1. feladat(9 pont)
megoldás

Írja le a számsorozat határértékének definícióját!

$(\mathrm{a_n})$ konvergens és határértéke $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \mathrm{A} \quad \text{ha} \quad \forall\varepsilon > 0\text{−hoz} \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}) \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{hogy} \quad |\mathrm{a_n} - \mathrm{A}| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad n > \mathrm{N}(\varepsilon). \qquad \boxed{3\mathrm{p}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6 + n^2 - 4n^3}{6n\sqrt{n} + (2n)^3 - 12} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
|\mathrm{a_n} - \mathrm{A}| &= \left| \frac{6 + n^2 - 4n^3}{6n\sqrt{n} + (2n)^3 - 12} + \frac{1}{2} \right| = \\
&= \left| \frac{6 + n^2 - 4n^3 + 3n\sqrt{n} + 4n^3 - 6}{6n\sqrt{n} + 8n^3 - 12} \right| = \\
&= \frac{n^2 + 3n\sqrt{n}}{6n\sqrt{n} + 8n^3 - 12} \leq \frac{n^2 + 3n^2}{8n^3 - n^3} = \qquad \boxed{3\mathrm{p}} \\
&= \frac{4n^2}{7n^3} = \frac{4}{7n} < \varepsilon \\
n &> \frac{4}{7\varepsilon} \Rightarrow \mathrm{N}(\varepsilon) \geq \left[\frac{4}{7\varepsilon} \right] \qquad \boxed{3\mathrm{p}}
\end{aligned}$$

2. feladat(17 pont)
megoldás

$\mathrm{a_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 5^{n+1}+9^n}{n^{13}-\frac{1}{3}9^n} = \quad \boxed{1\text{p}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{35\left(\frac{5}{9}\right)^n+1}{n^{13}\left(\frac{1}{9}\right)^n-\frac{1}{3}} = \quad \boxed{3\text{p}}$$
$$= \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3 \quad \boxed{2\text{p}}$$

$\mathrm{b_n}$: $\boxed{6\text{p}}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{b_n} = \lim_{n\to\infty} (1+7n^{-2})^{n^3}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[(1+\frac{7}{n^2})^{n^2}\right]^n$$
$$2^7 < \left(1+\frac{7}{n^2}\right)^{n^2} \qquad \text{ha} \qquad n > \mathrm{N_0}$$
$$2^{7n} < \left(1+\frac{7}{n^2}\right)^{n^3} \to \infty \qquad \text{rendorelv szerint}$$

$\mathrm{c_n}$:

$$\mathrm{c_n} = \sqrt{n^4+5n^2}-\sqrt{n^4-3n} = \frac{5n^2+3n}{\sqrt{n^4+5n^2}+\sqrt{n^4-3n}} =$$
$$= \frac{n^2}{n^2}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^3}}} \to \quad \boxed{3\text{p}}$$
$$\to \frac{5}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{5}{2} \quad \boxed{2\text{p}}$$

3. feladat(15 pont)
megoldás

a) A: *Ha egy sorozat korlátos, akkor konvergens.*

- ∗ A korlátosságból nem következik a konvergencia. $\boxed{1\text{p}}$
- ∗ példa: $(-1)^n$, korlátos, mert $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, de oszcillálóan divergens, nem konvergens. $\boxed{2\text{p}}$

B: *Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.* $\boxed{2\text{p}}$

- ∗ Tanult tétel: $(\mathrm{a_n})$ konvergens $\Rightarrow$ $(\mathrm{a_n})$ korlátos, azaz a korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának.

b) *Mondja ki a konvergens számsorozat torlódási pontjaira vonatkozó tételt!*
$(\mathrm{a_n})$ számsorozat, akkor és csak akkor konvergens, ha pontosan egy valós szám a torlódási pontja. $\boxed{3\text{p}}$

$$\mathrm{a_n} = \cos(n\pi)\left(\frac{2n-3}{2n+17}\right)^n$$

$$\left(\frac{2n-3}{2n+17}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{-3/2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{17/2}{n}\right)^n} \to \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{17}{2}}} = e^{-10} \qquad \boxed{4\text{p}}$$

$$\text{ha} \quad n = 2k+1 \quad \cos n\pi = -1 \Rightarrow \mathrm{a_n} \to -e^{-10} \qquad \boxed{1\text{p}}$$

$$\text{ha} \quad n = 2k \quad \cos n\pi = 1 \Rightarrow \mathrm{a_n} \to e^{-10} \qquad \boxed{1\text{p}}$$

$$\mathrm{S} = \{-e^{-10}, e^{-10}\} \qquad \underline{\lim}\,\mathrm{a_n} = -e^{-10} \quad \overline{\lim}\,\mathrm{a_n} = e^{-10} \qquad \boxed{1\text{p}}$$

4. feladat(11 pont)
megoldás

Sejtés: $a_n \downarrow$
Bizonyítás: teljes indukcióval

I.

$$a_1 > a_2 > a_3$$

II.

$$\text{tfh.} \quad a_{n-1} > a_n$$

III.

$$\text{Igaz} - \text{e, hogy } a_n > a_{n+1}\,?$$

$$\begin{aligned}
\text{II.miatt :} \quad 2a_{n-1} &> 2a_n \\
2a_{n-1} + 8 &> 2a_n + 8 \\
\underbrace{\sqrt{2a_{n-1} + 8}} &> \underbrace{\sqrt{2a_n + 8}} \\
a_n &> a_{n+1} \qquad \boxed{3p}
\end{aligned}$$

Az a_n sorozat alulról korlátos, mert $a_n > 0 \quad \forall$n–re. $\boxed{3p}$

(i) Tehát $(a_n) \downarrow$ és (a_n) alulról korlátos $\Rightarrow$ (a_n) konvergens. $\boxed{2p}$

(ii) A határérték kielégíti a rekurzív formulát: $A = \sqrt{AA + 8} \rightarrow A^2 - 2A - 8 = 0$
$A_1 = -2 \qquad A_2 = 4 \qquad$ Tehát a határérték: 4 $\boxed{3p}$

5. feladat(12 pont)
megoldás

$$\mathrm{a_n} = \frac{c^{2n}}{16^n} + 8 = \left(\frac{c^2}{16}\right)^n + 8$$

a)

$$\mathrm{a_n} \to 0 + 8 \qquad \text{ha} \qquad \left|\frac{c^2}{16}\right| < 1 \qquad \text{azaz} \qquad |c| < 4 \qquad \boxed{2\text{p}}$$

$$\mathrm{a_n} \to 1 + 8 \qquad \text{ha} \qquad \left|\frac{c^2}{16}\right| = 1 \qquad \text{azaz} \qquad |c| = \pm 4 \qquad \boxed{2\text{p}}$$

Minden más esetben divergens. $\boxed{2\text{p}}$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2}{16}\right)^n + 8 = 8 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2}{16}\right)^n \to \text{geom.sor} \quad q = \frac{c^2}{16}$$

$$\text{Konvergens,} \quad \text{ha} \quad |q| = \frac{c^2}{16} < 1 \Rightarrow |c| < 4 \qquad \boxed{2\text{p}}$$

$$\text{Sorosszeg} \qquad 8 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c^2}{16}\right)^n = 8 + \frac{\frac{c^2}{16}}{1 - \frac{c^2}{16}} \qquad \boxed{4\text{p}}$$

6. feladat(7 pont)
megoldás

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}+2^{2n+1}}{5^{n+2}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{-\frac{1}{3}(-3)^n+2\cdot 4^n}{25\cdot 5^n} = \qquad \boxed{1\text{p}}$$

$$= -\frac{1}{3\cdot 25}\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n+\frac{2}{25}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \qquad \boxed{3\text{p}}$$

$$= -\frac{1}{3\cdot 25}\cdot\frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}{1+\frac{3}{5}}+\frac{2}{25}\cdot\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1-\frac{4}{5}} \qquad \boxed{3\text{p}}$$

7. feladat(8 pont)
megoldás

Majoráns kritérium:

$$\text{Ha} \quad 0 < \mathrm{a_n} \leq \mathrm{c_n} \quad \forall n\text{–re} \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{c_n}\,\text{konv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a_n}\,\text{konv.} \qquad \boxed{3\text{p}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{n^2+\sqrt{6n+4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a_n}$$

$$\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{n^2+\sqrt{6n+4}} \leq \frac{1}{n^2+\sqrt{6n+4}} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \boxed{3\text{p}}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ konv. $\Rightarrow$ a majoráns krit. miatt $\sum \mathrm{a_n}$ is konvergens. $\boxed{2\text{p}}$

8. feladat(21 pont)
megoldás

a) Rendőrelvvel:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n^5+2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+4}{n^5+2}\right)}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{-4} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}n^{-4}} \leq \sqrt[n]{\frac{n}{n^5+n^5}} \quad \boxed{2p}$$

$$\leq \sqrt[n]{\frac{n+4}{n^5+2}} \quad \text{rendorelv miatt} \quad \boxed{2p}$$

$$\leq \sqrt[n]{\frac{n+4n}{n^5}} = \sqrt[n]{\frac{5}{n^4}} = \sqrt[n]{5}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{-4} = 1 \quad \boxed{2p}$$

felhasználtuk, hogy $\sqrt[n]{p} \to 1 \quad p > 0 \qquad \sqrt[n]{n} \to 1$

$$\mathrm{b_n} = \frac{n+12}{n^2+9} = \frac{n^2}{n^2}\frac{\frac{1}{n}+\frac{12}{n^2}}{1+\frac{9}{n^2}} \to \frac{0+0}{1+0} = 0 \quad \boxed{2p}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mathrm{a_n}$$

Mivel az általános tag $\mathrm{a_n} \to 1 \neq 0$, ezért nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, vagyis

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mathrm{a_n} \ \textit{divergens} \quad \boxed{4p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mathrm{b_n}$$

$\mathrm{b_n} \to 0$, teljesül a konvergencia szükséges feltétele. $\boxed{1p}$

1) *Abszolút konvergens-e?*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \mathrm{b_n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+12}{n^2+9}$$

$$\frac{n+12}{n^2+9} \geq \frac{n}{n^2+9n^2} = \frac{1}{10}\frac{1}{n}$$

$\frac{1}{10}\sum\frac{1}{n}$ divergens $\to$ a minoráns kritérium miatt *nem abszolút konvergens* $\boxed{2p}$

2) *Feltételesen konvergens-e* $\to$ *Leibniz sor-e?*
   Kérdés:
   - $\mathrm{b_n} \downarrow 0$?
   - monoton csökkenő-e? $\mathrm{b_{n+1}} \leq \mathrm{b_n}$?

$$\mathrm{b_n} \to 0 \qquad \text{(lehet konvergens)} \quad \boxed{2p}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{b_{n+1}} &\leq \mathrm{b_n} \\ \frac{n+13}{(n+1)^2+9} &\leq \frac{n+12}{n^2+9} \\ (n+13)(n^2+9) &\leq (n+12)(n^2+2n+10) \\ 0 &\leq n^2+25n+3 \quad \boxed{3p} \end{aligned}$$

telsesül a két feltétel $\Rightarrow$ feltételesen konvergens $\boxed{1p}$

Összesen: 100p

00–39		*elégtelen*(1)
40–54		*elégséges*(2)
55–69		*közepes*(3)
70–84		*jó*(4)
85–100		*jeles*(5)