

Formális módszerek az informatikában

Zárthelyi dolgozat feladatok megoldása

A. csoport

Jelöld meg az alábbi kérdésekhez felsorolt állítások közül azokat, amelyek helyes választ adnak a kérdésre! Figyelem: több állítás is helyes lehet a megadottak közül! (Minden kérdéshez tartozik legalább egy igaz állítás.)

1. Mi igaz egy *engedélyezett tranzícióra*?

- (a) A tranzíció engedélyezett, ha létezik legalább egy olyan bemenő hely amelyben legalább annyi token van, mint amennyi a helyből az átmenetbe vezető él súlya.

*Nem igaz. Egy tranzíció akkor engedélyezett, ha **minden** bemenő helyen legalább annyi token van, mint amennyi a helyből vezető él súlya (valamint, ha az átmenethez kapcsolódó kimenő helyek szabad kapacitása legalább annyi, mint az átmenetből a helyekbe vezető élek súlya).*

- (b) Ha egy tranzíció egy adott token eloszlás esetén engedélyezett, akkor biztos van olyan véges tüzelési szekvencia, amelynek ez a tranzíció az eleme.

*Nem igaz. A tranzíciók tüzelésének nemdeterminisztikus volta azt jelenti, hogy egy folyamatosan engedélyezett tranzíció bármikor tüzelhet a $[0, \infty)$ intervallumban, de **nem szükséges** tüzelnie. Még egyszerűbb ellenpéldát adni, ha a tranzíciókhoz prioritást rendelünk.*

- (c) Ha egy helyből egy kisebb és egy nagyobb prioritású időzítetlen tranzícióba egyaránt vezet él, akkor nincs olyan token eloszlás, amelyben a kisebb prioritású tranzíció tüzelhetne.

Nem igaz. Nem kötöttük ki, hogy a két tranzícióba (csak) ugyanabból a helyből vezet él, sem azt, hogy a két tranzíció mindig párhuzamosan engedélyezett. Így előfordulhat olyan token eloszlás, amelyben csak a kisebb prioritású tranzíció engedélyezett.

- (d) A tüzelés során egy engedélyezett tranzíció által a bemeneti helyekről elvett tokenek száma nem a bemeneti helyekben levő tokenek számától, hanem a bemenő élek súlyától függ.

Igaz, hiszen ha tüzelhet, akkor engedélyezett tranzícióról van szó, tehát megvolt a bemenetén a szükséges számú token. Ettől kezdve érdektelen, mennyivel van több token a bemenetein...

2. Mi igaz a *T-invariánsra*?

- (a) A T-invariáns azt mutatja meg, hogy a rendszerben levő erőforrások nem fogynak el a működés során.

*Nem igaz. A fenti tulajdonság a P-invariánst jellemzi. A T-invariáns egyes részrendszerek ciklikus működésének **lehetőségét** jelöli ki, azonban ugyanazon részrendszernek ettől még lehetnek más működési módjai is, amelyben elfogyasztja az általa használt erőforrásokat.*

- (b) Ciklikus működésű rendszerben biztosan található T-invariáns.

Igaz. Az állítás a T-invariáns definíciójából következik.

- (c) Ha egy \mathbf{W}^T szomszédossági mátrixszal rendelkező Petri hálóban a σ_T tüzelési szekvenciára igaz a következő összefüggés: $\mathbf{W}^T \sigma_T = 0$ és a σ_T szekvencia nem üres, akkor azt tüzelési invariánsnak nevezzük.

Igaz. A fenti egyenlet a T-invariáns definíciója.

- (d) Egy tüzelési invariáns nem lehet minimális, ha létezik olyan másik tüzelési invariáns, amely azonos számú tranzíciót tartalmaz.

Nem igaz. Létezik azonos részhalmazú másik tüzelési invariáns is a rendszerben, azonban annak tüzelési számai nem lehetnek kisebbek.

3. Hogyan jellemezhető az elérhetőségi gráf?

- (a) Az elérhetőségi gráfban az élek a tranzíciókkal állnak kapcsolatban.

Igaz, olyannyira, hogy az elérhetőségi gráf élei az egyes tranzíciók tüzeléseit jelképezik.

- (b) Az elérhetőségi gráfban levő csomópontok száma véges állapotú rendszerek esetén mindig kisebb, mint a hozzá tartozó Petri háló helyeinek, tranzíciónak és éleinek összama.

Nem igaz, valós rendszerekre pont az ellenkezője a jellemző: a rendszer modelljének állapottere (az elérhetőségi gráf) jóval nagyobb méretű, mint maga a rendszer modellje.

- (c) Az elérhetőségi gráf önmagában nem alkalmas egy véges állapotú rendszer deadlockmentességének bizonyítására.

Nem igaz. Más kérdés, hogy az állapottérben való keresés általában exponenciális komplexitású, így nem mindig praktikus.

- (d) Egy rendszer elérhetőségi gráfja és fedési gráfja csak akkor nem azonos, ha a rendszer nem véges állapotú.

Igaz. Az állítás indirekt módon, a jegyzetben szereplő tételt ($R(M_0)$ akkor és csak akkor véges, ha ω nem jelenik meg a fedési gráfban címkeként) alkalmazva könnyen igazolható.

4. Mi igaz az élőség vizsgálatokor?

- (a) Egy élő Petri háló **tetszőleges** kezdőállapotból elindítva deadlock-mentes.

Nem igaz. Mivel minden $M \in R(M_0)$ állapota visszatérő, így elérhetőségi gráfja erősen összekötött, azaz minden csomópontjában van legalább egy kimenő él. Tehát a fenti állítás igaz minden M állapotra. Azonban semmit sem mond egy $M' \notin R(M_0)$ állapotról.

- (b) Ha egy tranzíció L_2 élő és L_3 élő, akkor L_4 élő is.

Nem igaz. Lásd lejjebb.

- (c) Egy Petri háló L_2 élő, ha egy adott kezdőállapotból elindítva létezik L_2 élő tüzelése.

*Nem igaz. Egy Petri háló L_2 élő, ha **minden egyes** tüzelése L_2 élő.*

- (d) Ha egy Petri háló L_3 élő, akkor L_2 élő és L_1 élő is.

Igaz. Az L_4 -től L_0 -ig terjedő tulajdonságok tartalmazzák egymást.

5. Jól formált Petri hálók esetén **NEM IGAZ**, hogy

- (a) azok színezettek, és a számosságot színekkel fejezik ki.

Igaz, tehát helytelen állítás.

- (b) reguláris hálózatok esetén lehetővé teszik szimbolikus elérhetőségi gráfok megalakítását.

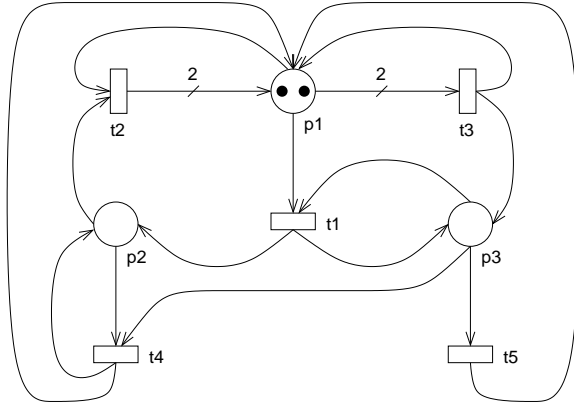
Igaz, tehát helytelen állítás.

- (c) az alapvető függvényeket tetszőleges módon kombinálhatjuk.

Nem igaz, tehát helyes állítás: a jól formált Petri hálók megközelítés alap gondolata az, hogy az alkalmazható színezést és tüzelési szabályokat a kezelhetőség érdekében korlátozza.

(d) tetszőleges szín esetén a hálózat működésének szimmetrikusan azonosnak kell lennie.
Igaz, tehát helytelen állítás.

6. Adott az ábrán látható Petri háló és a hozzá tartozó \mathbf{W}^T szomszédossági mátrix. A helyekbe írt pontok a kezdeti token eloszlást mutatják. Minden él egységnyi súlyú, kivéve $w(p_1, t_3) = 2$ és $w(t_2, p_1) = 2$.



$$\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ p_1 & -1 & a & -1 & b & 1 \\ p_2 & c & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 1 & d & -1 \end{bmatrix}$$

Milyen számokat kell a \mathbf{W}^T szomszédossági mátrixban a betűvel jelölt kitöltetlen helyekre írunk?

- (a) $a = 0, b = 1, c = -1, d = 1$
- (b) $a = 1, b = 1, c = 1, d = -1$
- (c) $a = 1, b = -1, c = -1, d = 1$
- (d) $a = 2, b = 1, c = 1, d = -1$

A helyes választ egyszerűen a tranzíciók kimenő és bemenő helyeihez kapcsolódó élek súlyának előjeles összegzésével számíthatjuk ki.

7. Melyek az előző feladat Petri hálójának minimális alapú T-invariánsai?

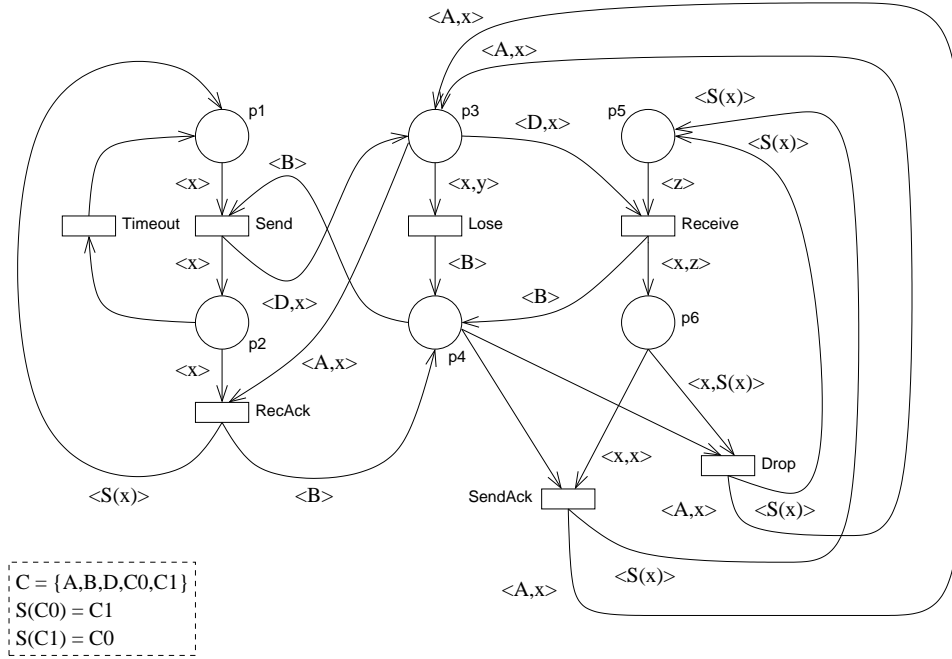
- (a) $\langle t_3, t_1, t_5, t_2 \rangle; \langle t_1, t_4 \rangle$
- (b) $\langle t_3, t_1, t_4, t_2, t_5 \rangle$
- (c) $\langle t_3, t_1, t_4, t_2 \rangle; \langle t_3, t_5 \rangle$
- (d) $\langle t_3, t_1 \rangle; \langle t_4, t_2 \rangle; \langle t_3, t_5 \rangle$

A válasz pl. a szomszédossági mátrix megfelelő oszlopainak összegzésével ellenőrizhető. Az első válasz első tagja szintén T-invariáns, azonban a második tagja nem az. Hasonló a negyedik válasz. A második válasz nem T-invariáns.

8. Az alábbi színezett Petri háló az előadáson ismertetett *alternáló bit protokollt* modellezi.

- A protokollban egy küldő és egy fogadó folyamat kommunikál. A küldő folyamat az üzeneteket egybites címkével látja el. A címkét minden új üzenet küldésekor invertálja.
- A fogadó minden üzenetet a címke visszaküldésével nyugtáz.
- A küldő az üzenetek elvesztését időtúllépéssel figyeli.
- A csatorna veszteséges: mind a küldött adatokat, mind a nyugtákat tartalmazó üzenetek elveszhetnek (de tartalmuk nem változhat meg).
- A hibás fázisban kapott üzenetek (pl. a fogadó 0-ás bittel jelölt üzenetet vár, de 1-es bittel jelölt üzenetet kap) egyszerűen eldobásra kerülnek.

- A p_1, p_2 helyek a hozzájuk kapcsolódó átmenetekkel együtt a küldő folyamat, p_3, p_4 helyek a hozzájuk kapcsolódó átmenetekkel együtt a kommunikációs csatorna, és a p_5, p_6 helyek a hozzájuk kapcsolódó átmenetekkel együtt a fogadó folyamat működését modellezzik.
- A nem jelölt élkifejezések egy darab, az adott bemeneti ill. kimeneti hely színkészletének megfelelő tokent szállítanak.
- Kezdeti állapotban a p_1 és p_5 helyen egy-egy $\langle C_0 \rangle$ színű token, a p_4 helyen egy $\langle B \rangle$ színű token van, a többi hely üres.
- A C_0, C_1 színek között az S rákövetkezési reláció teremt kapcsolatot az ábrán jelölt módon.



A feladat elolvasása és a színezett Petri háló modell megértése után jelöld meg az alábbi állítások közül azokat, amelyeket igaznak tartasz!

- (a) A p_3 helyen levő $\langle D, x \rangle$ színű token azt jelenti, hogy a kommunikációs csatornában egy (0 vagy 1 bittel jelölt) elküldött adatsomag tartózkodik.
Igaz. Ugyanígy a p_3 helyen levő $\langle A, x \rangle$ színű token azt jelenti, hogy a kommunikációs csatornában egy (0 vagy 1 bittel jelölt) nyugtázó üzenet van.
- (b) A Drop átmenet azt az eseményt modellezi, amikor a kommunikációs csatornából elvész egy adatot vagy nyugtát tartalmazó üzenet.
Nem igaz. A Drop átmenet azt modellezi, ha a fogadó hibás fázisban kapott üzenetet és azt eldobja.
- (c) A C_0, C_1 színek az üzenetekhez kapcsolt ellenőrző bitek értékét jelképezik.
Igaz, ez a szín a $\langle D, x \rangle$ és $\langle A, x \rangle$ színű tokenek második komponense.
- (d) Létezik olyan token eloszlás, amelyben p_5 helyen egynél több token található.
*Nem igaz. Az előadáson a színezetlen modell kapcsán már beláttuk, hogy a modell három állapotgép kompozíciójából áll elő, s mint ilyen, **biztos** tulajdonságú.*

B. csoport

Jelöld meg az alábbi kérdésekhez felsorolt állítások közül azokat, amelyek helyes választ adnak a kérdésre! Figyelem: több állítás is helyes lehet a megadottak közül! (Minden kérdéshez tartozik legalább egy igaz állítás.)

1. Mi igaz a P -invariánsra?

- (a) Ha egy Petri hálóban van konzervatív komponens, akkor ebből még nem következik az, hogy létezik benne P -invariáns is.

Nem igaz. Egy Petri háló (részlegesen) konzervatív, ha van benne P -invariáns.

- (b) Ha egy \mathbf{W}^T szomszédossági mátrixszal rendelkező Petri hálóban létezik olyan σ_P súlyvektor, hogy legalább egy token eloszlásra igaz a következő összefüggés: $\mathbf{W}^T \sigma_P = 0$ akkor a σ_P súlyvektort hely invariánsnak nevezzük.

Nem igaz. Minden a kezdőállapotból elérhető token eloszlásra teljesülnie kell a következő összefüggésnek: $\mathbf{W} \sigma_P = 0$ ahhoz, hogy a σ_P súlyvektort hely invariánsnak nevezhessük.

- (c) A P -invariáns segít annak ellenőrzésében, hogy a modellezett rendszerben levő folyamatok megfelelően kapcsolódnak-e az általuk használt erőforrásokhoz.

Igaz. A P -invariáns azt mutatja meg, hogy a rendszerben levő erőforrások nem fogynak el a működés során, és így jól használható pl. hozzáférési protollok helyességének bizonyításában.

- (d) Nem véges elérhetőségi gráffal rendelkező rendszerben csak akkor van P -invariáns, ha van ciklikus működésű komponense.

Nem igaz. Ellenpéldaként lássuk az alábbi szomszédossági mátrixszal megadott rendszert:

$$\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} & t_1 & t_2 & t_3 \\ p_1 & 1 & -1 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 & -1 \\ p_3 & 0 & -1 & 1 \\ p_4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jól látható, hogy a rendszernek nincs T -invariánsa, nem is korlátos (forrástranzíciót tartalmaz, ezért p_4 -ben folyamatosan nő a tokenek száma), de van P -invariánsa: $p_2 + p_3$.

2. Mi jellemző a perzisztens és fair tulajdonságokra?

- (a) A perzisztencia arra jellemző, hogy az eredetileg párhuzamosnak szánt rendszerbeli működések nem zavarják-e egymást.

Igaz. Mivel perzisztens hálóban az egyszerre engedélyezett tranzíciók tüzelése nem tilthatja le egymást, ezért a párhuzamos működések valóban függetlenek egymástól.

- (b) Ha egy Petri háló korlátos fair tulajdonságú, akkor az általa modellezett rendszerben nem fordulhat elő "kiéheztetés", azaz minden konkurens tevékenység véges időn belül végrehajtódik.

Igaz, hiszen ha egy tranzíció tetszőleges párja B -fair, akkor véges tüzelési szekvencia után tüzelni fog, hiszen bármely más tranzíció csak véges számú alkalommal tüzelhet anélkül, hogy a kiválasztott tranzíció tüzelne.

- (c) Két párhuzamosan engedélyezett tranzíció B -fair relációban áll egymással, ha bármelyikük mindaddig engedélyezve marad, amíg tüzel.

Nem igaz, ez a perzisztencia (pontatlan) definíciója.

- (d) Egy perzisztens Petri hálóban nem fordulhat elő az, hogy két párhuzamosan engedélyezett tranzíció közül az egyik végtelen sokszor tüzeljen, mielőtt a másik tüzelne.

Nem igaz, ez a korlátos fair tulajdonságú Petri hálók jellemzője.

3. Hogyan jellemezhető az *elérhetőség*?

- (a) Az elérhetőségi analízis a Petri háló dinamikus tulajdonságainak vizsgálatát jelenti.
Igaz, lásd jegyzet.

- (b) Ha egy Petri hálóban egy M_n token eloszlás elérhető az M_0 kezdőállapotból, akkor a háló által modellezett rendszer működése során legalább egyszer biztosan eljut a fenti token eloszlásnak megfelelő M_n állapotba.

Nem igaz, ez a Petri háló nondeterminisztikus volta miatt nincs így.

- (c) Az elérhetőségi analízis megvalósítására a szélességi keresés célravezetőbb eszköz, mint a mélységi keresés.

Igaz, hiszen egy nem korlátos elérhetőségi gráfban a mélységi keresés nem feltétlenül terminál még akkor sem, ha a keresett csomópont elérhető a kezdőállapotból.

- (d) Ha egy M_n token eloszlás elérhető az M_0 kezdőállapotból, akkor ebből következik, hogy az M_0 token eloszlás is elérhető az M_n állapotból.

Nem igaz, ez csak élő Petri hálók esetében mondható ki.

4. Egy Petri háló *fedési fájának analízise* alapján igaz, hogy

- (a) Egy halott tranzíció végtelen fában megjelenhet címkeként.

Nem igaz, egy halott tranzíció sem az elérhetőségi, sem a fedési gráfban nem jelenhet meg címkeként.

- (b) Egy háló akkor és csak akkor biztos, ha a fedési fa véges és csak 0 és 1 jelenik meg csomóponti címkeként a fedési fában.

Igaz. Ha a háló biztos, akkor a fedési fa véges (fordítva nem igaz), és ha csak 0 és 1 jelenik meg csomóponti címkeként a fedési fában, akkor a háló biztos.

- (c) Egy Petri háló korlátos, ha ω nem jelenik címkeként és a fedési fa véges.

Igaz. Ha ω nem jelenik címkeként, akkor az garantálja Petri háló korlátosságát és a fedési fa végeességét is.

- (d) Létezik olyan biztos, de nem korlátos Petri háló, melyre az élőségi probléma megoldható.

Nem igaz. Nem létezik biztos, de nem korlátos Petri háló.

5. *Predikátumok* modellezése invariánsokkal:

- (a) Ha egy negátlan klózrendszer megoldható (kielégíthető) akkor Petri hálós modelljében egy T-invariánsnak megfelelő tüzelési szekvencia végrehajtható.

Igaz. A modell kialakítása úgy történt, hogy a klózrendszer megoldása egy olyan tüzelési szekvenciának feleljen meg, ami T-invariáns.

- (b) T-invariánsokkal tetszőleges, negátlan elsőrendű logikai formulából álló rendszert analizálhatunk.

Igaz, lásd jegyzet.

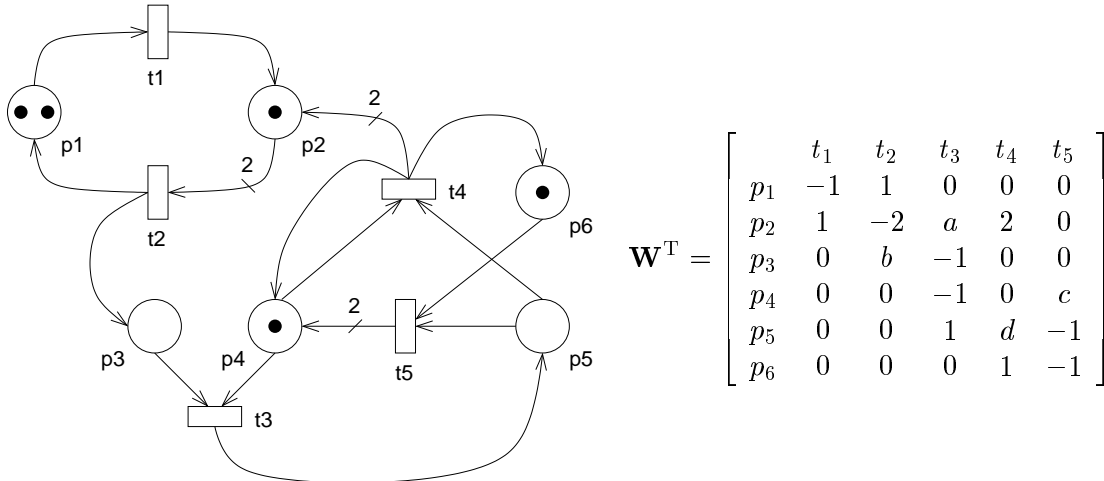
- (c) Egy logikai program Petri hálós modelljében a P- és T-invariánsok megegyeznek.

Nem igaz, a P-invariánsokról semmit sem mondtunk ki.

- (d) Murata algoritmus negálásmentes klózek esetén T-invariánsokra, negált klózekat is tartalmazó logikai program esetén P-invariánsokra működik.

Nem igaz. Murata algoritmusának működési feltétele, hogy a klózrendszer negátlan legyen.

6. Adott az ábrán látható Petri háló és a hozzá tartozó \mathbf{W}^T szomszédossági mátrix. A helyekbe írt pontok a kezdeti token eloszlást mutatják. Minden él egységnyi súlyú, kivéve $w(p_2, t_2) = 2$, $w(t_4, p_2) = 2$ és $w(t_5, p_4) = 2$.



Milyen számokat kell a \mathbf{W}^T szomszédossági mátrixban a betűvel jelölt kitöltetlen helyekre írunk?

- (a) $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$
 (b) $a = 0, b = -1, c = 2, d = 0$
 (c) $a = -1, b = 1, c = 1, d = -1$

(d) $a = 0, b = 1, c = 2, d = -1$

A helyes választ egyszerűen a tranzíciók kimenő és bemenő helyeihez kapcsolódó élek súlyának előjeles összegzésével számíthatjuk ki.

7. Melyek az előző feladat Petri hálójának minimális alapú P-invariánsai?

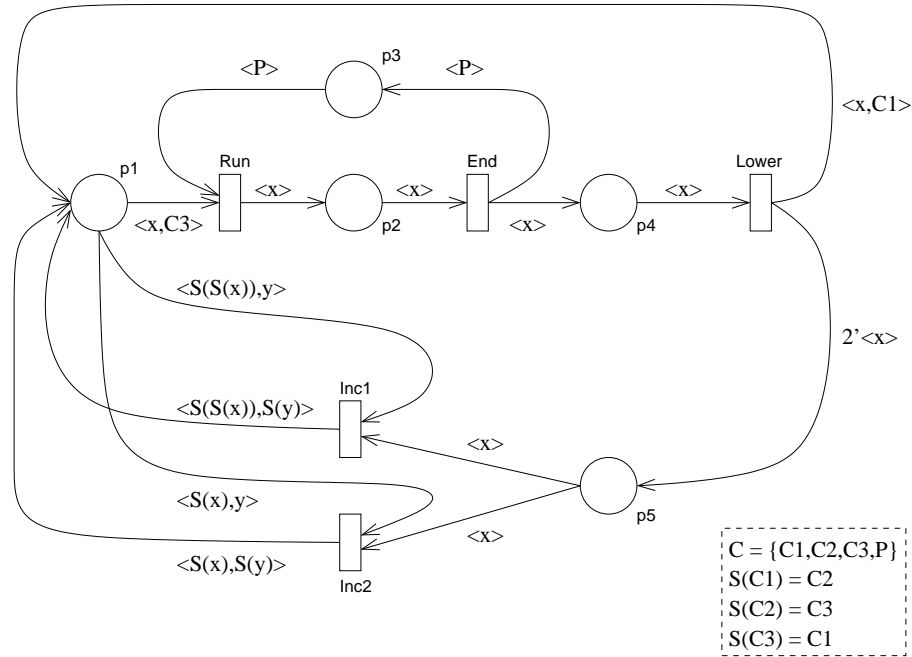
- (a) $p_1 + p_2 + p_3; p_4 + 2p_5; p_5 + p_6$
 (b) $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 2p_5; p_4 + p_5 + p_6$
 (c) $p_1 + p_2 + p_3; p_4 + p_5 + p_6$
 (d) $p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + 3p_5 + p_6$

A válasz pl. a szomszédossági mátrix megfelelő sorainak súlyozott összegzésével ellenőrizhető. Az harmadik válasz második tagja szintén P-invariáns, azonban az első tagja nem az. Az első és negyedik válasz második válasz nem tartalmaz P-invariánst.

8. Az alábbi színezett Petri háló három perifériát modellez, amelyek körforgó prioritás szerint férnek hozzá egy processzorhoz.

- A három periféria közül mindig a legmagasabb prioritású kaphat hozzáférési jogot a processzorhoz.
- A használat után a feladatát befejezett periféria a legalacsonyabb prioritási szintre kerül, miközben a másik két periféria az addiginál eggyel magasabb prioritást kap.
- Egyszerre csak egy periféria használhatja a processzort.

- A kezdőállapotban a p_1 helyen három token van: $\langle C_1, C_1 \rangle$, $\langle C_2, C_2 \rangle$ és $\langle C_3, C_3 \rangle$; a p_3 helyen egy $\langle P \rangle$ színű token van, a többi hely üres.
- A C_1, C_2, C_3 színek között az S rákövetkezési reláció teremt kapcsolatot az ábrán jelölt módon.



A feladat elolvasása és a színezett Petri háló modell megértése után jelöld meg az alábbi állítások közül azokat, amelyeket igaznak tartasz!

- (a) A p_1 hely $\langle x, y \rangle$ formájú kompozit színkészletének x -el jelölt első tagja a perifériákat azonosítja, y -al jelölt második tagja a perifériákhoz rendelt aktuális prioritást jelöli. Igaz. Ha már erre rájöttünk, akkor a modell működésének megértése egyszerű.
- (b) Az Inc1 átmenet a feladatát befejezett periféria prioritási szintjének csökkentését végzi. Nem igaz, azt a Lower átmenet végzi. Az Inc2 átmenet a két inaktív periféria közül a nagyobbik prioritási szintű periféria prioritását növeli eggyel.
- (c) Az Inc2 átmenet a két inaktív periféria közül a kisebbik prioritási szintű periféria prioritását növeli eggyel. Igaz, mert az $\langle x \rangle$ token az éppen működését befejezett (azaz korábban a legmagasabb prioritású) perifériát jelöli, az őt sorrend szerint követő periféria pedig az inicializálásnak megfelelően a legkisebb prioritású.
- (d) Az Inc1 és Inc2 átmenetek alkalmas élkifejezések használatával összevonhatók egyetlen átmenetté. Igaz. Egyszerűen két $\langle x \rangle$ tokenet kell elvenni a p_5 bemeneti helyről, egy $\langle S(x), y \rangle$ és egy $\langle S(S(x)), y \rangle$ tokenet kell elvenni a p_1 bemeneti helyről, majd egy $\langle S(x), S(y) \rangle$ és egy $\langle S(S(x)), S(y) \rangle$ tokenet visszatenni a p_1 kimeneti helyre.