel kell foglalkoznunk.

Az ütközési folyamat gyorsasága, azaz a  $\Delta t$  intervallum hosszúságának megítélése a folyamatól függő. Atommagok ütközésekor ez  $10^{-23}$  s, míg galaxisok kölcsönhatása során akár több millió év is lehet. Az egyetlen kritérium az, hogy a kölcsönhatás a  $\Delta t$  időtartamra korlátozódjék és hogy a folyamatra jellemző egyéb időintervallumok ennél sokkal hosszabbak legyenek.

Ebben a fejezetben még egy fontos fogalmat, a *tömegközéppont* fogalmát is definiáljuk. Ez a fogalom rendkívüli módon megkönnyíti a térben bonyolult mozgással „imbolygó” kiterjedt testek elemzését és az egymásra ható részecskék rendszere mozgásának leírását.

## 9.2 Rugalmas és rugalmatlan ütközések

Az ütközéseket tökéletesen rugalmasnak, ill. rugalmatlannak nevezzük attól függően, hogy az ütközés során a mozgási energia megmarad, vagy nem. A **rugalmas** ütközés esetén a vizsgált részecskerendszer tagjainak összes kinetikus energiája az ütközés előtt és után megegyező. (Az ilyen ütközést gyakran *tökéletesen rugalmasnak* is nevezzük.) Ahhoz, hogy egy ütközés „rugalmas” legyen, szükséges, hogy az ütközés során működő belső erők konzervatívak legyenek, azaz az ütközési folyamatban potenciális energiává alakuló belső energia tökéletesen, visszaalakítható legyen kinetikus energiává. Ezzel szemben amikor a mozgási energia egy része „elvész”, azaz hővé (termikus energiává), ill. a maradandó deformáció során tárolódó energiává alakul, akkor az ütközés **rugalmatlan**. Rugalmatlannak nevezzük az olyan kölcsönhatásokat is amelyek pl. a folyamat során végbemenő robbanás miatt kinetikus energia növekedéssel járnak. Végül azokat az ütközéseket, amelyek lezajlása után az összeütköző testek együtt maradván közösen mozognak tovább, **tökéletesen rugalmatlannak** nevezzük. Vegyük észre, hogy a *tökéletesen rugalmas* és *tökéletesen rugalmatlan* határesetek között végtelen sok egyéb rugalmatlan ütközés is létrejöhethet.

A makroszkopikus világban tökéletesen rugalmas ütközés nem jöhet létre, a mozgási energia egy része mindig elvész, átalakul hang, vagy belső rezgések, ill. maradandó deformáció energiájává. Egyes esetekben azonban, mint pl. a biliárd golyók, a hoki korongok vagy a légpárnás sínen csúszó rugós kiskocsi ütközése, a folyamat tökéletesen rugalmasnak tekinthető és az elvesző mozgási energia jó közelítéssel elhanyagolható. Az elemi részecskék, atomok, vagy atommagok ütközési folyamatai általában tökéletesen rugalmasak. Amennyiben azonban az ütköző részecskék szerkezete megváltozik, vagy új elemi részecskék keletkeznek a folyamatban, akkor ezek az ütközések is rugalmatlannak tekintendők (lásd. a 41. és 45. fejezetet.).

A rugalmas ütközésekben mind a mozgási energia ( $\Sigma K_0 = \Sigma K$ ), mind pedig az összimpulzus megmarad ( $\Sigma \mathbf{p}_0 = \Sigma \mathbf{p}$ ). Rugalmatlan ütközés esetén azonban csak az utóbbi ( $\Sigma \mathbf{p}_0 = \Sigma \mathbf{p}$ ) törvénnyel számolhatunk. Ezt mutatják a következő példák.

### 9-1 PÉLDA

Rugalmas ütközése egy dimenzióban. Az  $m$  és  $3m$  tömegű testek a 9-2 ábrán látható módon az  $x$  tengelyen mozognak egymással szemben azonos  $v_0$  sebességgel. Határozzuk meg a testek végső sebességét a frontális ütközés után.

## MEGOLDÁS

A 9-2 ábrán látható vázlaton a részecskéket  $A$ -val, ill.  $B$ -vel, végsebességüket pedig rendre  $v_A$ -val, ill.  $v_B$ -vel jelöltük. Fizikai érzékünk azt sugallja, hogy az ütközés után a kisebbik test mozgásának irányát megváltoztatva jobb felé mozog, a nagyobbik test mozgás irányát illetően azonban bizonytalanok vagyunk. Tegyük fel, hogy az ütközés után ez a test is jobbfelé mozog, amennyiben ugyanis ez mégsem lenne igaz, akkor az eredményben megjelenő negatív előjel ezt úgyis megmutatja. A tengely pozitív irányát, amint azt a kis tengelykereszt is mutatja ennek megfelelően szintén jobbfelé vettük fel. Ezután az irányokat pozitív, ill. negatív előjelekkel figyelembe véve felírhatjuk a folyamatra az impulzusmegmaradás tételét:

$$\begin{aligned}\Sigma(p_x)_0 &= \Sigma p_x \\ (3m)v_0 + (m)(-v_0) &= (3m)v_A + (m)v_B \\ 2v_0 &= 3v_A + v_B\end{aligned}\quad (9-1)$$

Mivel az ütközés *tökéletesen rugalmas*, a mozgási energia is megmarad:

$$\begin{aligned}\Sigma K_0 &= \Sigma K \\ \frac{1}{2}(3m)v_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}(3m)v_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \\ \text{vagyis} \quad 4v_0^2 &= 3v_A^2 + v_B^2\end{aligned}\quad (9-2)$$

A két megmaradási törvény a  $v_A$  és  $v_B$  ismeretlenekre két egyenletet szolgáltat. A (9-1) egyenletből

$$v_B^2 = 4v_0^2 - 12v_0v_A + 9v_A^2$$

adódik. Ezt behelyettesítve a (9-2) egyenletbe a

$$-12v_0v_A + 12v_A^2 = 0$$

egyenlethez jutunk. Innen  $v_A = v_0$ , ill.  $v_A = 0$ . A két eredmény között a következő megfontolással választhatunk. Ha  $v_A = v_0$ , akkor a (9-1) egyenlet szerint

$$\begin{aligned}2v_0 &= 3v_0 + v_B \\ \text{vagyis} \quad v_B &= -v_0\end{aligned}$$

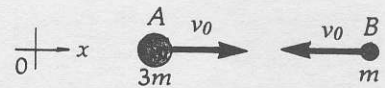
A kapott eredmény szerint az ütközés után mindkét test ugyanakkora sebességgel mozogna tovább, mint ütközés előtt. Ez azonban azt jelentené, hogy bár az eredmény eleget tesz mind az impulzus, mind a mozgási energia megmaradásának, ilyen mozgás csak akkor jöhetne létre, ha a testek kölcsönhatás, azaz ütközés nélkül áthatolnának egymáson. A másik megoldást kell tehát elfogadnunk, amely szerint

$$v_A = 0$$

és a (9-1) egyenletből

$$v_B = 2v_0$$

A megoldás szerint a  $3m$  tömegű test az ütközés következtében megáll, míg az  $m$  tömegű test mozgásának iránya ellentétesre fordul, sebessége pedig megkétszereződik.



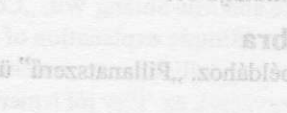
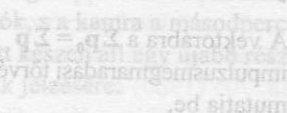
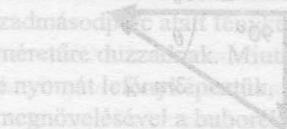
- a) Ütközés előtt a testek az  $x$  tengely mentén azonos sebességgel közelednek egymáshoz



- b) A részecskék a centrális és egyenes ütközés ütközés után is az  $x$  tengely mentén mozognak

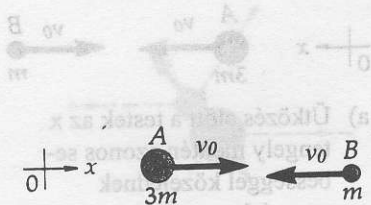
## 9-2 ábra

A 9-1 feladathoz. Centrális és egyenes (frontális) ütközés

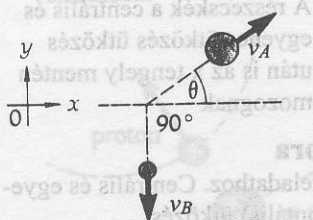


## 9-5 ábra

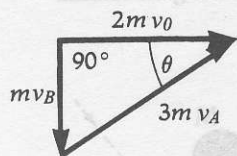
A 9-3 feladathoz. A ballisztikus inga



a) Ütközés előtt a testek az  $x$  tengely mentén azonos sebességgel közelednek egymáshoz.



b) A tökéletesen rugalmas, pillanatszerű ütközés után a testek az  $xy$  síkban mozognak. Ebben a példában a  $B$  test eredeti irányára merőlegesen mozdul el.



c) A vektorábra a  $\Sigma \mathbf{p}_0 = \Sigma \mathbf{p}$  impulzusmegmaradási törvényt mutatja be.

### 9-3 Ábra

A 9-2 példához. „Pillanatszerű” ütközés

### 9-2 PÉLDA

Tegyük fel, hogy az előző feladatban az ütközés pillanatszerűen, de két dimenzióban zajlik le úgy, hogy a kisebbik test mozgásának iránya az eredeti irányra merőleges lesz (9-3 ábra). a) Határozzuk meg a testek ütközés utáni végső sebességét. b) Mekkora  $\theta$  szögben szóródik a nagyobbik test?

### MEGOLDÁS

a) A  $v_A$ ,  $v_B$  és  $\theta$  ismeretlenek a megmaradási törvényekből adódó  $\Sigma K_0 = \Sigma K$ , valamint  $\Sigma p_{0x} = \Sigma p_x$  és  $\Sigma p_{0y} = \Sigma p_y$  egyenletrendszerből határozhatók meg. E helyett azonban most egy más módszert mutatunk be, ami az impulzusvektorokat használja és az adott esetben egyszerűbben vezet a megoldáshoz. Az impulzusmegmaradást kifejező egyenletet a kétdimenziós esetben nem bontjuk összetevőkre, hanem egyetlen vektoregyenletként írjuk fel.

$$\Sigma \mathbf{p}_0 = \Sigma \mathbf{p}$$

$$3mv_0 - mv_0 = 3mv_A + mv_B \quad (9-3)$$

vagyis  $2mv_0 = 3mv_A + mv_B$

Ez a vektoregyenlet az impulzus megmaradásának az elvét fejezi ki, vagyis a rendszer impulzusvektora az ütközés előtt és az ütközés után ugyanakkora. Mivel a  $B$  test eredeti irányához képest  $90^\circ$ -os szögben mozdul el, a két test impulzusösszegét megadó vektóháromszög derékszögű (9-3 ábra). A Pitagorász tétel szerint:

$$(3v_A)^2 = (2v_0)^2 + v_B^2 \quad (9-4)$$

vagyis  $4v_0^2 = 9v_A^2 - v_B^2$

Ez az egyenlet két ismeretlent ( $v_A$ , és  $v_B$ ) tartalmaz. További egyenlethez jutunk a mozgási energia megmaradására vonatkozó

$$\Sigma K_0 = \Sigma K$$

$$\frac{1}{2}(3m)v_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(3m)v_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \quad (9-5)$$

vagyis  $4v_0^2 = 3v_A^2 + v_B^2$

összefüggés felírásával. A (9-4) és (9-5) egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy

$$v_A = \sqrt{\frac{2}{3}}v_0 \quad \text{és} \quad v_B = \sqrt{2}v_0$$

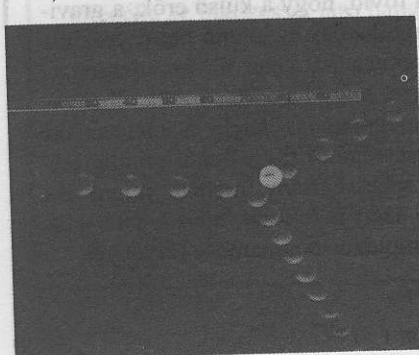
b) A  $\theta$  szög a vektorábrából határozható meg:

$$\sin \theta = \left( \frac{v_B}{3v_A} \right) = \left( \frac{\sqrt{2}v_0}{3\sqrt{\frac{2}{3}}v_0} \right) = 0,577$$

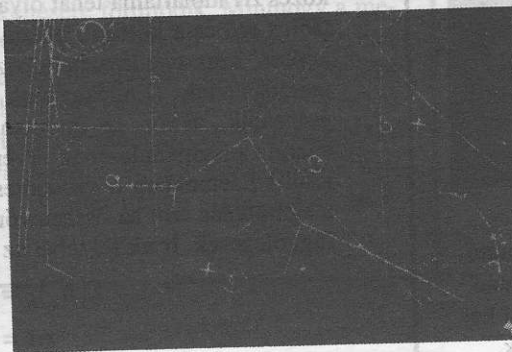
$$\theta = \arcsin(0,577) = 35,3^\circ$$

A példa megoldását nagyban egyszerűsítette, hogy az impulzusvektorokra vonatkozó vektordiagram derékszögű háromszög volt. A vektordiagram alapján azonban akkor is hasznos összefüggések nyerhetők, ha nem derékszögű háromszögről van szó. Az ehhez szükséges matematikai ismereteket a D függelék tartalmazza.

Igen érdekes eredményt kapunk, ha azt a tökéletesen rugalmas ütközést vizsgáljuk, amikor egy test *vele egyenlő tömegű nyugvó* testbe ütközik. Megállapítható, hogy ekkor a két test sebességének iránya az ütközés után merőleges lesz egymásra (lásd a 9-4 ábrát és a 9C-41 feladatot).



(a)



(b)

#### 9-4 ábra

a) *Egyenlő tömegű billiárd golyók ütközéséről készült stroboszkopikus felvétel.* Az egyik golyó kezdetben nyugalomban volt, ezért kiinduló helyzetében fehérebb a többi golyó képénél, hiszen a felvétel során ebben a helyzetben több expozíció is történt. Ha az ütközés tökéletesen rugalmas és súrlódásmentes, akkor elméletileg a golyóknak egymásra merőlegesen kellene elmozdulniok. Amennyiben azonban a golyók forognak, vagy jelentősebb a súrlódás, akkor a szög kissé eltérhet az elméleti értéktől. Ezt mutatja a felvétel is, ahol a golyók elmozdulása  $87^\circ$ -os szöget zár be.

b) *Protonok ütközése folyékony hidrogén buborékkamrában.* A közölt egyetlen felvétel alapján még nem következtethetünk biztonsággal arra, hogy a részecskék merőlegesen pattantak el egymástól, mert nem biztos, hogy a felvétel síkjában mozogtak. Mindazonáltal a stroboszkopikus felvételek alapján igazolható, hogy ezek a részecskék mindig merőlegesen pattannak el egymástól. (Nagy energiájú ütközésekben a relativisztikus effektusok miatt az elpattanás szöge valamivel kisebb mint  $90^\circ$ .)

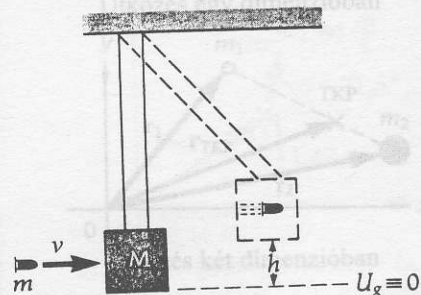
A *buborékkamra* nagynyomású, túlhűtött folyadékot (gyakran hidrogént) tartalmaz. A folyadékban mozgó töltött részecskék pályája mentén ion fűzér marad vissza. Ezek az ionok a magjai azoknak a buborékoknak, amelyek a nyomás hirtelen csökkentésekor a folyadékban keletkeznek. A buborékok néhány századmásodperc alatt fényképezhető méretűre duzzadnak. Miután a részecske nyomát lefényképeztük, a nyomás növelésével a buborékok feloldhatók, s a kamra a másodperc tört része alatt készen áll egy újabb részecske útjának jelzésére.

#### 9-3 PÉLDA

A *ballisztikus inga* gyorsan mozgó kicsi testek, pl. pisztolygolyó sebességének meghatározására használható (9-5 ábra). A bifiláris (kétfonalas) felfüggesztés megakadályozza, hogy az  $M$  tömegű puha fából készült ingatest lengés közben elforduljon. Lőjük bele a függőlegesen lógó ingatestbe egy vízszintesen haladó,  $m$  tömegű pisztolygolyót. Ha az ingatest elég vastag fából készült, akkor a golyó nem üti át, hanem beleágyazódik. Az ingatest-golyó rendszer az ütközés hatására kilendül és  $h$  maximális magasságba emelkedik. a) Határozzuk meg a golyó kezdeti sebességét, b) Határozzuk meg, hogy a golyó kezdeti mozgási energiájának hányad része alakul át nem mechanikai energiává, azaz az ingatest maradandó deformációjához szükséges energiává, illetve hővé, vagy egyéb ún. „disszipatív” energiává.

#### MEGOLDÁS

a) Az ütközés *tökéletesen rugalmatlan*, hiszen a két test, az ütközés után közös sebességgel mozog. Megkönnyíti a probléma elemzését, ha három részre bontjuk a folyamatot az ütközés előtti, az ütközés során lezajló és az ütközés utáni részre.



9-5 ábra

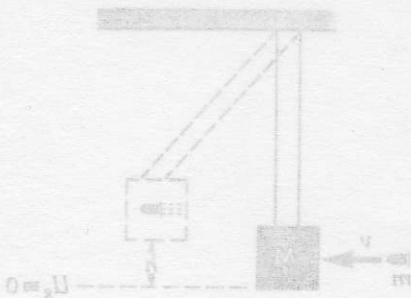
A 9-3 példához. A ballisztikus inga.



### 9-6 ábra

Golyók rugalmas ütközését bemutató ingasor. Az eszközzel megmutatható például, hogy ha az egyik oldalról két golyó ütközik az álló golyósornak, akkor a másik oldalra is két golyó lendül ki. [A helyzet azonban kissé bonyolultabb, mint amilyennek első látásra tűnik. Attól függően, hogy az indítás pillanatában a golyók érintkeztek-e egymással vagy nem, néhány további golyó is csekély sebességgel elmozdulhat az ütközés után. Az impulzusmegmaradás törvénye természetesen mindenképpen érvényes.]

Részletesebben: Seville Chapman, „Misconception concerning the dynamics of the impact ball apparatus.” (Téveszmék az ütköző golyósor dinamikájával kapcsolatban.) *Am. J. Phys.* 28. 705 (1960) és Jean C. Piquette and Mu-Shiang Wu, „Comments on ‘Simple explanation of a well-known collision experiment’” (Megjegyzések az ‘Egy jól ismert ütközési kísérlet egyszerű magyarázata’ c. cikkhez) *Am. J. Phys.* 52. 83 (1984).]



Ütközés előtt a rendszer teljes mozgási energiája a pisztolygolyó  $1/2mv^2$  nagyságú mozgási energiájával egyenlő.

Az ütközés során a mechanikai energia megmaradása nem érvényes. A golyó azonban olyan rövid idő alatt ágyazódik be az ingatestbe, hogy az nem lényegesen mozdul el a helyéről. Az ütközés  $\Delta t$  időtartama tehát olyan rövid, hogy a külső erők, a gravitációs erő és a kötél erő elhanyagolhatóak a fellépő belső erőkhöz képest, azaz alkalmazható vízszintes irányban az impulzusmegmaradás tétele. (Emlékezzünk arra, hogy ha a külső erők elhanyagolhatóak, akkor az impulzusmegmaradás tétele a mechanikai energia megmaradásának érvényességétől függetlenül mindig teljesül.) Esetünkben a vízszintes sebességirány miatt az impulzusmegmaradás erre az összetevőre azért is teljesül, mert a ható erők függőlegesek. Írjuk fel tehát az impulzusmegmaradás törvényét:

$$\Sigma(p_x)_0 = \Sigma p_x$$

$$mv = (m + M)V$$

ahol  $V$  a golyó-ingatest rendszer sebessége közvetlenül az ütközés után, azaz amikor az ingatest még nem mozdult el lényegesen a helyéről. Az egyenletből a  $V$  sebességre

$$V = \left( \frac{m}{m + M} \right) v \quad \text{adódik.} \quad (9-6)$$

Ütközés után a golyó-inga rendszer szabadon kilendül a maximális  $h$  magassáig. Ezen a mozgásszakaszon csak konzervatív erők működnek, amelyek az ingatest sebességét helyzeti energiává alakítják. Válasszuk az  $U_g$  helyzeti energia zérus szintjét az inga legmélyebb helyzetében és alkalmazzuk a mechanikai energia megmaradásának tételét:

$$E_0 = E$$

$$(U_g)_0 + K_0 = U_g + K$$

$$0 + \frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh + 0$$

Behelyettesítve a (9-6) egyenletből kapott  $V$  sebesség kifejezését a  $v$  sebességre

$$v = \left( \frac{m + M}{m} \right) \sqrt{2gh} \quad \text{adódik.}$$

Vegyük észre, az ütközés folyamatában az összimpulzus megmaradt, a mechanikai energia azonban nem, míg az ütközés utáni kilendülés során éppen fordítva, a mechanikai energia maradt meg, az összimpulzus azonban változott.

b) Az ütközés során a golyó-ingatest rendszer mechanikai energiájának  $\Delta E/E_0$  relatív változása az

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{K - K_0}{K_0} = \frac{K}{K_0} - 1 = \frac{1/2(m + M)V^2}{1/2mv^2} - 1$$

összefüggéssel adható meg. Behelyettesítve ide a  $V$  sebességre kapott  $(m/(m + M))v$  értéket, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1/2(m + M) \left[ \left( \frac{m}{m + M} \right) v \right]^2}{1/2mv^2} - 1 = \frac{m}{m + M} - 1 = \frac{m}{m + M} - \frac{m + M}{m + M}$$

$$= - \left( \frac{M}{m + M} \right)$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a rendszer mechanikai energiája csökken. Tipikus esetben például az  $m = 4$  g és  $M = 2$  kg adatok felvételével az adódik, hogy a kezdeti mozgási energiának 99,8%-a nem mechanikai energiává alakul át a súrlódás, a fa rostjainak eltávolodása, valamint a golyó deformálódása következtében. Az energia kicsiny töredéke az ütközéssel járó hang keltésére fordítódik. Minthogy a mechanikai energia egy része az ütközés során „elvész”, a golyó kezdeti mozgási energiája nem egyenlő a golyó-ingatest rendszer potenciális energiájának maximális értékével. Másrészt azonban a golyó kezdeti impulzusa megegyezik a golyó-ingatest rendszernek közvetlenül az ütközés után mérhető impulzusával, hiszen sem a gravitációs erő, sem a kötélérő nem változtatja meg a vízszintes irányú impulzust az ütközés során.

### 9.3 A tömegközéppont és a tömegközéppont tétel

Az ütközési folyamat elemzése sokkal egyszerűbbé válik, ha bevezetjük a *tömegközéppont* fogalmát. Az  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$  ... stb. helyeken található rendre  $m_1, m_2, m_3$  ... stb. tömegű pontszerű testekből álló pontrendszer<sup>1</sup> *tömegközéppontjának* (TKP) helykoordinátái definíció szerint a következők:

$$x_{TKP} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}$$

A tömegközéppont (TKP) helye

$$y_{TKP} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}$$

$$z_{TKP} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum m_k z_k}{\sum m_k}$$

A tömegközéppont helyét tehát az egyes  $m_k$  tömegek *helykoordinátáinak* a *tömegekkel súlyozott átlaga* adja meg. A tömegközéppont helyét definiáló egyenletek vektoriálisan tömörebben is összefoglalhatók:

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{\sum m_k \mathbf{r}_k}{M} \quad (9-8)$$

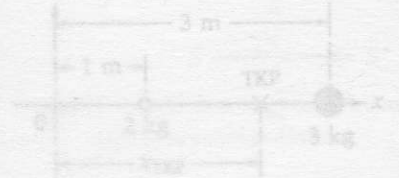
ahol a nevezőben a rendszer teljes  $\sum m_k = M$  tömege áll. A 9-7 ábra két pontból álló rendszer esetén mutatja be a tömegközéppont meghatározásának módját. Ekkor

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{két részecskére}) \quad (9-9)$$

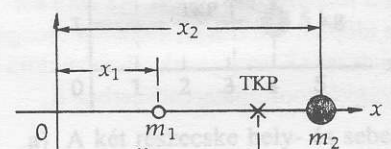
Két tömegpont esetén a tömegközéppont mindig a részecskéket összekötő egyenesen a nagyobbik tömeghez közelebb helyezkedik el. A rajzos vázlatokon a tömegközéppontot kicsiny kereszttel és a TKP betűkkel jelöljük.

A tömegközéppont sebességét a (9-8) definíciós egyenlet idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

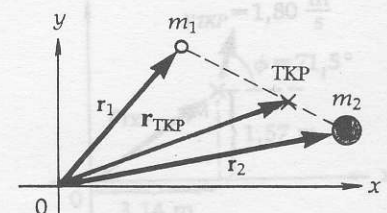
$$\mathbf{v}_{TKP} = \frac{d\mathbf{r}_{TKP}}{dt}$$



9-8 ábra  
A 9-4 példához



Ütközés egy dimenzióban

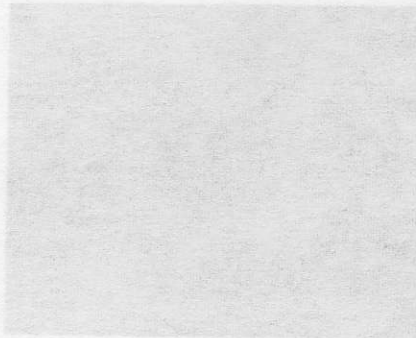


Ütközés két dimenzióban

#### 9-7 ábra

Két tömegpontból álló rendszer tömegközéppontja (TKP)

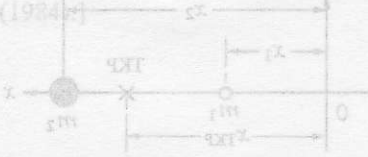
<sup>1</sup> A kiterjedt testek tömegközéppontjának meghatározásával a következő fejezetben foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy a tömegközéppont fogalmának bevezetésével a kiterjedt testeknek a külső erők hatására végbemenő haladó és forgó mozgása egyszerűbben írható le.



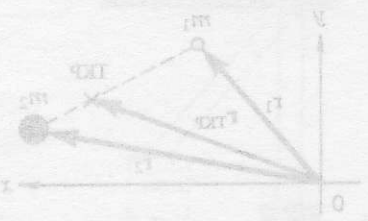
9-6 ábra

Golyók rugalmas ütközését bemutató ingasor. Az eszközzel megmutatható például, hogy ha az egyik oldalról két golyó ütközik az álló golyóval, akkor a másik oldalra is két golyó lendül ki. [A helyzet azonban kissé bonyolultabb, mint amilyennek első látásra tűnik. Attól függően, hogy az indítás pillanatában a golyók érintkeztek-e egymással vagy nem, néhány további golyó is részleges sebességgel elmozdulhat az ütközés után. Az impulzusmegmaradás törvénye természetesen mindenképpen érvényes.]

Részletesebben: Seville Chapman, „Misconception concerning the dynamics of the impact ball apparatus (Tervezzünk az ütköző golyókat dimenziókkal kapcsolatban.) Am. J. Phys. 28, 705 (1960) és Joan C. Piquette and Mu-Shiang Wu, „Comments on ‘Simple explanation of a well-known collision experiment’ (Megjegyzések az ‘Egy jól ismert ütközési kísérlet egyszerű magyarázata’ cikkéhez) Am. J. Phys. 52, 83 (1984)“



Ütközés egy dimenzióban



Ütközés két dimenzióban

9-7 ábra

Két tömegpontból álló rendszer tömegközéppontja (TKP)

A tömegközéppont  $v_{TKP}$  sebessége 
$$v_{TKP} = \frac{\sum m_k v_k}{M} \quad (9-10)$$

Az összefüggés átrendezésével a rendszer teljes  $P$  impulzusa az alábbi alakban írható fel:

A részecskerendszer  $P$  impulzusa 
$$\sum m_k v_k = P = M v_{TKP} \quad (9-11)$$

A 9-10 egyenletet idő szerint deriválva megkapjuk a tömegközéppont  $a_{TKP} = dv_{TKP}/dt$  gyorsulását:

A tömegközéppont  $a_{TKP}$  gyorsulása 
$$a_{TKP} = \frac{\sum m_k a_k}{M} \quad (9-12)$$

A számlálóban levő összeg kifejtése definíció szerint  $\sum m_k a_k = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3, \dots$  Itt az első  $m_1 a_1$  tag megegyezik az  $m_1$  tömegű részecskére ható erők vektori összegével. Az eredő erő a Newton második törvény következtében természetesen mind az  $m_1$  tömegű részecskére ható  $\Sigma(F_1)_k$  külső erők összegét, mind pedig a rendszer többi tagjaitól származó  $\Sigma(F_1)_b$  belső erők összegét magában foglalja, azaz

$$\Sigma(F_1)_k + \Sigma(F_1)_b = m_1 a_1$$

Hasonlóképpen írhatók fel a mozgásegyenletek a rendszer többi tagjára is. a mozgásegyenletek összegezésével pedig a

$$\Sigma(F_1)_k + \Sigma(F_1)_b = \Sigma m_i a_i \quad (9-13)$$

összefüggéshez jutunk. Vegyük észre továbbá, hogy minden belső erőhöz, amit egyik részecske kifejti a másikra, tartozik egy vele egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erő, amit a második részecske fejt ki az elsőre. A belső erők mindig erő-ellenerő párokat alkotnak. Az összes ilyen erő-ellenerő pár vektori összegére tehát zérus adódik eredményül, azaz  $\Sigma(F_1)_b = 0$ . Ennek megfelelően a (9-13) egyenlet a

$$\Sigma(F_1)_k = \Sigma m_i a_i$$

alakra egyszerűsödik. Az egyenlet jobb oldalán azonban éppen  $M a_{TKP}$  áll. Fontos következtetésre jutottunk; *A tömegközéppont úgy mozog mintha benne a rendszer teljes  $M = \Sigma m_i$  tömege egyesítve lenne és rá a külső erők  $\Sigma(F_1)_k = \Sigma(F)_k$  vektori összege hatna.*

Newton második törvényének pontrendszerre megfogalmazott alakja

$$\Sigma F_k = M a_{TKP} = \frac{dP}{dt} \quad (9-14)$$

A kapott egyszerű eredmény lényegében a Newton harmadik törvény következménye. Mivel a belső erők mind erő – ellenerő párok és összegük zérus, ha a pontrendszer tömegközéppontjának mozgását akarjuk leírni, elegendő csak a rendszerre ható külső erőket figyelembe venni.

Ebben a fejezetben részecskerendszerek ütközésével foglalkozunk, s megállapítottuk, hogy az ütközések esetén a rendszer zártnak tekinthető, vagyis a külső erők hatása elhanyagolható<sup>2</sup>. Ha azonban  $\Sigma(F)_k = 0$ , akkor  $a_{TKP}$  is zérus. Zárt rendszer tömegközéppontja tehát nyugalomban marad, vagy

<sup>2</sup> A következő fejezetben megvizsgáljuk a külső erők hatását is.



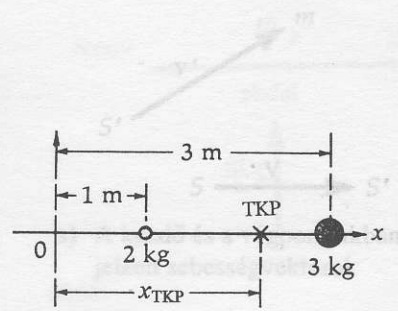
egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. A zárt rendszerre tehát érvényes az impulzus megmaradásának tétele.

9-4 PÉLDA

Egy egyenes mentén az  $x_1 = 1$  m pontban 2 kg, az  $x_2 = 3$  m pontban pedig 3 kg tömegű test helyezkedik el (9-8 ábra). Hol van a rendszer tömegközéppontja?

MEGOLDÁS

$$x_{TKP} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2 \text{ kg})(1 \text{ m}) + (3 \text{ kg})(3 \text{ m})}{2 \text{ kg} + 3 \text{ kg}} = \frac{11 \text{ kgm}}{5 \text{ kg}} = 2,2 \text{ m}$$



9-8 ábra  
A 9-4 példához

9-5 PÉLDA

Határozzuk meg az alábbi pontrendszer tömegközéppontját.

- $m_1 = 2$  kg az ( 1 m , 2 m ) helyen
- $m_2 = 3$  kg a ( 3 m , 2 m ) helyen
- $m_3 = 4$  kg a ( -1 m , -4 m ) helyen

MEGOLDÁS

Az x összetevő:  $x_{TKP} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

$$x_{TKP} = \frac{(2 \text{ kg})(1 \text{ m}) + (3 \text{ kg})(3 \text{ m}) + (4 \text{ kg})(-1 \text{ m})}{2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} + 4 \text{ kg}}$$

$$x_{TKP} = 0,778 \text{ m}$$

Az y összetevő:  $y_{TKP} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

$$y_{TKP} = \frac{(2 \text{ kg})(2 \text{ m}) + (3 \text{ kg})(2 \text{ m}) + (4 \text{ kg})(-4 \text{ m})}{2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} + 4 \text{ kg}}$$

$$y_{TKP} = -0,667 \text{ m}$$

Így a tömegközéppont a (0,778 m, -0,667 m) pontban helyezkedik el.

9-6 PÉLDA

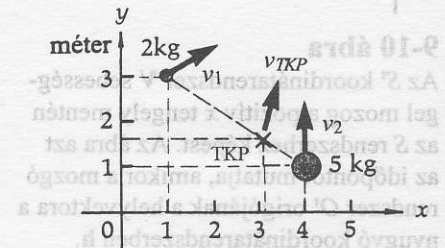
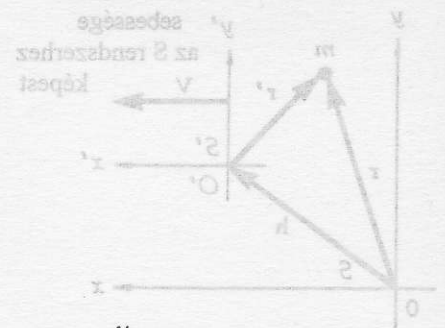
Határozzuk meg az alábbi táblázatban megadott adatokkal jellemzett két részecskéből álló rendszer tömegközéppontjának hely- és sebességvektorát (9-9 ábra). (Adjuk meg a vektorok nagyságát és irányát is.)

tömeg	hely	sebesség
$m_1 = 2$ kg	(1 m, 3 m)	$v_1 = (2 \text{ m/s}) \hat{x} + (1 \text{ m/s}) \hat{y}$
$m_2 = 5$ kg	(4 m, 1 m)	$v_2 = (2 \text{ m/s}) \hat{y}$

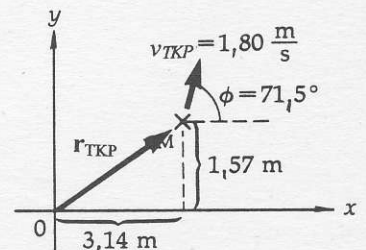
b) Az  $S'$  jelű összeillesztett sebességvektorok. A szaggatottan megrajzolt nyíl az  $m$  tömegnek az  $S$  rendszerbeli sebességét mutatja. Leolvasható, hogy  $v = v' + v''$ .

9-11 ábra

A relatív sebességek geometriai meghatározásához az  $S$  rendszerhez az  $S'$  rendszerhez képest

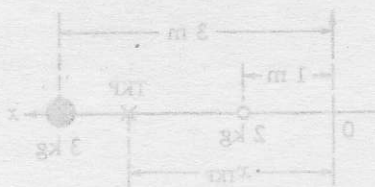


a) A két részecske hely- és sebességvektora

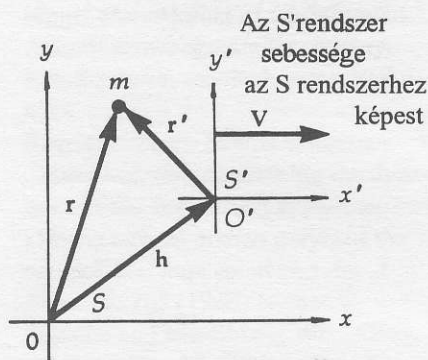


b) A tömegközéppont hely- és sebességvektora

9-9 ábra  
A 9-6 példához



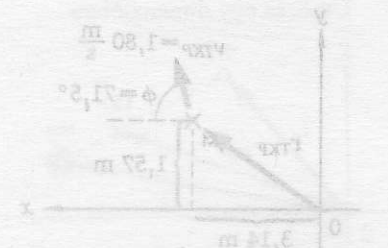
9-8 ábra  
A 9-4 példához



9-10 ábra

Az  $S'$  koordináta-rendszer  $V$  sebességgel mozog a pozitív  $x$  tengely mentén az  $S$  rendszerhez képest. Az ábra azt az időpontot mutatja, amikor a mozgó rendszer  $O'$  origójának a helyvektora a nyugvó koordináta-rendszerben  $h$ .

(n) A két részecske hely- és sebességvektorai



(b) A tömegközéppont hely- és sebességvektorai

9-9 ábra  
A 9-6 példához

## MEGOLDÁS

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{TKP}} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2 \text{ kg})[(1 \text{ m})\hat{x} + (3 \text{ m})\hat{y}] + (5 \text{ kg})[(4 \text{ m})\hat{x} + (1 \text{ m})\hat{y}]}{2 \text{ kg} + 5 \text{ kg}} \\ &= \frac{(2\hat{x} + 6\hat{y} + 20\hat{x} + 5\hat{y}) \text{ kgm}}{7 \text{ kg}} = \frac{(22\hat{x} + 11\hat{y}) \text{ kgm}}{7 \text{ kg}} \\ &= (3,14 \text{ m})\hat{x} + (1,57)\hat{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{TKP}} &= \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(2 \text{ kg})\left[2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\hat{x} + \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\hat{y}\right] + (5 \text{ kg})\left[0\hat{x} + \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\hat{y}\right]}{2 \text{ kg} + 5 \text{ kg}} \\ &= \frac{(4\hat{x} + 2\hat{y} + 10\hat{y}) \frac{\text{kgm}}{\text{s}}}{7 \text{ kg}} = (0,571\hat{x} + 1,71\hat{y}) \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

A sebességvektor nagysága és iránya:

$$v_{\text{TKP}} = \sqrt{(0,571)^2 + (1,71)^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{tg } \phi = \left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \left(\frac{1,71 \text{ m/s}}{0,571 \text{ m/s}}\right)$$

$$\phi = \text{arc tg}(2,99) = 71,5^\circ \text{ (amint az ábra is mutatja.)}$$

## 9.4 A relatív sebességek meghatározása geometriai módszerrel

Tekintsünk egy  $m$  tömegű tömegpontot, amely az  $S$  inerciarendszerben az  $r$  helyen van és  $v$  sebességgel mozog. Vegyünk fel ezután egy másik  $S'$  inerciarendszert, amely az előzőhöz képest  $V$  sebességgel mozog (9-10 ábra.). (Az egyszerűség kedvéért a két koordináta-rendszer  $y$  és  $y'$ , ill.  $x$  és  $x'$  tengelye legyen párhuzamos és az  $S'$  rendszer mozogjon az  $S$  rendszer pozitív  $x$  tengelye mentén.) Az ábrán mutatott időpontban az  $S'$  rendszer  $O'$  origója az  $S$  rendszer  $h$  helyvektorú pontjában van és  $V = dh/dt$ . A 9-10 ábra vektor-diagramjáról leolvasható, hogy

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{h} \quad (9-15)$$

ahol  $\mathbf{r}'$  az  $m$  tömeg helyvektora a mozgó koordináta-rendszerben. A tömegpont az  $S$  rendszerhez képest  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  sebességgel mozog. Ezt felhasználva a (9-15) egyenlet deriválásával összefüggést állapíthatunk meg a különböző koordináta-rendszerekben mért sebességek között:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{h}}{dt}$$

azaz

$$\text{A Galilei féle sebességösszeadási törvény} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad (9-16)$$

ahol  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{v}'$  rendre az  $m$  tömeg  $S$ , ill.  $S'$  rendszerben mért sebessége,  $\mathbf{V}$  pedig az  $S'$  koordináta-rendszernek az  $S$  koordináta-rendszerhez képest vett sebessége. Jegyezzük meg, a vesszős mennyiségek mindig a vesszős koordináta-rendszerhez képest mért értékeket jelentenek.

A (9-16) sebességösszeadási törvény idő szerinti deriváltját képezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

Ez az eredmény – mivel az inerciarendszerekre  $d\mathbf{V}/dt = 0$  – azt jelenti, hogy az egymáshoz képest egyenletes sebességgel mozgó koordináta-rendszerekben a testek gyorsulása azonos.

A gyorsulások közötti kapcsolat Galilei szerint

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' \quad (9-17)$$

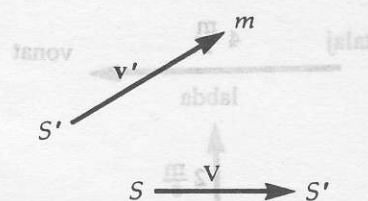
Az A Galilei féle (9-16) sebességösszeadási törvény jól használható, ha csak két relatív sebesség  $\mathbf{V}$  és  $\mathbf{v}'$  szerepel a problémában. Felmerül azonban a kérdés, hogy hogyan kell számolni azokban a bonyolultabb esetekben, amikor többféle különböző relatív sebesség is szerepel egyszerre. Szerencsére egyszerű módszer adható ezeknek a kérdéseknek a kezelésére is. Tetszés szerinti relatív sebességek esetén három lényeges lépést kell a számítások során megtennünk:

- 1. lépés:** Először rajzoljunk fel minden sebességvektort és a jelölés egyértelművé tételére írjuk a vektor *kezdőpontjához* annak a koordináta-rendszernek a betűjelét, amelyben a sebességet mérjük, a vektor *végpontjához* pedig írjuk oda annak a részecskének a nevét, amelynek sebességét jelenti a vektor. A 9-11a ábra mutatja be ezt a lépést.
- 2. lépés:** Rajzoljuk újra a vektorábrát úgy, hogy a vektorokat olymódon toljuk el, hogy az azonos koordináta-rendszer és részecske jelzések azonos helyre kerüljenek. Tegyük meg ezt attól függetlenül, hogy a vektorok ennek eredményeként kezdőpontjukkal, végpontjukkal, vagy ezekkel a pontokkal vegyesen csatlakoznak egymáshoz. A vektorok irányának és nagyságának megtartására azonban gondosan ügyeljünk. (Ezt az eljárást -a közismert játékra utalva – gyakran „dominó” módszernek nevezzük.)
- 3. lépés:** Az utóbbi diagramon bármely vektor kezdőpontját egy másik vektor végpontjával összekötő vektor a végponthoz tartozó tömegpontnak a kezdőponthoz tartozó koordináta-rendszerhez viszonyított sebességét adja meg (9-11b ábra).

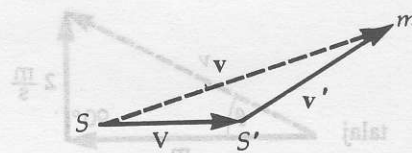
Rövid megfontolással igazolhatjuk, hogy a fentiekben alkalmazott jelölés-rendszer és az erre alapozott geometriai szerkesztés fizikailag alátámasztható, és a szerkesztés nagyságra és irányra nézve helyesen adja a különböző koordináta-rendszerekhez képest mért relatív sebességeket.

### 9-7 PÉLDA

Egy vonat 4 m/s sebességgel vízszintes egyenes sínpályán kelet felé halad. Egy kislány az ülések között délről északra húzódnó közön a vonathoz képest 2 m/s sebességgel labdát gurít el a padlón. Mekkora a labda sebessége a Földhöz rögzített koordináta-rendszerhez képest?



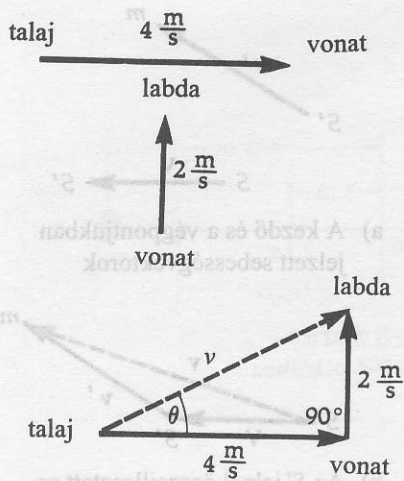
a) A kezdő és a végpontjukban jelzett sebességvektorok



b) Az  $S'$  jelnél összeillesztett sebességvektorok. A szaggatottan megrajzolt nyíl az  $m$  tömegnek az  $S$  rendszerbeli sebességét mutatja. Leolvasható, hogy  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$ .

### 9-11 ábra

A relatív sebességek geometriai meghatározása



9-12 ábra  
A 9-7 példához

**MEGOLDÁS**

Rajzoljuk meg a sebességvektorokat majd ezek segítségével készítsük el a vektorábrát (9-12 ábra). A Pitagorász tételből a sebesség nagyságára a

$$v = \sqrt{\left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \sqrt{20 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 4,47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

értéket kapjuk. A  $v$  sebességvektor iránya a  $\theta$  szöggel adható meg, amelyre felírható, hogy  $\text{tg } \theta = v_y/v_x$ .

$$\text{tg } \theta = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,5$$

Innen

$$\theta = \text{arc } \text{tg}(0,5) = 26,6^\circ \quad \text{északkeleti irányban}$$

**9-8 PÉLDA**

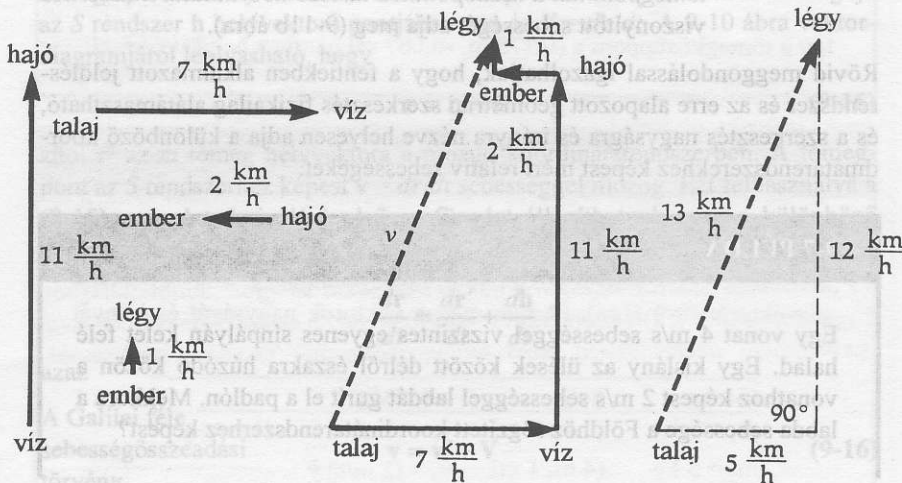
A következő abszurd példa arra szolgál, hogy megmutassuk milyen könnyen tájékozódhatunk sokféle relatív sebesség között is a vektorábrák segítségével.

Egy hajó fedélzetén egy ember a hajóhoz képest  $2 \text{ km/h}$  sebességgel sétál nyugati irányban. A hajó a vízhez képest  $11 \text{ km/h}$  sebességgel észak felé, míg a víz a Földhöz képest  $7 \text{ km/h}$  sebességgel kelet felé mozog. Az ember vállán az emberhez képest  $1 \text{ km/h}$  sebességgel északi irányban légy mászik. Mekkora a légy sebessége a Földhöz képest?

**MEGOLDÁS**

Az adott vektorok segítségével készítsük el a vektordiagrammot. Az eredő vektor szolgáltatja a légy sebességvektorát a földhöz képest (9-13 ábra).

Mivel a feladatban csupa egymásra merőleges vektor szerepel, a vektordiagram, amint azt az ábra is mutatja derékszögű háromszöggé



9-13 ábra  
A 9-8 példához

egyszerűsíthető. Ebből a Pitagorász tétel alkalmazásával adódik, hogy:

$$v = \sqrt{\left(5 \frac{\text{km}}{\text{ó}}\right)^2 + \left(12 \frac{\text{km}}{\text{ó}}\right)^2} = \sqrt{169 \left(\frac{\text{km}}{\text{ó}}\right)^2} = 13,0 \frac{\text{km}}{\text{ó}}$$

Megjegyezzük még, hogy a diagramról egyszerűen leolvasható például a hajónak a Földhöz képest vett, vagy a légynek a vízhez képest vett sebessége is.

## 9.5 Pontrendszer impulzusa és mozgási energiája

### Az impulzus

A (9-14) egyenlet szerint

$$\mathbf{F}_k = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

Zárt rendszer esetén a külső erők eredője zérus, ezért

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad (9-18)$$

azaz az impulzus nem változik. Másként fogalmazva

Az impulzusmegmaradás törvénye

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P} \quad (9-19)$$

(zárt pontrendszerben)

ahol  $\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i$

### A mozgási energia

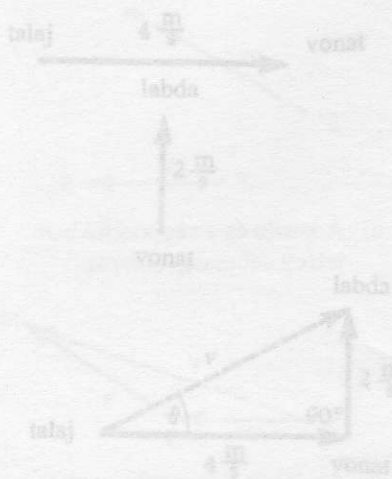
A rendszer teljes mozgási energiája megegyezik az egyes részecskék mozgási energiájának összegével:

$$K = \sum \frac{1}{2} m_k v_k^2 \quad (9-20)$$

Ez az összefüggés természetesen csak akkor érvényes, ha a rendszer minden tagjának sebességét ugyanabban a koordináta-rendszerben mérjük a. A kinetikus energia kiszámítására tetszőleges koordináta-rendszert használhatunk, az összenergia értéke azonban, minthogy az egyes részecskék sebessége is függ a koordináta-rendszertől, a koordináta-rendszer függvényében különböző lehet. A következőkben összefüggést keresünk a kinetikus energiának a tömegközépponrhoz rögzített koordináta-rendszerben mért értéke, valamint tömegközépponrhoz képest mozgó koordináta-rendszerben mért értéke között.

A Galilei féle sebességösszeadási törvénnyel a részecskéknek az utóbbi rendszerben mért  $\mathbf{v}_k$  sebességét a tömegközépponrhoz képest vett  $\mathbf{v}'_k$  sebességek és a tömegközéppont  $\mathbf{v}_{\text{TKP}}$  sebességének összegeként írhatjuk fel, azaz  $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}'_k + \mathbf{v}_{\text{TKP}}$ . Mivel  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ , a rendszer kinetikus energiáját meghatározó (9-20) összefüggés a

d) A Földhöz rögzített rendszerben mért összimpulzus:



9-12 ábra  
A 9-7 példához

$$K = \sum \frac{1}{2} m_k (\mathbf{v}'_k + \mathbf{v}_{TKP})^2$$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_k [(\mathbf{v}'_k \cdot \mathbf{v}'_k) + 2(\mathbf{v}'_k \cdot \mathbf{v}_{TKP}) + (\mathbf{v}_{TKP} \cdot \mathbf{v}_{TKP})] \quad (9-21)$$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_k v_k'^2 + (\sum m_k v_k') \mathbf{v}_{TKP} + (\sum \frac{1}{2} m_k) v_{TKP}^2$$

alakra írható át. Vizsgáljuk kissé részletesebben a kapott három tagot. Az első tag a vesszővel ellátott, azaz a tömegközépponchoz rögzített koordináta-rendszerben mért kinetikus energia. Gyakran **belső mozgási energiának** is nevezzük és  $K_b$ -vel jelöljük.

A második tag zérus. Ezt egyszerűen beláthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy  $\mathbf{v}'_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{TKP}$ . Írjuk be ezt a második tag zárójeles tényezőjébe, azt kapjuk, hogy

$$\sum m_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{TKP}) = \sum m_k \mathbf{v}_k - \sum m_k \mathbf{v}_{TKP} = \mathbf{v}_{TKP} \sum m_k - \mathbf{v}_{TKP} \sum m_k = 0$$

A harmadik tag éppen egy  $\mathbf{v}_{TKP}$  sebességgel mozgó  $M = \sum m_k$  tömegű anyagi pont mozgási energiája. Ezt a **tömegközéppont  $K_{TKP}$  mozgási energiájának** nevezzük.

A tömegközéppont  $K_{TKP}$  mozgási energiája 
$$K_{TKP} = \frac{1}{2} M v_{TKP}^2 \quad (9-22)$$

Összevetve a kapott egyenleteket, látható, hogy a pontrendszer mozgási energiája két tagból tehető össze.

A pontrendszer mozgási energiája 
$$K = K_b + \frac{1}{2} M v_{TKP}^2 \quad (9-23)$$

Itt  $K_b$  a részecskék belső mozgásával kapcsolatos és a tömegközépponchoz rögzített rendszerben mért mozgási energiát,  $\frac{1}{2} M v_{TKP}^2$  pedig magának a tömegközéppontnak az energiája, amit úgy számítunk ki mintha a rendszer teljes  $M$  tömege egyetlen pontba lenne egyesítve és  $\mathbf{v}_{TKP}$  sebességgel mozogna.

A merev testek, bár pontjaik relatív távolsága nem változhat, forgásba jöhetnek tömegközéppontjuk körül, így a tömegközépponchoz rögzített koordináta-rendszerben is rendelkezhetnek mozgási energiával. (Ezzel a mozgással részletesebben a 13. fejezetben foglalkozunk.) Mikroszkopikus skálán azonban még az un. „merev” testek részecskéi sincsenek sohasem nyugalomban, hanem folyamatosan rezgő mozgást végeznek egyensúlyi helyzetük körül. Hasonlóképpen belső mozgást végeznek a gázok és folyadékok atomjai, ill. molekulái is. A véletlenszerű rendezetlen mozgásból származó mozgási és potenciális energiát nevezzük a testek **belső** vagy **termikus energiájának**. A merev testek makroszkopikus haladó és forgó mozgásának vizsgálatakor a belső energiától általában eltekintünk, mert az többnyire állandó. Az egyetlen kivétel, ha a mozgás során csúszó súrlódási erő is fellép, mert ennek hatására hő fejlődik, ami megnövelheti a rendszer belső energiáját. A mechanikai energiának belső energiává való átalakulását az energiamérleg felírásakor mindig figyelembe kell venni.

9-13 ábra  
A 9-8 példához

9-9 PÉLDA

Egy  $m_A = 1400$  kg tömegű 10 m/s sebességű gépkocsit egy másik  $m_B = 1000$  kg tömegű személyautó követ 25 m/s sebességgel. A Földhöz rögzített koordináta-rendszerben határozzuk meg a) a két gépkocsi teljes mozgási energiáját és b) a két autó tömegközéppontjának mozgási energiáját. c) Határozzuk meg a tömegközépponthoz képest vett „belső” mozgási energiát és igazoljuk a  $K = K_b + K_{TKP}$  összefüggést. d) Mennyi a rendszer összipulzusa a Földhöz rögzített koordináta-rendszerben? e) Mennyi a tömegközépponthoz rögzített koordináta-rendszerben az összipulzus?

MEGOLDÁS

a)

$$K = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$K = \frac{1}{2} (1400 \text{ kg}) \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + \frac{1}{2} (1000 \text{ kg}) \left( 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 3,83 \cdot 10^5 \text{ J}$$

b) A (9-10) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$v_{TKP} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{(1400 \text{ kg})(10 \text{ m/s}) + (1000 \text{ kg})(25 \text{ m/s})}{(1400 \text{ kg} + 1000 \text{ kg})}$$

$$v_{TKP} = 16,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Így a tömegközéppont mozgási energiája:

$$K_{TKP} = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_{TKP}^2 = \frac{1}{2} (1400 \text{ kg} + 1000 \text{ kg}) \left( 16,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$$

$$K_{TKP} = 3,17 \cdot 10^5 \text{ J}$$

c) Alkalmazzuk a Galilei féle  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{TKP}$  sebességösszeadási törvényt és határozzuk meg az autók sebességét a tömegközépponthoz rögzített koordináta-rendszerben:

$$v'_A = v_A - v_{TKP} = \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 16,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = -6,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v'_B = v_B - v_{TKP} = \left( 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 16,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 8,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Így

$$K_b = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

$$K_b = \frac{1}{2} (1400 \text{ kg}) \left( -6,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + \frac{1}{2} (1000 \text{ kg}) \left( 8,75 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$$

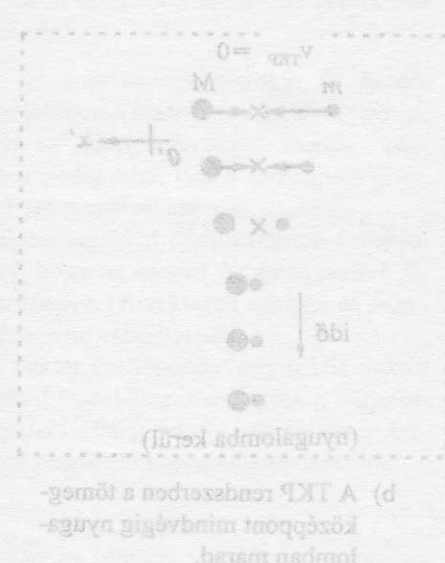
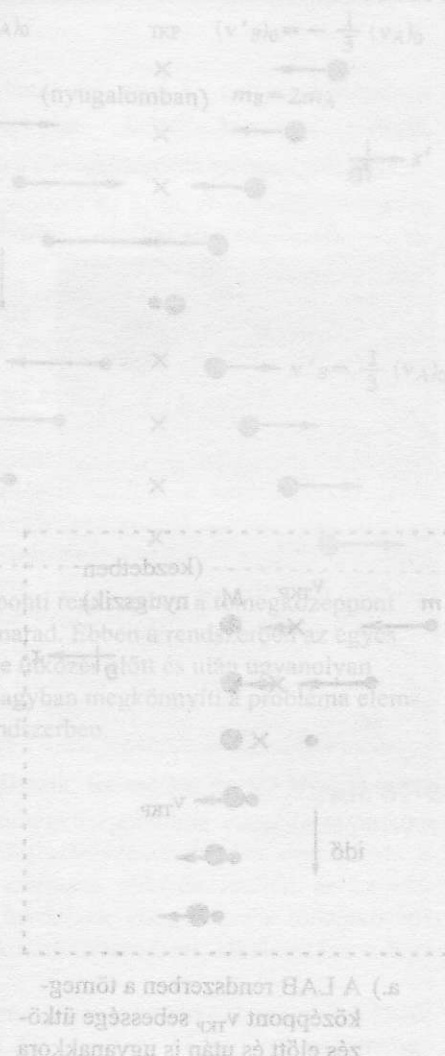
$$K_b = 6,56 \cdot 10^4 \text{ J}$$

A  $K = K_b + K_{TKP}$  összefüggés igazolásához adjuk össze a megfelelő adatokat

$$3,83 \cdot 10^5 \text{ J} = 6,56 \cdot 10^4 \text{ J} + 3,17 \cdot 10^5 \text{ J}$$

$$3,83 \cdot 10^5 \text{ J} = 3,83 \cdot 10^5 \text{ J}$$

d) A Földhöz rögzített rendszerben mért összipulzus:



a.) A LAB rendszerben a tömegközéppont  $v_{TKP}$  sebessége ütközés előtt és után is ugyanakkora.  
b.) A TKP rendszerben a tömegközéppont mindig is nyugalmi állapotban marad.

$$P = m_A v_A + m_B v_B = (1400 \text{ kg}) \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) + (1000 \text{ kg}) \left( 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

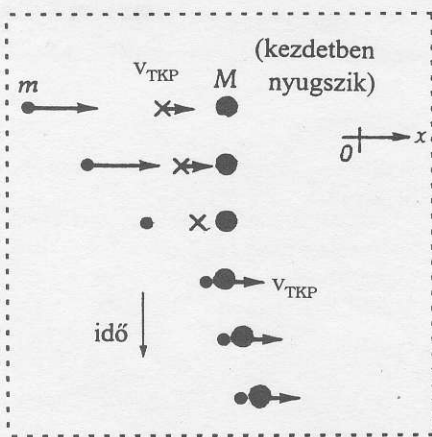
$$P = 3,90 \cdot 10^4 \text{ kgm}$$

e) Az összimpulzus a tömegközépponchoz rögzített koordináta-rendszerben:

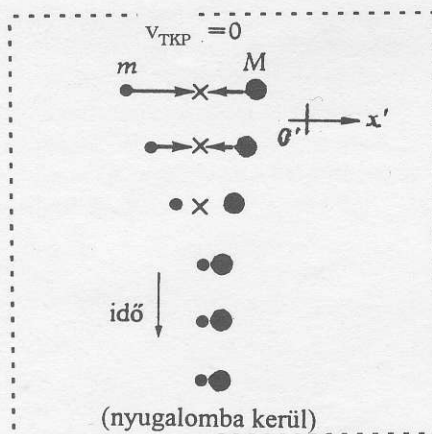
$$P = m_A v_A + m_B v_B = (1400 \text{ kg}) \left( -6,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) + (1000 \text{ kg}) \left( 8,75 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

$$P = 0$$

A tömegközépponchoz rögzített koordináta-rendszer miatt nevezik gyakran **zérus impulzusú rendszernek** is.



a.) A LAB rendszerben a tömegközéppont  $v_{TKP}$  sebessége ütközés előtt és után is ugyanakkora



b.) A TKP rendszerben a tömegközéppont mindvégig nyugalomban marad.

### 9-14 ábra

Pillanatfelvétel sorozat tökéletesen rugalmatlan ütközésről. Az ütközés során a testek egymáshoz ragadnak

## 9.6 Ütközések leírása tömegközépponchoz rögzített koordináta-rendszerben

Az elemi részecskékről szóló ismereteink nagy része az atomok ill. az atommagot alkotó részecskék ütközési folyamatainak elemzéséből származik. A kísérletek egyik fontos változatában a *beeső részecske* (amit többnyire valamilyen nagyenergiájú gyorsító bocsát ki) egy kezdetben nyugvó  $M$  tömegű *cél-részecskébe* (*target*) ütközik. Az ütközés következtében többnyire mindkét részecske mozgásba jön. Mint a megelőző pontban megmutattuk, a beeső részecske kezdeti  $K$  mozgási energiájának egy része a tömegközéppont

$$K_{TKP} = \frac{1}{2} M v_{TKP}^2 \text{ energiáját adja. A tömegközéppont azonban az ütközés}$$

után változatlan sebességgel mozog tovább, így a  $K_{TKP}$  tömegközépponti energiát a mozgás mintegy csapdába zárja, ez az energia semmiképpen sem használható fel a részecskék belső energiájának, vagy tömegközépponchoz képest vett mozgási energiájának megváltoztatására. Az ütközési folyamat egyetlen igazi energiaforrása a tömegközépponchoz képest mért  $K_b$  *belső mozgási energia*.

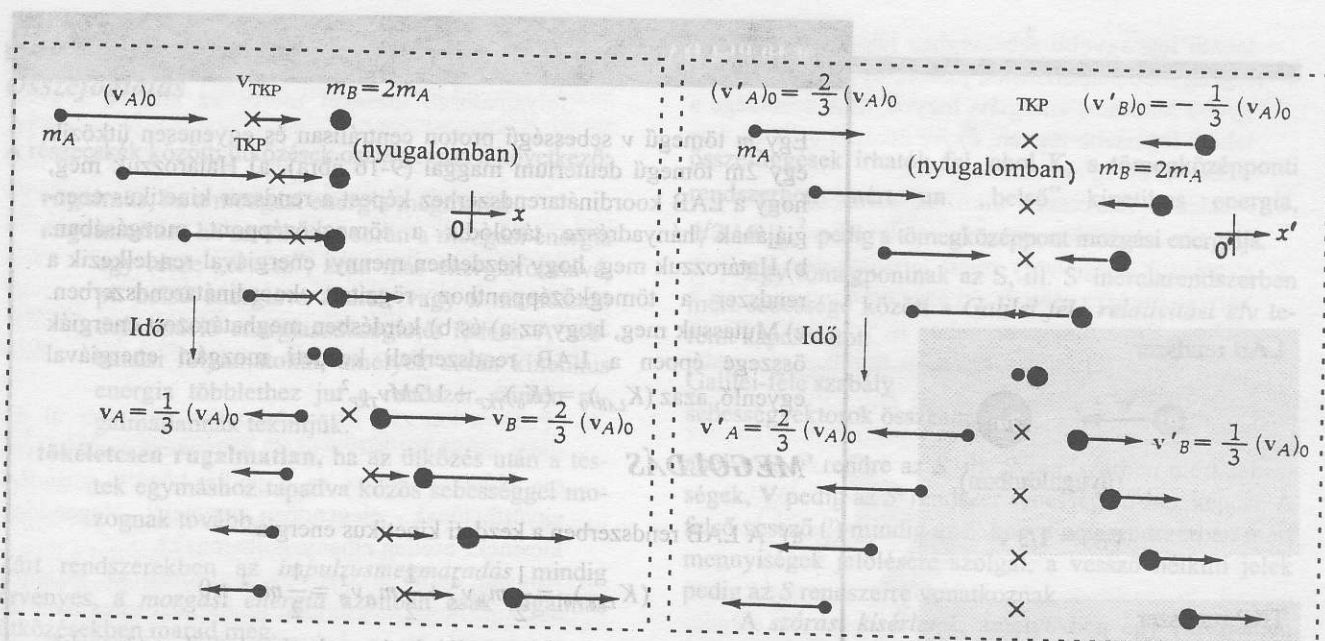
Példaként foglalkozunk azzal az esettel, amikor mozgó proton ütközik nyugvó hélium atommagba ( $m_{He} = 4m_p$ ). A laboratóriumi rendszerhez (LAB) képest a beeső proton mozgási energiájának egyötöd része van lekötve a tömegközéppont mozgási energiájaként. Ily módon a proton LAB rendszerhez képest mért energiájának ötödrésze nem vehet részt a reakcióban. Amennyiben a proton helyett a nagyobb tömegű He magot ütköztetnénk a nyugvó protonnal, akkor a helyzet még rosszabb lenne, mert a LAB rendszerben mért mozgási energia négy ötödrésze a reakcióban nem venne részt.

A 9-14 ábra egy *tökéletesen rugalmatlan* ún. „befogási” reakciót mutat a LAB és a TKP rendszerben. A folyamat elemzése az utóbbiban sokkal egyszerűbb. A TKP rendszerben mozgási energiaként pl. csupán az ütközési reakcióban felhasználható energia van jelen, hiszen  $K_{TKP} = 0$ . A TKP rendszerben az ütközés előtt és után is zérus az összimpulzus.

Azt, hogy tetszőleges részecske rendszer impulzusa a tömegközépponti koordináta-rendszerben zérus ( $\sum m_k v_k' = 0$ ), egyszerűen beláthatjuk a következő módon. A  $v = v' + V$  Galilei sebességösszeadási törvényben most  $V = v_{TKP}$ ,  $v$  a részecske LAB,  $v'$  pedig a TKP rendszerben mért sebessége. A rendszer tetszőleges  $m_k$  részecskéjére

$$m_k v_k = m_k v_k' + m_k v_{TKP}$$





- a.) A laboratóriumi rendszerben a tömegközéppont  $v_{TKP}$  sebessége állandó. b.) A tömegközépponti rendszerben a tömegközéppont nyugalomban marad. Ebben a rendszerben az egyes testek sebessége ütközés előtt és után ugyanolyan nagyságú. Ez nagyban megkönnyíti a probléma elemzését a TKP rendszerben.

### 9-15 ábra

Pillanatfelvételek két test tökéletesen rugalmas centrális és egyenes ütközéséről a laboratóriumi (LAB) és a tömegközépponti (TKP) rendszerben.

Az ilyen típusú egyenleteket a rendszer minden részecskéjére összegezve:

$$\sum m_k v_k = \sum m_k v'_k + \sum m_k v_{TKP}$$

A (9-11) egyenlet szerint azonban  $\sum m_k v_k = \sum m_k v_{TKP}$ . Behelyettesítve ezt az előző egyenletbe, azt kapjuk, hogy

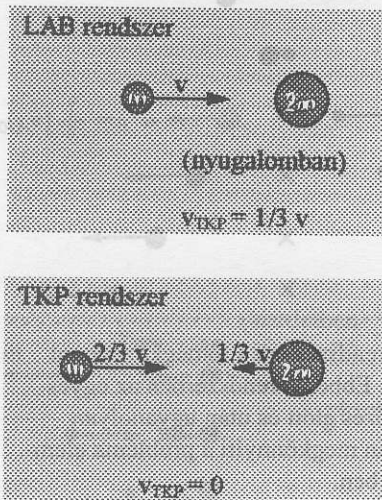
$$\sum m_k v'_k = \sum m_k v_k,$$

és ebből

$$0 = \sum m_k v'_k$$

A 9-15 ábra két test tökéletesen rugalmas, centrális és egyenes ütközését mutatja a laboratóriumi (LAB) és a tömegközépponti (TKP) rendszerben. A 9C-51 feladatban az impulzusmegmaradási és energiamegmaradási tétel felhasználásával megmutatjuk, hogy ezekben az ütközésekben a testek ütközés előtti közeledésének *relatív sebessége* megegyezik az ütközés utáni távolodás *relatív sebességével*. Kimutatható továbbá, hogy tömegközépponti rendszerből nézve a rugalmas ütközés szimmetrikussá válik, abban az értelemben, hogy az egyes részecskék ütközés előtti és ütközés utáni sebességének nagysága megegyezik. Az ilyen szimmetriájú esetek könnyen tárgyalhatók (9C-52 feladat).

Az atomfizikai szórás kísérleteket gyakran úgy tervezik, hogy két részecskenyaláb centrálisan és egyenesen ütközzön egymással. Amennyiben a részecskék impulzusa ellentétes irányú, de egyenlő nagyságú, akkor a laboratóriumi koordináta-rendszer egyben a tömegközépponti rendszer is, s ekkor a gyorsítóban megszerzett teljes kinetikus energia hasznosítható az ütközési reakcióban. A szembe találkozó sugárnyalábok összeütköztetése energetikailag azonban még akkor is előnyös lehet az egyetlen sugárnyalábnak a nyugvó céltárgyra való ütköztetéséhez képest, ha a nyalábokban mozgó részecskék impulzusának abszolút értéke nem egyezik meg egymással.



9-16 ábra

A 9-10 példához

## 9-10 PÉLDA

Egy  $m$  tömegű  $v$  sebességű proton centrálisan és egyenesen ütközik egy  $2m$  tömegű deutérium maggal (9-16 ábra). a) Határozzuk meg, hogy a LAB koordináta-rendszerhez képest a rendszer kinetikus energiájának hányadrésze tárolódik a tömegközéppont mozgásában. b) Határozzuk meg, hogy kezdetben mennyi energiával rendelkezik a rendszer a tömegközépponthoz rögzített koordináta-rendszerben. c) Mutassuk meg, hogy az a) és b) kérdésben meghatározott energiák összege éppen a LAB rendszerbeli kezdeti mozgási energiával egyenlő, azaz  $(K_{LAB})_0 = (K_0)_{TKP} + 1/2 M v_{TKP}^2$ .

## MEGOLDÁS

a) A LAB rendszerben a kezdeti kinetikus energia

$$(K_{LAB})_0 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m v^2 + 0$$

A (9-10) egyenlet felhasználásával meghatározhatjuk a tömegközéppont sebességét a LAB rendszerhez képest:

$$v_{TKP} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{m v + 0}{m_A + m_B} = \frac{m v}{m_A + m_B} = \frac{1}{3} v$$

Ezért a tömegközéppont mozgási energiájára a LAB rendszerben az

$$\frac{1}{2} M v_{TKP}^2 = \frac{1}{2} (m + 2m) \left( \frac{1}{3} v \right)^2 = \frac{1}{2} (3m) \left( \frac{1}{9} v^2 \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right)$$

eredmény adódik. Látható tehát, hogy a LAB rendszerben a kezdeti mozgási energia harmadrésze a tömegközéppont mozgási energiájaként le van kötve.

b) A TKP rendszerében a két részecske a következő sebességgel közeledik egymáshoz:

$$v'_A = v_A - v_{TKP} = v - 1/3 v = 2/3 v$$

$$v'_B = v_B - v_{TKP} = 0 - 1/3 v = -1/3 v$$

Következésképpen a TKP rendszerben a teljes kinetikus energia:

$$(K'_{TKP})_0 = \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B = \frac{1}{2} (m) \left( \frac{2}{3} v \right)^2 + \frac{1}{2} (2m) \left( -\frac{1}{3} v \right)^2$$

$$(K'_{TKP})_0 = \frac{2}{9} m v^2 + \frac{1}{9} m v^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right)$$

c) Igazolni kívánjuk, hogy

$$(K_{LAB})_0 = (K_0)_{TKP} + 1/2 M v_{TKP}^2$$

A fenti értékek helyettesítésével

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{3} m v^2 + \frac{1}{6} m v^2$$

adódik, vagyis az

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

azonossághoz jutunk.

Tehát  $(K_{LAB})_0$  valóban az a) és b) feladatrészen kapott energiák összege.

## Összefoglalás

A részecskék közötti ütközések osztályozása a következő:

**rugalmas**, ha a mozgási energia megmarad  
**rugalmatlan**, ha az ütközés során a mozgási energia egy része „elvész”, azaz más energiaformává, pl. belső energiává alakul, vagy a maradandó deformáció energiaszükségletét fedezi. A robbanási folyamatokat, amelyek során kinetikus energia többre jut a rendszer szintén rugalmatlannak tekintjük.

**tökéletesen rugalmatlan**, ha az ütközés után a testek egymáshoz tapadva közös sebességgel mozognak tovább.

Zárt rendszerekben az *impulzusmegmaradás* mindig érvényes, a *mozgási energia* azonban csak rugalmas ütközésekben marad meg.

Két részecske **tömegközéppontjának** (TKP) a koordinátái:

$$\begin{array}{ll} \text{egy dimenzióban} & \text{három dimenzióban} \\ x_{TKP} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} & \mathbf{r}_{TKP} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \end{array}$$

A tömegközéppont sebessége:

$$\mathbf{v}_{TKP} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

A tömegközéppont helyét és sebességét tetszőleges számú részecske esetén a következő összefüggések adják meg:

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{\sum m_k \mathbf{r}_k}{M} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_{TKP} = \frac{\sum m_k \mathbf{v}_k}{M}$$

ahol  $M = \sum m_k$

Pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mint ha benne a rendszer teljes tömege egyesítve lenne és a rendszerre ható *külső* erők eredője hatna rá.

Newton második

törvénye pontrendszerekre  $\Sigma \mathbf{F}_k = M \mathbf{a}_{TKP}$

A pontrendszer  $\mathbf{P}$  impulzusára és kinetikus energiájára a

$$\mathbf{P} = \sum m_k \mathbf{v}_k \quad \text{és} \quad K = K_b + \frac{1}{2} M v_{TKP}^2$$

## Kérdések

1. Egy kódarabot a Földre ejtettünk, s az ott nyugalomban maradt. Hová lett a kőnek a földetérés pillanatában meglévő impulzusa?
2. Mit jelent az, hogy két részecske „érintkezik” az ütközés során? Hogyan zajlik le két proton ütközése,

ahol  $K_b$  a tömegközépponti rendszerben mért ún. „belső” kinetikus energia,  $\frac{1}{2} M v_{TKP}^2$  pedig a tömegközéppont mozgási energiája.

Egy tömegpontnak az  $S$ , ill.  $S'$  inerciarendszerben mért sebessége között a *Galilei féle relativitási elv* teremt kapcsolatot.

Galilei-féle szabály

$$\text{sebességvektorok összeadására} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V},$$

ahol  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{v}'$  rendre az  $S$ , ill.  $S'$  rendszerben mért sebességek,  $\mathbf{V}$  pedig az  $S'$  rendszer sebessége  $S$ -hez képest. A felső vessző ( $'$ ) mindig az  $S'$  koordináta-rendszerben mért mennyiségek jelölésére szolgál, a vessző nélküli jelek pedig az  $S$  rendszerre vonatkoznak

A *szórás kísérletek*, amelyekben egy (kezdetben nyugvó) céltárgyra eső részecskék szóródását vizsgáljuk, fontos eszköz az atom és atommag szerkezetének felderítésében, valamint a magerők tanulmányozásában. Bár a mérések a LAB koordináta-rendszerben zajlanak, az eredmények kiértékelése gyakran egyszerűbb a TKP rendszerben, mert a tömegközéppont sebessége az ütközés során nem változik. Ily módon az  $\frac{1}{2} M v_{TKP}^2$  mozgási energia a tömegközéppont-hoz van kötve, ami az ütközés során lezajló folyamatban nem vesz részt. A szimmetriából származó előnyök mellett ez az oka annak, hogy az ütközések vizsgálatára a tömegközéppont-hoz kötött koordináta-rendszer alkalmazása a legmegfelelőbb.

A *relatív sebességekre* vonatkozó megfontolások (és a TKP és LAB rendszer közötti sebességtranszformáció) legegyszerűbben a következő geometriai módszerrel követhetőek:

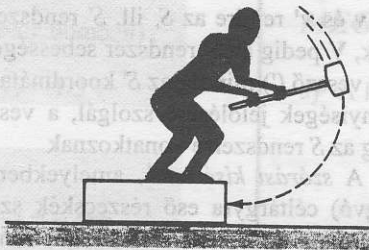
- 1) Vegyük fel a sebességvektorokat és *kezdőpontjukat* jelöljük a koordináta-rendszer jelével, amelyben az adott sebességet mértük, *végpontjukhoz* pedig írjuk oda a tömegpont jelét, amelynek sebességéről szó van.
- 2) Toljuk el önmagukkal párhuzamosan a vektorokat úgy, hogy az *azonos betűjelű pontok fedésbe kerüljenek*. (A vektorok irányán és nagyságán közben ne változtassunk.)
- 3) Bármely vektor kezdőpontját egy másik vektor végpontjával összekötve, megkapjuk a *végpontnak megfelelő tömeg* relatív sebességét a *kezdőpontnak megfelelő* koordináta-rendszerben.

se, amelyek azonos töltésük miatt már viszonylag nagy távolságban taszítják egymást?

3. Az  $A$  test és a kezdetben nyugvó  $B$  test között egydimenziós rugalmas ütközés zajlik le. Határozzuk meg az  $m_A/m_B$  tömegarányt úgy, hogy a  $B$  test a)

lehető legnagyobb sebességhez jusson, b) a lehető legnagyobb impulzushoz jusson, c) a lehető legnagyobb kinetikus energiája legyen, d)  $B$  sebessége a lehető legkisebb legyen, e) Az ütközés után az  $A$  és  $B$  test sebesség egyenlő legyen.

4. Nukleáris részecskék ütközése során az egyik részecske eredetileg nyugalmi helyzetben volt. Magyarázzuk meg, hogy miért található a részecskék pályája ütközés előtt és ütközés után ugyanabban a síkban. Teljesülne-e ez akkor is, ha mind ütközés előtt, mind pedig ütközés után mindkét részecske mozogna?



9-17 ábra

Az 5. kérdéshez

### Feladatok

#### 9.2 Rugalmas és rugalmatlan ütközés

9A-1 Az 1 kg tömegű kiskocsi légpárnás sínen csúszva 50 cm/s sebességgel tökéletesen rugalmasan beleütközik a kezdetben nyugalomban lévő 2 kg tömegű kiskocsiba. A megmaradási tételek alkalmazásával határozzuk meg a kiskocsik ütközés utáni sebességét.

9A-2. Egy  $m$  tömegű,  $v_0$  sebességű test beleütközik egy  $M$  tömegű nyugalomban levő testbe és hozzáragad. A két test az ütközés után  $v$  sebességgel kezd mozogni. Hányadrésze vészett el a kezdeti mozgási energiának az ütközés során?

9A-3. Kezdetben nyugalomban lévő 10 kg tömegű test három részre robban szét. Egy 4,5 kg tömegű darab észak felé kezd mozogni 20 m/s sebességgel, egy másik 2 kg tömegű rész pedig keletre 60 m/s sebességgel. a) Határozzuk meg a harmadik darab sebességének irányát és nagyságát. b) Mennyi energia szabadult fel a robbanás során?

9A-4 Egy 5 m/s sebességgel mozgó billiárd golyó vele egyenlő tömegű nyugalomban lévő golyóba ütközik és ütközés után eredeti irányához képest  $30^\circ$ -os szögben 4,33 m/s sebességgel mozog tovább. Feltéve, hogy az ütközés tökéletesen rugalmas és a súrlódásból, valamint a golyók forgásából adódó hatások elhanyagolhatóak, határozzuk meg a meglökött golyó sebességének nagyságát és irányát.

9A-5 A 4 kg tömegű és a pozitív  $x$  tengely irányában 5 m/s sebességgel mozgó test a kezdetben nyugvó 10 kg tömegű testbe ütközik, majd visszapattan és 2 m/s sebességgel mozog a negatív  $x$  tengely irányba. Rugalmas volt-e az ütközés? Ha nem, akkor mennyi a kinetikus energia veszteség, ill. nyereség?

5. Egy „ütőkocsin” (9-17 ábra) álló személytől azt követeljük, hogy a kezében tartott nagykalapáccsal folyamatosan ütések mérve az alváza a kocsi mozduljon el a talajon. Meg tudja-e ezt tenni? Ha igen, akkor adjuk meg, hogy mekkorának kell lennie a személy és az alváz közötti tapadási súrlódás és az alváz és a talaj közötti csúszó súrlódási együttható arányának. Amennyiben a mozgás valóban megvalósítható akkor magyarázzuk meg, hogy a rendszer (személy, kalapács, alváz) tömegközéppontja miért nem pusztán belső erők hatására csúszik el.

6. Padlóra tett zárt kartondobozban egy egér ül. El tud-e mozdulni dobozostól? Milyennek kellene lennie ehhez a doboz és a padló közötti súrlódási együtthatónak – elegendően nagynek? , elegendően kicsinek? esetleg elhanyagolhatónak?

7. Hogyan ugrik le a mexikói ugróbab az asztról anélkül, hogy megsértené az impulzusegymaradás törvényét? Mi a helyzet ebben az esetben az energiamegmaradással?

9B-6 Az  $m$  és  $2m$  tömegű test derékszöget bezáró irányból közeledve ütközik és összeragadva 2 m/s sebességgel együtt mozog tovább. A mozgás iránya  $37^\circ$ -os szöget zár be a  $m$  tömegű test eredeti irányával. Mekkora sebességgel mozogtak a testek az ütközés előtt?

9B-7 Fából készült 800 g tömegű ballisztikus ingatestbe vízszintes irányból 20 g tömegű ólomsörétet lőttünk. A lengésbe jövő ingatest 10 cm magasságba emelkedik. a) Mekkora közös sebességgel indul az ingatest-sörét rendszer? b) Mekkora  $v_0$  sebességgel csapódik az ingába a golyó? A sörét kinetikus energiájának hányadrésze vészett el, azaz fordítódott a fa deformálására, ill. felmelegítésére? Adjuk meg ezt az arányt százalékosan is:  $(\Delta K/K) \times 100\%$ .

9B-8 Egy gránát pályájának tetőpontján két darabra robban szét. Az egyik 2,5 kg-os darab vízszintesen 100 m/s sebességgel délnyugat felé, a másik 3,5 kg-os rész ugyancsak vízszintesen 70 m/s sebességgel észak felé repül. Milyen irányban mozgott vízszintesen a gránát közvetlenül a robbanás előtt?

9B-9 Egyenes mentén egymással szembe  $v_1$ , ill.  $v_2$  sebességgel mozgó, azonos  $m$  tömegű test ütközés után közös sebességgel mozog tovább. Bizonyítsuk be, hogy a mozgási energia vesztesége  $1/4m(v_1 - v_2)^2$ .

9B-10 Ballisztikus ingával végzett kísérlet során azt kívánjuk elérni, hogy a felfüggesztéshez alkalmazott fonál kitérése a függőlegessel maximálisan  $20^\circ$ -os szöget zárjon be. Milyen hosszú fonalra kössük a 3 kg tömegű ingatestet, ha tudjuk, hogy a 8 g tömegű golyó 400 m/s sebességgel csapódik az ingába? A feladat megoldását kezdjük az alapvető fizikai elvek felírásával.

**9B-11** A 3 kg tömegű, kezdetben nyugalomban lévő testbe 5 m/s sebességgel centrálisan beleütközik egy 1 kg tömegű test. Ütközés után a két test külön-külön az 1 kg tömegű test eredeti pályáján mozog tovább. Ha az ütközés során a kezdeti kinetikus energia negyedrésze veszett el, mekkora a két test végső sebessége?

**9B-12** Egy kezdetben 16 m/s sebességgel észak felé mozgó 50 kg tömegű test tökéletesen rugalmasan ütközik egy kelet felé haladó 20 kg tömegű másik testtel. Az ütközés az 50 kg-os testet kelet felé, a 20 kg-os testet pedig észak felé téríti el. Mekkora a testek végsebessége?

**9.3 A tömegközéppont és a tömegközéppont tétel**

**9A-13** Az 1 kg-os és a 4 kg-os pontszerű test 1 m távolságra van egymástól. Milyen távol van a 4 kg tömegű testtől a rendszer tömegközéppontja?

**9A-14** Két pontszerű test 2 m távolságban van egymástól. Tömegközéppontjuk 0,40 m-re van a 2 kg tömegű testtől. Mekkora a másik test?

**9A-15** Határozzuk meg a következő három részecskéből álló rendszer tömegközéppontjának a koordinátáit, ha a 2 kg-os test a (1 m, 2 m) pontban, a 4 kg-os test a (3 m, 1m) pontban és 7 kg-os test a (-1 m, -1 m) pontban található.

**9A-16** Egy 20 m/s sebességgel kelet felé mozgó 7,5 kg tömegű testet 5 kg tömegű test követ 15 m/s sebességgel ugyanabban az irányban. a) Határozzuk meg a tömegközéppontjuk sebességét. b) Mekkora az egyes tömegek sebessége a tömegközépponthez képest? c) Mekkora az egyes testek impulzusa a tömegközéppontra vonatkozó koordináta-rendszerben?

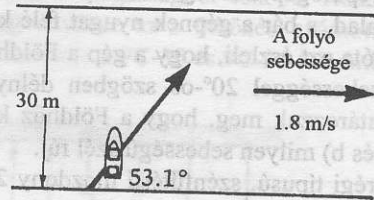
**9B-17** Milyen távolságban van a következő három pontszerű testből álló rendszer tömegközéppontja az 5 kg tömegű testtől? A rendszer elemei egy 5 kg tömegű test a (2m, -5m) pontban, 3 kg-os test a (0 m, 6 m) pontban és egy 2 kg tömeg a (-3 m, 4 m) pontban.

**9.4 A relatív sebesség meghatározása geometriai módszerrel**

**9A-18** Egy 900 kg tömegű ágyúból 100 kg tömegű golyót lőnek ki vízszintesen 75 m/s sebességgel az ágyúhoz képest. Mekkora sebességgel lökődik vissza az ágyú a talajhoz képest?

**9A-19** Egy 63 cm átmérőjű kerekekkel felszerelt gépkocsi 54 km/h sebességgel halad. Határozzuk meg a) a kerék legfelső pontjának, b) a kerék legelöl lévő pontjának a talajhoz képest vett pillanatnyi sebességét.

**9B-20** Ha egy motorcsónak orrát a partvonalra merőlegesen állítva szeli át a 30 m széles és 1,8 m/s sebességgel áramló folyót, akkor az a partvonallal 53,1°-os szög bezáró irányban halad. (9-18 ábra) Tegyük fel, hogy a motorcsónak orrát úgy irányítjuk, hogy az a partvonalra merőlegesen szelje át a folyót. Határozzuk meg, hogy ebben az esetben mennyi idő alatt ér át a motorcsónak a túlsó partra.



**9-18 ábra**

A 9B-20 feladathoz

**9B-21** Mutassuk meg, hogy amennyiben egy adott koordináta-rendszerből nézve egy ütközési folyamatra érvényes az impulzusmegmaradás törvénye, akkor ez tetszőleges, az előző rendszerhez képest  $V$  sebességgel egyenletesen mozgó koordináta-rendszerben is érvényes marad. (Útmutatás: Írjuk fel teljesen általánosan a megmaradási tételt az adott koordináta-rendszerben az ütköző részecskék kezdő és végsebességeivel. Ezután minden sebességhez adjunk hozzá  $V$ -t.)

**9B-22** Egy motorcsónak 2 m/s állandó sebességgel szeli át a folyót. a) Milyen irányba kell állítani a csónak orrát, hogy pontosan az indulási hellyel átellenes pontban érje el a túlsó partot, ha a folyó 1 m/s sebességgel nyugat felé folyik és a csónak a déli partról indul. (Útmutatás: A csónak orrát olyan mértékben kell keleti irányba elfordítani, hogy a sebességvektorok eredője pontosan északi irányba mutasson.) b) Mekkora sebességgel halad a csónak a Földhöz képest az a) esetben c) Ha a folyó 50 m széles, akkor mennyi idő alatt teszi meg a csónak az oda-vissza utat? d) Ha a visszaút során a csónak nem az eredeti kiindulási pontban, hanem folyásirányban 50 m-rel lejjebb érkezik a déli partra, és azután tér vissza a kiindulási pontba, akkor mennyi ideig tart az oda-vissza út? e) Mennyivel hosszabb vagy rövidebb ez az idő, mint a folyóra merőlegesen megtett oda-vissza út ideje? f) Ha a hajó orra mindig pontosan a túlsó part felé mutat, akkor elsodródik és folyásirányban lejjebb ér partot. Mennyi idő alatt ér át ebben az esetben? g) Mozoghat-e a csónak olyan irányban, hogy az átkelés ideje rövidebb legyen, mint az f) kérdésben megadott feltételek mellett. Hogyan?

**9B-23** Egy repülőgép naponta egyenes vonalban repülve oda-vissza megteszi az  $A$  és  $B$  városok közötti  $L$  távolságot. A gép a levegőhöz képest  $V$  sebességgel halad. Határozzuk meg az oda-vissza út megtételéhez szükséges időt, ha a szélsebesség a Földhöz képest  $v$  és a) a szél az  $A$  város felől a  $B$  város felé fúj, b) a szélirány merőleges az  $A - B$  egyenesre. c) Bizonyítsuk be, hogy ha a szélirány párhuzamos az  $A - B$  iránnyal, akkor az oda - vissza út

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}}$$

a merőleges szélirány esetén szükséges időnek.

**9B-24** Egy repülőgép a levegőhöz képest  $160 \text{ km/h}$  sebességgel halad, s bár a gépnek nyugat felé kellene repülnie, a pilóta azt észleli, hogy a gép a Földhöz képest  $200 \text{ km/h}$  sebességgel  $20^\circ$ -os szögben délnyugat felé repül. a) Határozzuk meg, hogy a Földhöz képest milyen irányú és b) milyen sebességű szél fúj.

**9B-25** Egy régi típusú, szénfűtésű mozdony  $20 \text{ m/s}$  sebességgel észak felé húzza szerelvényét, miközben nyugati szél fúj. A mozdonyvezető azt tapasztalja, hogy a mozdony füstje a szerelvény irányával  $20^\circ$ -os szöget alkot. Feltéve, hogy a mozdonyfüst azonnal felveszi a szél sebességét, határozzuk meg, hogy mekkora a szél sebessége a Földhöz képest?

**9B-26** Egy folyami csónak a vízhez képest  $2,4 \text{ m/s}$  sebességgel úszik kelet felé egy déli irányú, a Földhöz viszonyítva  $1 \text{ m/s}$  sebességű folyón. Egy madár északkeleti irányban repül vízszintesen, a levegőhöz képest  $1,5 \text{ m/s}$  sebességgel, míg a levegő nyugatfelé, a Földhöz viszonyított  $1,2 \text{ m/s}$  sebességgel mozog. Határozzuk meg, hogy milyen sebességgel mozog a madár a csónak fedélzetén napozó utashoz viszonyítva.

### 9.5 Pontrendszer impulzusa és mozgási energiája

**9B-27** A befagyott tó közepén egy  $75$  és egy  $60 \text{ kg}$  tömegű korcsolyázó összekapaszkodva  $3 \text{ m/s}$  állandó sebességgel keleti irányban együtt mozog. Ekkor ellökik magukat egymástól és ennek hatására a  $60 \text{ kg}$  tömegű korcsolyázó továbbra is keleti irányban, de  $5 \text{ m/s}$  sebességgel mozog tovább. Tételezzük fel, hogy a korcsolyázók és a jég között elhanyagolható a súrlódás. a) Mekkora a korcsolyázók tömegközéppontjának sebessége a szétválás előtt? b) Mekkora a tömegközéppont sebessége a szétválás után? c) Mekkora a korcsolyázók teljes mozgási energiája a tóhoz képest szétválásuk előtt és után? d) Mekkora a korcsolyázók mozgási energiája a tömegközépponti koordináta rendszerben a szétválás előtt és után? e) Magyarazzuk meg, hogy a d) esetben kapott második eredmény miért egyenlő a c) esetben kapott két eredmény különbségével.

**9A-28** Az  $1200 \text{ kg}$  tömegű,  $100 \text{ km/h}$  sebességű gépkocsit  $1500 \text{ kg}$  tömegű,  $130 \text{ km/h}$  sebességű rendőrautó üldözi. Számítsuk ki, hogy a) mennyi a két gépkocsiból álló rendszer tömegközéppontjának sebessége? b) mennyi a személygépkocsi impulzusa a tömegközépponti rendszerben? c) mennyi a rendőrautó impulzusa a tömegközépponti rendszerben? (Vegyük észre, hogy a két kocsiból álló rendszer impulzusa a tömegközépponti rendszerben zérus.)

### 9.6 Az ütközések leírása a tömegközépponthez rögzített koordináta-rendszerben

**9B-29** Egy  $4 \text{ kg}$  tömegű lövedék abban a pillanatban robban szét két részre, amikor sebessége  $30 \text{ m/s}$ . Egyik,  $1 \text{ kg}$  tömegű darabja mozgásirányának változtatása nélkül a Földhöz képest  $48 \text{ m/s}$  sebességgel repül tovább.

Határozzuk meg, hogy a tömegközépponthez rögzített koordináta-rendszerben a robbanás mekkora belső energiát szolgáltatott.

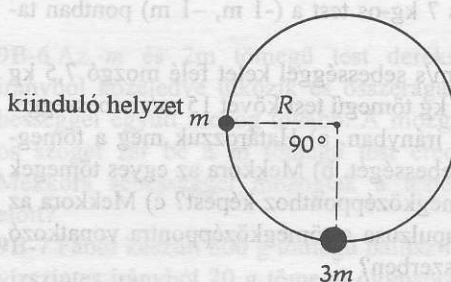
**9B-30** Egy  $5 \text{ kg}$  tömegű nyugvó test felé  $3 \text{ kg}$  tömegű,  $16 \text{ m/s}$  sebességű test repül. Határozzuk meg az  $5 \text{ kg}$ -os nyugalomban lévő testhez rögzített koordináta-rendszerben a) a tömegek teljes impulzusát, b) és mozgási energiáját. c) Mekkora a két tömeg impulzusa és d) teljes mozgási energiája a tömegközépponthez rögzített koordináta-rendszerben?

### További feladatok

**9C-31** Az  $m$  tömegű tökéletesen rugalmas  $v_0$  kezdeti sebességű test centrálisan ütközik a kezdetben nyugalomban lévő  $M$  tömegű testtel ( $M > m$ ). a) Határozzuk meg a  $m$  tömeg esetében a

$$\frac{\text{végső kinetikus energia}}{\text{kezdeti kinetikus energia}}$$

arányt. b) Cseréljük fel a  $m$  és  $M$  tömeg szerepét és határozzuk meg a fenti arányt a  $M$  tömegű testre vonatkozóan.

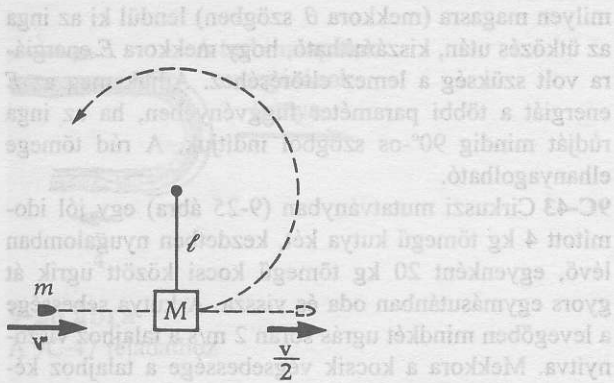


**9-19 ábra**

A 9C-32 feladathoz

**9C-32** Függőleges síkú,  $R$  sugarú körre hajlított, merev huzalon a rá fűzött  $m$  tömegű gyöngy a 9-19 ábrán látható módon lecsúszik. A körpálya oldalsó pontjából nyugalomból lévő gyöngy pusztán a gravitáció hatására lecsúszik és rugalmasan ütközik a kör legmélyebb pontjában nyugalomban lévő  $3 \text{ m}$  tömegű másik gyönggyel. a) Határozzuk meg az  $R$  sugárral kifejezve, hogy milyen magasra emelkednek a gyöngyök az ütközés után? b) Az ütközés után a gyöngyök súrlódásmentesen folyamatosan tovább mozognak és újra rugalmasan ütköznek. Határozzuk meg, hogy mekkora a gyöngyök sebessége közvetlenül a második ütközés után.

**9C-33** Egy  $m$  tömegű  $v$  sebességű pisztolygolyó a 9-20 ábrán látható módon keresztül üti az  $M$  tömegű ingatestet, miközben sebessége  $v/2$ -re csökken. Az ingatest  $l$  hosszúságú, elhanyagolható tömegű merev rúdon függ. Mekkora minimális  $v$  sebességgel rendelkezzen a golyó, hogy a kilendülő inga teljes kört írjon le.



9-20 ábra

A 9C-33 feladathoz

9C-34 Egy 2 m/s sebességgel mozgó 0,25 kg tömegű test rugalmasan ütközik egy kezdetben nyugalomban lévő 0,75 kg tömegű testtel, s ennek hatására eredeti irányától 36,9°-os szögben eltér (ez a szög a 3-4-5 típusú háromszög egyik szöge). a) Milyen sebességgel mozog a két test az ütközés után? b) Határozzuk meg a 0,75 kg tömegű test mozgásának irányát az ütközés után.

9C-35 Nagy sebességű stroboszkopikus felvételek szerint a golfütők 200 g tömegű feje 55 m/s sebességgel is érkezik az ütőkúpon nyugvó 46 g-os golf labdához. Ütközés után a fej sebessége irányváltozás nélkül 40 m/s-ra csökken. a) Mekkora sebességgel indul a golf labda? b) Határozzuk meg a golfütés  $\epsilon$  ütközési számát. Az ütközési szám definíció szerint: (lásd 9C-36 feladatot)

$$\epsilon = - \frac{\text{relatív sebesség az ütközés után}}{\text{relatív sebesség az ütközés előtt}}$$

(A negatív előjel biztosítja, hogy az ütközési szám pozitív legyen.)

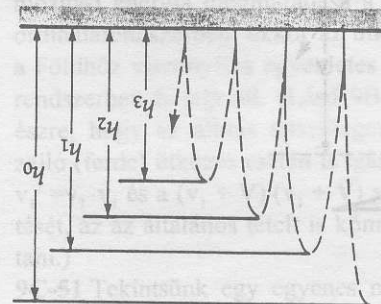
9C-36 Acél csapágygolyót  $h_0$  magasságból egy rögzített vízszintes acéllemeze ejtjük. A golyó a lemezen pattog, s az egyes pattanások során egyre kisebb és kisebb magasságba emelkedik, mivel az ütközés nem tökéletesen rugalmas (9-21 ábra). A tökéletesen rugalmas ütközéstől vett eltérés az  $\epsilon$  ütközési számmal jellemezhető, amit a rögzített felülettel való ütközés esetén az

$$\epsilon = \frac{\text{sebesség az ütközés után}}{\text{sebesség az ütközés előtt}}$$

összefüggéssel adhatunk meg. Az ütközési szám 1 (tökéletesen rugalmas ütközés) és 0 között (tökéletesen rugalmatlan ütközés) változhat. Az  $\epsilon$  ütközési szám értéke lényegében állandó közepes sebességtartományban. Adjuk meg  $h_0$ ,  $\epsilon$  és  $n$  függvényében, hogy az  $n$ -ik visszapattanás után milyen magasra emelkedik a csapágygolyó.

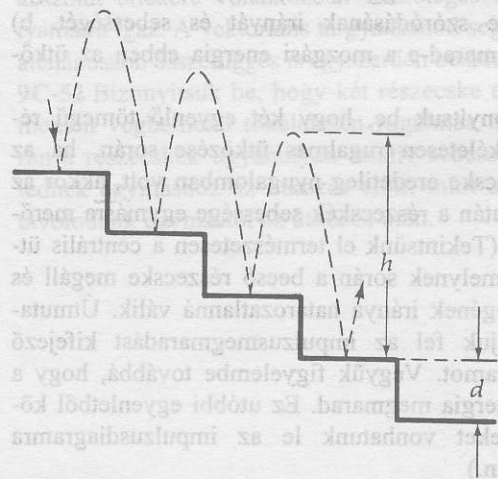
9C-37 Egy labda egyenletesen pattogva halad lefelé egy lépcsősoron úgy, hogy mindig a  $d$  magasságú lépcsőfokok középre esik (9-22 ábra). Minden ütközés teljesen egyforma, mert a labda minden egyes lépcsőfokra

ugyanolyan  $h$  magasságból esik rá. Határozzuk meg  $h$  és  $d$  függvényében az  $\epsilon$  ütközési számot. (Az ütközési szám definíciója a 9C-35 és 9C-36 feladatban található.)



9-21 ábra

A 9C-36 feladathoz. A pályák valójában függőlegesek, az érthetőség kedvéért azonban kissé elcsúsztatva ábrázoltuk őket.



9-22 ábra

A 9C-37 feladathoz.

9C-38 Az  $m_1$  tömegű test tökéletesen rugalmasan ütközik az  $m_2$  tömegű nyugvó testtel. Az ütközés után az  $m_1$  tömegű test eredeti irányától 90°-os szögben tér el. a) Milyen szögben szóródik (a beeső részecske irányához viszonyítva) az  $m_2$  tömegű részecske? b) Mutassuk meg, hogy az adott feltételek mellett  $m_2$  nagyobb kell hogy legyen, mint  $m_1$ .

9C-39 Csapágygolyókat gyártó cég a selejtes golyók kiválasztására ütközésen alapuló vizsgálatot végez. A csapágygolyókat a 9-23 ábrán látható módon 1,2 m magasságból a vízszinteshez 15°-os szögben hajló tömör acél aljzatra ejtik. A jó minőségű golyóknak a visszapattanás után át kell jutni a B akadály felett. Az akadályt úgy kell elhelyezni, hogy csak a tökéletesen rugalmasan ütköző golyók juthassanak át felette. Határozzuk meg a visszapattanó golyók pályacsúcsának a koordinátáit, és azt, hogy hová kell az akadályt elhelyezni. (Útmutatás: Tökéletesen rugalmas ütközés esetén a beesésnek és a

## Távlatok

Pihenjünk meg ismét és keressük meg a bejárt hegyvölgyes táj hatalmas fenyőit! Az előző néhány fejezetben bevezettük 1) a munka és energia fogalmát, 2) az impulzus fogalmát, 3) kimondtuk az impulzusmegmaradás és az energiamegmaradás törvényét, és megadtuk 4) a konzervatív erő és a megfelelő potenciális energia közötti kapcsolatot. A  $\Sigma F = ma$  törvény mellett az *energia* és *impulzus* fogalma és a rájuk vonatkozó tételek hatalmas segítséget jelentenek a feladatok megoldásában. A *megmaradási tételek* sokat segítenek olyan esetekben, amikor nem ismerjük az erőket, vagy amikor azok csak bonyolult függvények segítségével fejezhető ki, ill. az erőhatás igen rövid idejű, mint pl. ütközések során. Alkalmazhatóságuk kulcsa annak megállapítása, hogy a vizsgált rendszer *zárt-e* vagy sem, azaz hatnak-e külső erők a rendszerre. Amennyiben a rendszer és környezete között nincsen energiacsere akkor az összesenergia állandó. Amennyiben a rendszerre ható külső erők eredője zérus, akkor a rendszer impulzusa állandó. Természetesen a rendszer különböző részei között mind energia, mind impulzuscseré végbemehet, a teljes energia, ill. impulzus azonban állandó marad.

Egyetlen ponthoz azonban érdemes némi magyarázatot fűzni. A *rugalmatlan* ütközésekben az energia egy része olyan energiaformává alakul át, amit közvetlenül nem lehet kiszámítani (deformációs energia, belső energia, stb.), szigorúan véve azonban az energia természetesen ilyenkor is megmarad. Ezekben az esetekben azonban az energiamegmaradást kifejező egyenlet közvetlenül nem írható fel. Ugyanakkor az impulzusmegmaradási törvény a kölcsönhatás természetére tekintet nélkül is alkalmazható.

A megmaradó mennyiségekben való gondolkodás akkor is segít a feladatmegoldásban, ha a vizsgált rendszer nem zárt. Ekkor ugyanis felismerhetjük, hogy a betáplált energia (impulzus) a rendszer energiáját (impulzusát) növeli adott mértékben. Ezért mindig gondoljuk meg, hogy hol helyezkedik el a vizsgált rendszer határa és figyeljük, hogy van-e

energia- vagy impulzusáramlás ezen a határon keresztül. Ilyen esetben jól használható a *munkatétel*, amely szerint a rendszerre ható erők összes munkája megegyezik a rendszer kinetikus energiájának megváltozásával.

Végül igen jól használható a feladatok megoldásában a konzervatív erők és a megfelelő potenciális energia közötti összefüggés is. Ezt a következő fejezetekben még részletesebben tárgyaljuk. A fizikai elméleteket gyakran inkább energiákkal s nem erőkkel fogalmazzuk meg. Ennek az az oka, hogy az energia *skaláris* mennyiség és így matematikailag sokkal egyszerűbben kezelhető, mint az *erővektorok*. A kétféle tárgyalásmód azonban éppen a konzervatív erők és a potenciális energia között fennálló kapcsolat miatt többnyire egyenértékű.

Összefoglalva: az eddigiekben négy, a feladatmegoldásban igen hatékony módszert vezetünk be a *Newton törvényeket*, a *megmaradási törvényeket*, a *munkatételt* valamint a *konzervatív erők és a potenciális energia közötti relációt*. Vessük jól agyunkba az egyes módszerek ismertetőjeleit! Milyen erők hatnak? Zárt-e a rendszer? Csak konzervatív erők hatnak? Ha egyszer sikerült egy problémáról eldönteniünk, hogy melyik típusba tartozik, akkor a megoldás kezdő lépését is ismerjük, hiszen ez az adott típusban mindig azonos. Ha ismerjük az erőket, akkor megrajzoljuk a szabadtest diagramot és felírjuk a mozgásegyenleteket. Ha a rendszer zárt, akkor az  $E_0 = E$  és  $p_0 = p$  összefüggéseket alkalmazzuk. Amennyiben csak konzervatív erők működnek, akkor a  $F = dU/dx$  képlettel dolgozunk.

Ezeknek a módszereknek a használatával hatalmas problémakör anyagát soroljuk négy osztályba, s erre igen könnyű emlékezni. Ez az egyszerűsítés jellemzi a jelenségek fizikai megközelítését – fel kell ismernünk az alapvető elveket, amelyek az elénk kerülő jelenségekben újra és újra felmerülnek. Ezekkel az elvekkkel a világegyetem jelenségeinek nagy tömege rendezhető egyszerű gondolati sémákba.

tömegű ingát a föléje lefelére besejtőz a vizsgált anyagból készített lemezbe és eltöri azt. A vizsgálandó lemez egy merev tartóba van befogva. Megmérve, hogy

pat? b) Határozzuk meg  $v$  és  $\mu$  függvényében, hogy mekkora erő hat a mozgó lapára?