Méréselmélet 1. zárthelyi pótlás 2022.03.30. (100 perc)

1. Két konstans érték között ugrásszerűen váltakozó jelet detektálunk három zajos megfigyelésre alapozva. A megfigyelések független, Gauss eloszlású valószínűségi változók a és $7a$ várható értékkel, $\sigma_w = 0.5$ szórással. H_0 jelzi azt a hipotézist, hogy a jel a értékű ($a \neq 0$ és véges). Ennek a priori valószínűsége P_0=0.8. H_1 jelzi az a hipotézist, hogy a jel $7a$ értékű. Ennek a priori valószínűsége P_1=0.2. A költségek: C_{10} =C_{01} =10; C_{00} =C_{11} =1. Határozza meg a mért adatok előfeldolgozásának módját és a döntési küszöb értékét (max. 4 pont)! Hogyan dönt, ha a mért értékek: $z_0 = 2a$, $z_1 = 6a$, $z_2 = 4a$ (max. 2 pont)? Mi a feltétele annak, hogy a döntési küszöb $4a$ legyen (max. 1 pont)?

Megoldás:

$$f\{z|H_0\} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_w\right)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}(z_n-a)^2}, \qquad f\{z|H_1\} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_w\right)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}(z_n-7a)^2}$$

A megfigyelt értékeket behelyettesítjük a log-likelihood arány függvénybe, és ha $ln\Lambda(z) > ln\eta$, akkor a döntés H_1, ha $ln\Lambda(z) < ln\eta$, akkor a döntés a H_0.

$$ln\Lambda(z) = lnf\{z|H_1\} - ln\, f\{z|H_0\} = -\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}(z_n - 7a)^2 + \frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}(z_n - a)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} ln\eta$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z_n \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_w^2}{6Na} ln\eta + 4a$$

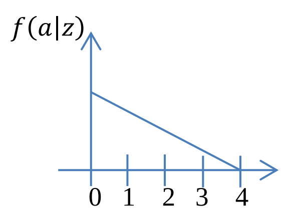
$$\eta = \frac{0.8(10-1)}{0.2(10-1)} = 4,$$

ezekkel az előfeldolgozás és a döntési küszöb:

$\frac{1}{3}(2a + 6a + 4a) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{0.25}{18a} ln4 + 4a = \frac{0.01925}{a} + 4a$, illetve osztva a-val: $4 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{0.01925}{a^2} + 4$, azaz a döntés H_0 függetlenül a-tól.

A döntési küszöb akkor $4a$, ha $\frac{\sigma_w^2}{6Na} ln\eta = 0$. Ehhez $\eta = 1$, vagy $\sigma_w^2 \to 0$, vagy $N \to \infty$, vagy $a \to \infty$ kell.

2. Az ábrán látható a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (max. 3 pont), a minimális átlagos abszolút hibájú becslő (max. 2 pont), és a maximum a posteriori becslő (max. 1 pont) számértékét! Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő varianciáját (max. 2 pont)!



Megoldás:

$$f(a|z) = -\frac{a}{8} + \frac{1}{2}$$

$$\hat{a}_{MS} = \int_0^4 af(a|z)da = -\int_0^4 \frac{a^2}{8}da + \int_0^4 \frac{a}{2}da = -\frac{a^3}{24}\Big]_0^4 + \frac{a^2}{4}\Big]_0^4 = 1\frac{1}{3},$$

mert $f(a|z)$ értéke 0-nál $1/2$, így az egyenes szakasz meredeksége $1/8$.

$$\hat{a}_{ABS} = 4 - 2\sqrt{2} \cong 1.1716,$$

mert a vízszintes tengelyen 4-től eddig terjedően a jobboldali háromszög területe: $(4 - \hat{a}_{ABS})^2/16 = 1/2$.

$$\hat{a}_{MAP} = 0,$$

mert $f(a|z)$ itt veszi fel legnagyobb értékét.

$$var(\hat{a}_{MS}) = \int_0^4 a^2 f(a|z)da - \hat{a}_{MS}^2 = -\int_0^4 \frac{a^3}{8}da + \int_0^4 \frac{a^2}{2}da = -\frac{a^4}{32}\Big]_0^4 + \frac{a^3}{6}\Big]_0^4 - \hat{a}_{MS}^2 =$$
$$= \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \frac{8}{9} \cong 0.889$$

3. Mérendő egy ismert jel ismeretlen A amplitúdója N megfigyelésre alapozva: $z(n) = Acos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + w(n)$, $n = 0,1,\dots N-1$. Az ismeretlen A paraméter eloszlása nem ismert. A w_k megfigyelési zaj nulla várható értékű, Gauss eloszlású, színes zaj, kovariancia mátrixa $\mathbf{C}_w$. Vezesse le a paraméter legjobb maximum likelihood (ML) becslésének ($\hat{a}_{ML}, \boldsymbol{C}_{\hat{a}_{ML}}$) összefüggéseit (max. 4 pont)! Határozza meg $\boldsymbol{C}_{\hat{a}_{ML}}$számértékét $\sigma_w = 0.1V, \rho = 0.5$ és $\boldsymbol{C}_w = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}$ mellett (max. 3 pont)!

Megoldás:

Az együttes sűrűségfüggvény logaritmusának az A paramétertől függő része:

$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)$$

Ennek deriváltja A szerint:

$$\frac{\partial}{\partial A}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)\right] = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A),$$

ahonnan

$$\hat{A}_{ML} = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z}.$$

A becslő varianciája (kovariancia mátrixa):

$$C_{\hat{A}_{ML}} = E\left[\left(\hat{A}_{ML} - E(\hat{A}_{ML})\right)\left(\hat{A}_{ML} - E(\hat{A}_{ML})\right)^T\right] =$$

$$= \{[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)\}\{[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)\}^T =$$

$$[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)^T \boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1} = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}$$

ahol felhasználtuk, hogy $E(\hat{A}_{ML}) = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}A$, valamint, hogy definíciója szerint

$$(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)^T = \boldsymbol{C}_w$$

A numerikus értékek meghatározásához:

$$\boldsymbol{U}^T = \left[1 \quad cos\frac{2\pi}{N} \quad \cdots \quad cos\frac{2\pi}{N}(N-1)\right] = [1 \quad -0.5 \quad -0.5]$$

ahol most $N = 3$.

$C_w = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}$ inverze: $\boldsymbol{C}_w^{-1} = \frac{1}{\sigma_w^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\rho^2} & -\frac{\rho}{1-\rho^2} \\ 0 & -\frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} \end{bmatrix} = \frac{100}{V^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & -2/3 & 4/3 \end{bmatrix}$

$$[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}] = \frac{100}{V^2}[1 \quad -0.5 \quad -0.5]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & -2/3 & 4/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \frac{400}{3V^2}$$

vagyis

$$C_{\hat{A}_{ML}} = var(\hat{A}_{ML}) = 0.0075V^2$$

4. Egy diszkrét idejű autonóm rendszer állapotátmenet mátrixa: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}$, megfigyelési mátrixa $C = [1,1]$. Határozza meg a rendszerhez illesztett megfigyelő G erősítés mátrixának elemeit úgy, hogy a megfigyelő véges lépésben konvergáljon (max. 4 pont)! Rajzolja le a megfigyelő jelfolyamgráfját (max. 2 pont)!

Megoldás:

$$A - GC = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}[1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 - g_0 & 0.1 - g_0 \\ 0.1 - g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix}$$

A sajátértékekre vonatkozó kritérium felhasználásával:

$$det[\lambda I-(A-GC)]=(\lambda-1+g_0)(\lambda+1+g_1)-0.01+0.1*(g_0+g_1)-g_0*g_1=0$$

$$\lambda^2+\lambda*(g_0+g_1)+1.1*g_0-0.9*g_1-1.01=\lambda^2=0$$

$g_0+g_1=0,\ 1.1*g_0-0.9*g_1=1.01$, ahonnan $g_0=0.505,\ g_1=-0.505$

A jelfolyamgráf rajzolásával még adós vagyok! (pg)

5. Távolságot mérünk radarral: $R=\tau\frac{c}{2}$, ahol τ a reflektálódott elektromágneses hullám terjedési ideje, c a fénysebesség. A terjedési idő megfigyelésére van lehetőségünk, összesen N megfigyelést végzünk. A megfigyelési egyenlet: $z_k=\tau+w_k$, ahol w_k nulla várható értékű, $\boldsymbol{C}_w$ kovariancia mátrixú, ismeretlen eloszlású zaj. Válasszon olyan mérési módszert, amely garantáltan torzítatlan becslést eredményez! Adja meg a becslő és varianciája explicit kifejezését (max. 3 pont)! Elérjük-e a variancia CRLB értékét (max. 1 pont)? Adja meg a numerikus értékeket is, ha $z_0=95\mu s, z_1=105\mu s$, $\boldsymbol{C}_w=\sigma_w^2\begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}$, $\sigma_w=3\mu s$, $\rho=0.5$ (max. 2 pont)! Ezt követően határozza meg a távolság értékét és szórását ($c=3\cdot10^5\frac{km}{s}$) (max. 1 pont)!

   Fontolja meg, hogy tudja-e használ a következő összefüggéseket:

$$\hat{\boldsymbol{a}}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z},\ cov(\hat{\boldsymbol{a}})=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}$$

Megoldás:

Ismeretlen valószínűségsűrűség-függvényű csatorna-karakterisztika esetén a BLUE módszerrel próbálkozhatunk:

$$\hat{\tau}_{BLUE}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z},$$

illetve

$$var(\hat{\tau}_{BLUE})=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}$$

A konkrét esetben:

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}=\frac{1}{\sigma_w^2(1-\rho^2)}[1\quad 1]\begin{bmatrix}1 & -\rho\\ -\rho & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{2}{\sigma_w^2(1+\rho)},$$

vagyis:

$$var(\hat{\tau}_{BLUE})=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}=\frac{\sigma_w^2(1+\rho)}{2},\hat{\tau}_{BLUE}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z}=\frac{z_0+z_1}{2}$$

A példa esetében a CRLB nem értelmezett, mert a sűrűségfüggvény nem ismert.
A numerikus értékek:

$$\hat{\tau}_{BLUE}=100\mu s,\qquad var(\hat{\tau}_{BLUE})=0.75\times 9\mu s^2=6.75\mu s^2$$

A távolság értéke és szórása:

$$\hat{R}_{BLUE}=\hat{\tau}_{BLUE}\frac{c}{2}=10^{-4}s\frac{3\cdot10^5}{2}\frac{km}{s}=15km,$$

$$\sqrt{var(\hat{R}_{BLUE})}=\frac{c}{2}\sqrt{var(\hat{\tau}_{BLUE})}=\frac{3\cdot10^8}{2}\frac{m}{s}2.598\cdot10^{-6}s\approx 389.7m$$

6. A $z(n)=Asin(2\pi f_0 n+\varphi)+w(n)$ összefüggéssel leírható megfigyelési modellt alkalmazunk, ahol $w(n)$ Gauss eloszlású, fehér zaj, $0<f_0<\frac{1}{2}$ a mintavételi frekvenciára relatív jelfrekvencia. A mért jel néhány egész periódusából 100 mintát veszünk. A jel/zaj viszony: $\frac{A^2}{2\sigma_w^2}=10$. Vezesse le a fázisbecslés varianciájának Cramer-Rao alsó korlátját megadó összefüggést, és számítsa ki numerikus értékét (max. 5 pont)!

Megoldás:

Az $f(\boldsymbol{z};\varphi)$ együttes sűrűségfüggvény logaritmusának az A paramétertől függő része:

$$-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}[z(n)-Asin(2\pi f_0 n+\varphi)]^2$$

$$\frac{\partial lnf(z;\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{A}{\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}[z(n)-Asin(2\pi f_0 n+\varphi)]\,cos(2\pi f_0 n+\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 lnf(z;\varphi)}{\partial^2\varphi} = -\frac{A}{\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}[z(n) - Asin(2\pi f_0 n + \varphi)]\,sin(2\pi f_0 n + \varphi) - \frac{A^2}{\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1} cos^2(2\pi f_0 n + \varphi)$$

$$var(\varphi) \geq \left[-E\left(\frac{\partial^2 lnf(z;\varphi)}{\partial^2\varphi}\right)\right]^{-1} = \frac{\sigma_w^2}{A^2\sum_{n=0}^{N-1} cos^2(2\pi f_0 n + \varphi)}$$

Mivel

$$cos^2(2\pi f_0 n + \varphi) = \frac{1}{2}\big(1 + cos(4\pi f_0 n + \varphi)\big),$$

ezért teljes periódusra:

$$var(\varphi) \geq \frac{2\sigma_w^2}{A^2 N} = \frac{1}{1000} = 0.001$$