Matematikai összefoglaló

Vektorok

Nagyon sok olyan mennyiség van, amely nem jellemezhető egyetlen számmal. Az ilyen mennyiségre a legegyszerűbb és mindenki által jól ismert példa, valamely pontnak a helyzete a térben. Amikor tájékozódunk és egy pont helyzetét meg akarjuk határozni, akkor mindig más ponthoz képesti helyzetét adjuk meg. Ezt a pontot vonatkoztatási pontnak, vagy origónak nevezzük. Ettől mérjük a pont távolságát. Ahhoz, hogy a pont helyzete egyértelmű legyen, két kiválasztott irányhoz képesti két szöget is meg kell adni. Vagyis egy pont helyzetét így három adat fogja jellemezni, egy távolság és két szög.

Általában az olyan mennyiségeket, amelyek a nagyságukkal és irányukkal jellemezhetőek, vektoroknak nevezzük.

Jelölésükre nyomtatásban vastagon szedett kis és nagy betűket használunk. Kézírásban pedig alul, vagy felül vonással jelezzük az adott mennyiség vektor voltát.

Például:

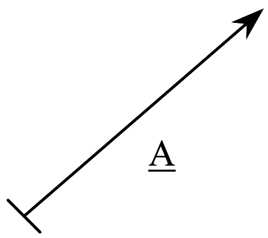
	nyomtatásban	kézírásban
helyvektor	$\mathbf{r}$	$\underline{r}$ vagy $\bar{r}$

Általában ha “A” egy vektor, akkor

	nyomtatásban	kézírásban
bármely vektor	$\mathbf{A}$	$\underline{A}$ vagy $\overline{A}$

Grafikus ábrázolás:

Vektorok ábrázolása rendkívül szemléletes, amelyet egy irányított szakasz jelképez. A vektor nagyságát (hosszát) a szakasz hossza jelzi, az irányát pedig a szakasz egyik végére tett nyíl (lásd 1. ábra).



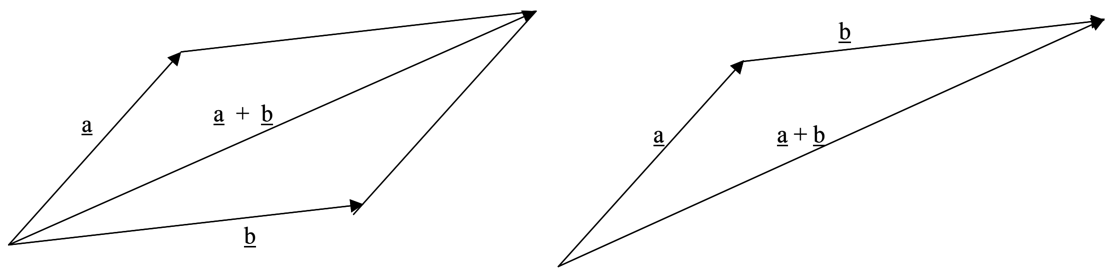
1. ábra.
Az $\underline{A}$ vektor grafikus ábrázolása

Az $\underline{A}$ vektor hosszát $|\underline{A}|$-val jelöljük, amit a vektor abszolutértékének is szokás nevezni. Előfordul, hogy az abszolutértéket egyszerűen csak A-val jelölik. Az $|\underline{A}|$ mindig nagyobb, vagy egyenlő 0.

Műveletek vektorokkal:

Összeadás:

Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két vektor, akkor az $\underline{a}+\underline{b}$ vektort úgy értelmezzük, hogy a két vektor kezdőpontjait egy pontba helyezzük az egyik vektor önmagával párhuzamos eltolásával, és két vektor által kifeszített parallelogramma átlóját tekintjük az $\underline{a}+\underline{b}$ vektornak. Az összegvektor iránya a közös pontból a parallelogramma átellenes csúcsa felé mutat.



a) b)

2. ábra.
Két vektor összege (parallelogramma szabály)

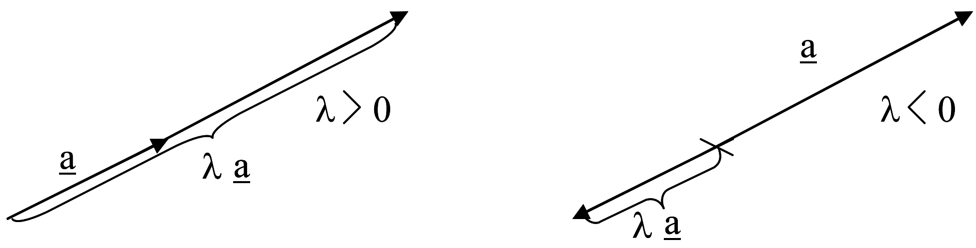
A 2. ábra b) ábrája jelzi az $\underline{a}+\underline{b}$ vektor egy ekvivalens előállítását.

Az összeadás műveletének definíciójából jól látszik, hogy a vektorok összeadása kommutatív (felcserélhető) művelet, azaz

$$\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$$

Vektor valós számmal való szorzása:

Ha $\underline{a}$ egy vektor és λ egy valós szám, akkor a $\lambda\underline{a}$ vektort úgy értelmezzük, amelynek iránya $\underline{a}$-val azonos, ha $\lambda > 0$, és $\underline{a}$-val ellentétes, ha $\lambda < 0$, nagysága pedig $|\lambda| \cdot |\underline{a}|$ (lásd 3. ábra).



3. ábra

Kivonás:

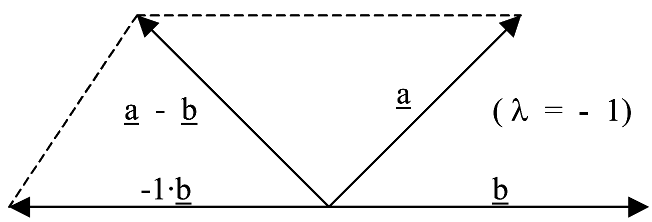
Két vektor kivonását az összeadás és a valós számmal való szorzás definíciója alapján értelmezzük.

Az összeadás és a valós számmal való szorzás alapján értelmezni lehet két vektor különbségét is.

Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két vektor, akkor

$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-1 \cdot \underline{b})$$

módon lehet értelmezni a két vektor különbségét (lásd 4. ábra).



4. ábra.
Két vektor különbsége

Egységvektor:

Az olyan vektort, amelynek abszolútértéke (hossza) egységnyi, egységvekornak nevezzük. Ha $\underline{a}$ egy vektor és „a" a vektor nagysága, akkor 1/a-val szorozva az $\underline{a}$ vektort, $\underline{a}$ irányába mutató egységvektort kapunk.

Jelöljük ezt $\underline{e}$-vel $\qquad \underline{e} = \frac{1}{a}\underline{a}$

Valóban $\qquad |\underline{e}| = \frac{1}{a}|\underline{a}| = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Ez azt jelenti, hogy bármely vektor a saját irányába mutató egységvektor és egy λ szám szorzataként előállítható.

$\underline{a} = \lambda \underline{e}$ $\qquad$ ahol $\underline{e}$ az $\underline{a}$ irányába mutató egységvektor és $\qquad \lambda = |\underline{a}|$

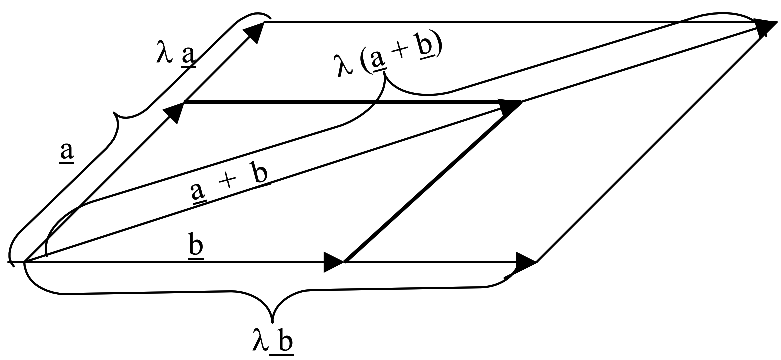
<u>Disztributivitás a számmal való szorzásra</u>:

Két vektor összegét szorozva λ valós számmal

arra nézve igaz a következő állítás: $\qquad \lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$

Biz:

(lásd 5. ábra).



5. ábra

A háromszögek hasonlóságából következik, hogy λb és λa oldalhosszúságú parallelogramma átlója is λ szorosára változik.

Továbbá ha μ és λ valós számok és $\underline{a}$ egy vektor, akkor igaz a következő állítás:

$$(\mu + \lambda)\underline{a} = \mu\,\underline{a} + \lambda\,\underline{a}$$

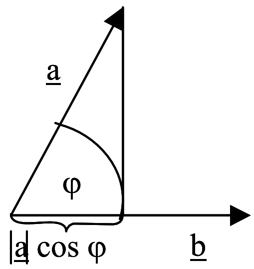
Biz.: Mivel a valós számmal való szorzás az $\underline{a}$ vektor irányát nem változtatja meg csak a vektor hosszát, ezért az állítás ekvivalens a valós számokra vonatkozó disztributív szorzási szabállyal.

Skaláris szorzás:

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor skaláris szorzatán azt a valós számot értjük, amelyet $\underline{a} \cdot \underline{b}$-vel jelölünk és a következő módon definiálunk:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a \cdot b \cos \varphi,$$

ahol „a” és „b” az $\underline{a}$ illetve $\underline{b}$ vektorok hosszai (nagyságai), φ pedig a két vektor által bezárt kisebbik szög (lásd 6. ábra).



6. ábra.

Két vektor skaláris szorzata az 6. ábra szerint megadja az $\underline{a}$ vektornak $\underline{b}$ vektor irányába eső vetületének $\underline{b}$ vektor hosszával való szorzatát. Az előállításból látszik, hogy

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$$

azaz a skaláris szorzat kommutatív.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a \cdot b \cos \varphi = b \cdot a \cos \varphi = \underline{b} \cdot \underline{a}$$

Két vektor skaláris szorzását a „·”jel jelzi szemben a valós számoknál nem kiírt szorzásjellel. Előforduló jelölés még két vektor skaláris szorzására $(\underline{a}\ \underline{b})$ jelölés is. A skaláris szorzat lehetőséget ad arra, hogy megállapítsuk azt, hogy két vektor merőleges egymásra. Ugyanis ha két nem nulla vektor skaláris szorzata 0, az csak úgy lehetséges, hogy a definícióban szereplő $\cos \varphi = 0$ azaz $\varphi = \frac{\pi}{2}\left(90^\circ\right)$.

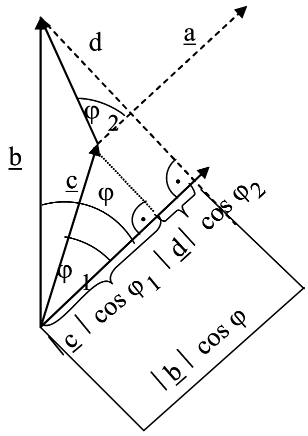
Skaláris szorzás disztributivitása:

Ha pl. a $\underline{b}$ vektor két másik vektor összege

$$\underline{b} = \underline{c} + \underline{d}$$

akkor $$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot (\underline{c} + \underline{d}) = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{a} \cdot \underline{d}$$

Ezt nevezzük a skaláris szorzat disztributivitásának (szétválaszthatóság). Bizonyítást lásd 7. ábra szerint.



7. ábra

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}|\cos\varphi = \underline{a}\cdot\underline{c} + \underline{a}\cdot\underline{d} = |\underline{a}|\cdot|\underline{c}|\cos\varphi_1 + |\underline{a}|\,|\underline{d}|\cos\varphi_2 = |\underline{a}|\left(|\underline{c}|\cos\varphi_1 + |\underline{d}|\cos\varphi_2\right)$$

de a 7. ábra szerint

$$|\underline{c}|\cos\varphi_1 + |\underline{d}|\cos\varphi_2 = |\underline{b}|\cos\varphi$$

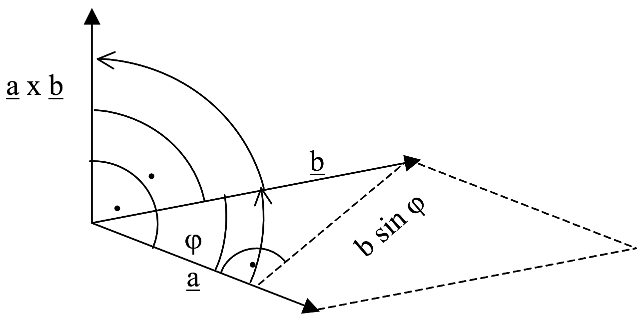
így valóban igaz a disztributivitás.

<u>Vektoriális szorzat</u>:

A vektoriális szorzat eredménye vektor, amelynek nagyságát a két vektor hosszának (nagyságának) és a két vektor által bezárt szög szinuszának szorzata adja úgy mérve a szöget, hogy az $\underline{a}$ vektortól $\underline{b}$ felé az óramutató járásával ellentétesen jutunk.

$$|\underline{a}\times\underline{b}| = ab\sin\varphi \qquad \text{(az } \underline{a}\times\underline{b} \text{ nagysága)}$$

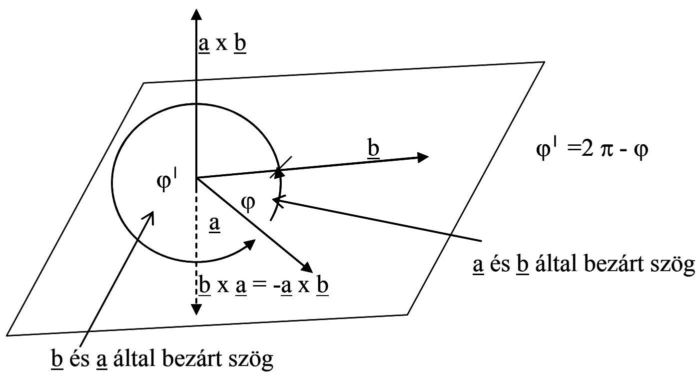
Az $\underline{a}\times\underline{b}$ vektor iránya pedig az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok által kifeszített síkra merőleges irány, úgy, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és az $\underline{a}\times\underline{b}$ vektorok jobbsodrású tengelyrendszert alkotnak (8. ábra).



8. ábra
Vektoriális szorzat

Az $\underline{a}\times\underline{b}$ vektor mind az $\underline{a}$, mind a $\underline{b}$ vektorra merőleges és nagysága az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor által kifeszített parallelogramma területével egyezik (lásd 8. ábra).

Az $\underline{a}$-ból a $\underline{b}$-n keresztül, az óramutató járásával ellentétesen jutunk az $\underline{a}\times\underline{b}$ vektor irányába. A definícióból rögtön következik, hogy a vektoriális szorzat nem kommutatív, hanem $\underline{a}\times\underline{b} = -\underline{b}\times\underline{a}$ (lásd 9. ábra)



9. ábra
„jobb kéz szabály"

A fenti szorzási szabály „jobb kéz szabály" néven is ismert.

<u>Vektoriális szorzás disztributivitása</u>:

Ha $\underline{b}$ két vektor összege $\underline{b} = \underline{c} + \underline{d}$

akkor a vektoriális szorzásra is igaz a disztributivitás (szétoszthatóság)

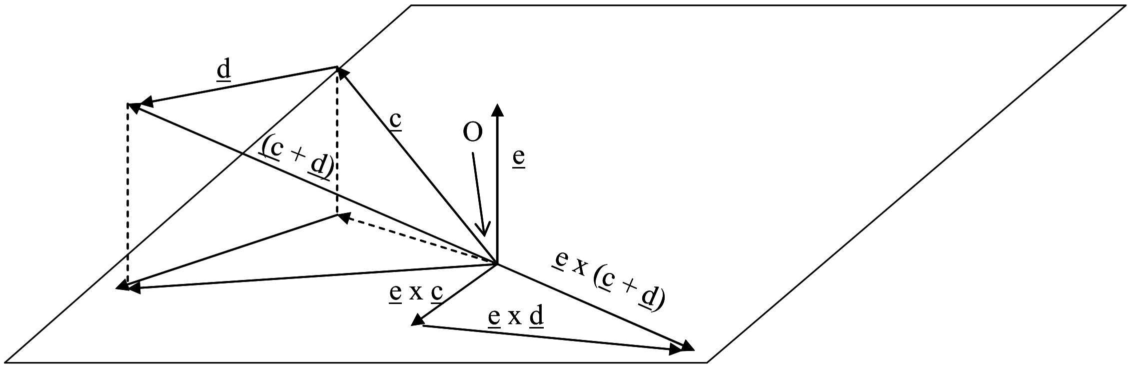
$$\underline{a}\times(\underline{c}+\underline{d}) = \underline{a}\times\underline{c} + \underline{a}\times\underline{d}$$

mivel $\underline{a} = \lambda\underline{e}$

alakban előállítható, ezért λ-val való osztással a fenti egyenlet

$$\underline{e}\times(\underline{c}+\underline{d}) = \underline{e}\times\underline{c} + \underline{e}\times\underline{d} \quad \text{alakú.}$$

Ezért elegendő elvégezni a bizonyítást $\underline{a}$ irányába mutató egységvektorra, mert λ-val való szorzással az eredeti állítást kapjuk.



10. ábra

Vetítsük az $\underline{e}$-re merőleges síkra a $\underline{c}$ vektort a $\underline{d}$ vektort és a $\underline{c}+\underline{d}$ vektort. Ezen vetületeknek a hossza rendre (lásd 10. ábra).

$$|\underline{c}|\ \sin(\underline{c},\underline{e}),$$

$$|\underline{d}|\ \sin(\underline{d},\underline{e}),$$

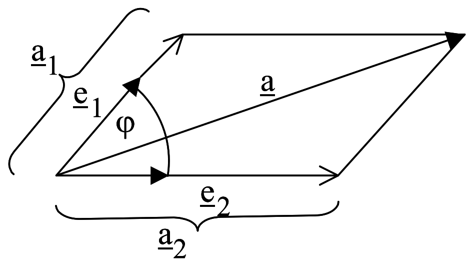
$$|\underline{c}+\underline{d}|\ \sin(\underline{c}+\underline{d},\,\underline{e})$$

ahol $(\underline{c},\underline{e})$, $(\underline{d},\underline{e})$ és $(\underline{c}+\underline{d},\,\underline{e})$ az $\underline{e}$ vektornak és a $\underline{c}$, illetve $\underline{d}$, valamint $\underline{c}+\underline{d}$-vel bezárt szögeit jelöli.

Ezek az értékek éppen az $\underline{e}\times\underline{c}$, az $\underline{e}\times\underline{d}$ és $\underline{e}\times(\underline{c}+\underline{d})$ szorzatok abszolút értékei. Így ha a levetített szakaszból álló háromszöget 90°-al az O körül $\underline{e}$-re merőleges síkban az óra járásával ellentétes irányban elfordítjuk, éppen az $\underline{e}\times\underline{c}$ a $\underline{e}\times\underline{d}$ és a $\underline{e}\times(\underline{c}+\underline{d})$ vektorokat kapjuk. Ezzel állításunkat beláttuk.

Vektorok koordinátás alakjai

Legyen $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ ugyanazon síkban lévő egymással $\varphi \neq 0$ szöget bezáró egységvektorok, akkor egy ugyanezen síkban lévő tetszőleges $\underline{a}$ vektor ezen egységvektorok segítségével előállítható (lásd 11. ábra). Helyezzük e három vektor kezdőpontját egy közös pontba, a vektorok önmagukkal párhuzamos eltolásával. Az $\underline{a}$ vektor végpontján keresztül húzzunk egy-egy párhuzamos egyenest az $\underline{e}_1$, illetve $\underline{e}_2$ irányával. Ezen egyenesek egyike az $\underline{e}_1$ irányban kijelöl egy $\underline{a}_1$ vektort, és a másik az $\underline{e}_2$ irányban egy $\underline{a}_2$ vektort.



11. ábra

$\underline{a}$ vektor felbontása két $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ egységvektor irányába mutató vektorra

A parallelogramma szabály szerint

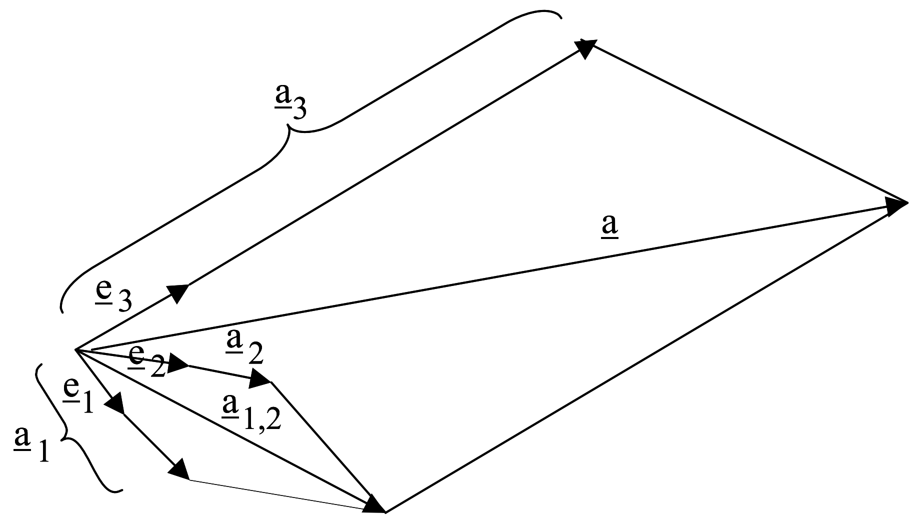
$$\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 \qquad \text{de} \qquad \underline{a}_1 = a_1\underline{e}_1 \qquad \text{és} \qquad \underline{a}_2 = a_2\underline{e}_2$$

így

$$\underline{a} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2$$

Ez azt jelenti, hogy bármely egy síkban lévő, nem azonos irányú két egységvektor alkalmas arra, hogy az általuk kifeszített sík bármely $\underline{a}$ vektorát előállítsuk. Más szavakkal, az a_1 és a_2 számok az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ egységvektorok által kifeszített síkban egyértelműen meghatározzák az $\underline{a}$ vektort.

Ha nem két egységvektort hanem három nem egysíkban lévő egységvektort választunk, ugyanezt az eredményt kapjuk háromdimenziós esetben is (lásd 12. ábra).



12. ábra

Az ábrából a parallelogramma szabály szerint

$$\underline{a} = \underline{a}_{1,2} + \underline{a}_3$$

de $$\underline{a}_{1,2} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2,$$

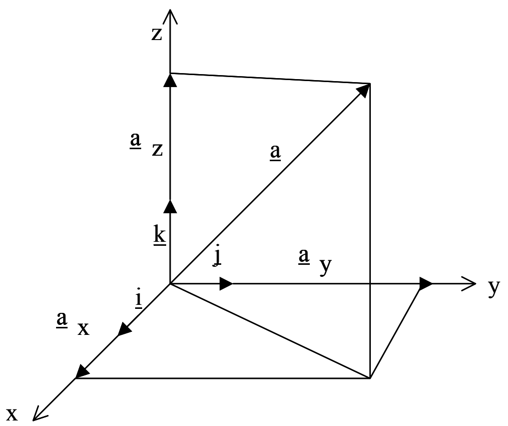
így $$\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3$$

Mivel $\underline{a}_1 = a_1\underline{e}_1$, $\underline{a}_2 = a_2\underline{e}_2$ és $\underline{a}_3 = a_3\underline{e}_3$

Így $$\underline{a} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + a_3\underline{e}_3$$

Vagyis az $\underline{a}$ vektor az $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ úgynevezett bázisvektorok által meghatározott bázison az a_1, a_2 és a_3 számokkal egyértelműen meghatározott.

Az $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ ilyen választása a legáltalánosabb. A gyakorlat számára igazán fontos eset, amikor az $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ kölcsönösen merőlegesek egymásra. Ez megfelel a Descartes-féle derékszögű koordináta rendszernek, amelynek tengelyei merőlegesek egymásra. Általánosan elfogadott, hogy a Descartes rendszerben az x, y és z irányokba mutató egységvektorok jelölése $\underline{i}$, $\underline{j}$ és $\underline{k}$.



13. ábra
Descartes-féle koordináta rendszerben az $\underline{i}$, $\underline{j}$ és $\underline{k}$ egységvektorok

Így egy tetszőleges $\underline{a}$ vektor

$$\underline{a} = \underline{a}_x + \underline{a}_y + \underline{a}_z$$

de $\underline{a}_x = a_x\underline{i}$, $\underline{a}_y = a_y\underline{j}$, $\underline{a}_z = a_z\underline{k}$

amiből $$\underline{a} = a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k}$$

Így egy tetszés szerinti $\underline{a}$ vektor a Descartes-féle koordináta rendszerben jellemezhető egy a_x, a_y, a_z számhármassal, azaz $\underline{a}$ vektor azonosítható ezen számhármassal.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Az a_x, a_y, és a_z-t a vektor x, y és z komponenseinek (koordinátáinak) nevezzük.

Mivel $\underline{i}$, $\underline{j}$ és $\underline{k}$ kölcsönösen merőleges egységvektorok, így a skaláris szorzat definíciójából következnek a következő összefüggések:

$$\underline{i}\cdot\underline{i} = \underbrace{|\underline{i}|}_{|i|=1}\ \underbrace{|\underline{i}|}_{|i|=1} \cos(\underline{i}, \underline{i}) = 1$$

ahol $\cos(\underline{i}, \underline{i})$ jelöli $\underline{i}$ vektornak önmagával bezárt szög (0º) koszinuszát.

Hasonlóan

$$\underline{j}\cdot\underline{j} = 1 \qquad \text{és} \qquad \underline{k}\cdot\underline{k} = 1$$

A kölcsönös merőlegességből

$$\underline{i}\cdot\underline{j} = \underbrace{|\underline{i}|}_{|i|=1}\ \underbrace{|\underline{i}|}_{|i|=1} \cos(\underline{i}, \underline{j}) = 0$$

ahol $\cos(\underline{i}, \underline{j})$ jelenti az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektorok által bezárt szög (90º) koszinuszát.

Hasonlóan

$$\underline{j}\cdot\underline{k} = 0$$

$$\underline{k}\cdot\underline{i} = 0$$

Ugyanúgy a vektoriális szorzás szabályából kapjuk:

$$\underline{i}\times\underline{j} = \underline{k} \quad \rightarrow \quad \underline{j}\times\underline{i} = -\underline{k}$$

$$\underline{j}\times\underline{k} = \underline{i} \quad \rightarrow \quad \underline{k}\times\underline{j} = -\underline{i}$$

$$\underline{k}\times\underline{i} = \underline{j} \quad \rightarrow \quad \underline{i}\times\underline{k} = -\underline{j}$$

Összeadás koordinátás szabályai (Descartes rendszer):

Legyen két vektor $\underline{a}$ és $\underline{b}$

$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k} \qquad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Ekkor felhasználva a vektorok valós számokkal való szorzásra vonatkozó disztributív szabályokat:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_x + b_x)\underline{i} + (a_y + b_y)\underline{j} + (a_z + b_z)\underline{k}, \qquad \underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Vagyis két vektor összegének koordinátái a vektorok koordinátáinak összege.

Skalárral való szorzás koordinátás alakja:

Legyen $\underline{a}$ egy vektor és λ egy valós szám.

Az $\underline{a}$ koordinátás alakja: $\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$

A skalárral való szorzás disztributív tulajdonság miatt

$$\lambda \underline{a} = \lambda a_x \underline{i} + \lambda a_y \underline{j} + \lambda a_z \underline{k}$$

Vagyis $$\lambda \underline{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

azaz minden koordináta λ-szorosára változik.

Skaláris szorzás koordinátás alakja:

Legyen két vektor $\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$

$$\underline{b} = b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k}$$

Ekkor a skaláris szorzás disztributív szabálya miatt

$$\underline{a}\cdot\underline{b}=\left(a_x\underline{i}+a_y\underline{j}+a_z\underline{k}\right)\left(b_x\underline{i}+b_y\underline{j}+b_z\underline{k}\right)=$$

$$=a_xb_x\underline{i}\cdot\underline{i}+a_xb_y\underline{i}\cdot\underline{j}+a_xb_z\underline{i}\cdot\underline{k}+$$

$$+a_yb_x\underline{j}\cdot\underline{i}+a_yb_y\underline{i}\cdot\underline{j}+a_yb_z\underline{j}\cdot\underline{k}+$$

$$+a_zb_x\underline{k}\cdot\underline{i}+a_zb_y\underline{k}\cdot\underline{j}+a_zb_z\underline{k}\cdot\underline{k}$$

Mivel $\underline{i}\cdot\underline{j}=\cdot\underline{i}\cdot\underline{k}=\underline{j}\cdot\underline{k}=0$ és $\underline{i}\cdot\underline{i}=\underline{j}\cdot\underline{j}=\underline{k}\cdot\underline{k}=1$

így kapjuk:

$$\boxed{\underline{a}\cdot\underline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

Speciálisan $\underline{a}=\underline{b}$ esetén $\underline{a}\cdot\underline{a}=|\underline{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$

Amelyből $|a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ ami a vektor abszolút értéke.

Megjegyezzük, hogy $\underline{a}\cdot\underline{a}$ helyett gyakran az $\underline{a}^2$ jelölést használják.

<u>Vektoriális szorzás koordinátás alakja</u>

Legyen $\underline{a}=a_x\underline{i}+a_y\underline{j}+a_z\underline{k}$

és $\underline{b}=b_x\underline{i}+b_y\underline{j}+b_z\underline{k}$

Ekkor

$$\underline{a}\times\underline{b}=a_xb_x\underline{i}\times\underline{i}+a_xb_y\underline{i}\times\underline{j}+a_xb_z\underline{i}\times\underline{k}+$$

$$+a_yb_x\underline{j}\times\underline{i}+a_yb_y\underline{j}\times\underline{j}+a_yb_z\underline{j}\times\underline{k}+$$

$$+a_zb_z\underline{k}\times\underline{i}+a_zb_y\underline{k}\times\underline{j}+a_zb_z\underline{k}\times\underline{k}$$

Kihasználtuk a vektoriális szorzás disztributív voltát.

Mivel $\underline{i}\times\underline{i}=\underline{j}\times\underline{j}=\underline{k}\times\underline{k}=0$

és $\underline{i}\times\underline{j}=\underline{k}$ $\quad\underline{j}\times\underline{k}=-\underline{k}$

$\underline{j}\times\underline{k}=\underline{i}$ $\quad\underline{k}\times\underline{j}=-\underline{i}$

$\underline{k}\times\underline{i}=\underline{j}$ $\quad\underline{i}\times\underline{k}=-\underline{j}$

Kapjuk

$$\boxed{\underline{a}\times\underline{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\underline{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\underline{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\underline{k}}$$

A könnyebb megjegyezhetőség végett

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

A determináns kifejtési szabály szerint éppen a fenti eredményt adja.

Kettős vektoriális szorzat (kifejtési tétel)

Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ három vektor, akkor értelmezni lehet az

$(\underline{a} \text{ x } \underline{b}) \text{x } \underline{c}$ és az $\underline{a} \text{ x} (\underline{b} \text{ x } \underline{c})$ vektoriális szorzatokat.

A $(\underline{b} \text{ x } \underline{a}) \text{x } \underline{c}$ a $\underline{c} \text{ x} (\underline{a} \text{ x } \underline{b})$ és az $\underline{a} \text{ x} (\underline{c} \text{ x } \underline{b})$ szorzatok is értelmesek de ezek az előbbi kettő -1-el való szorzásából megkaphatók. Ezért elegendő az $(\underline{a} \text{ x } \underline{b}) \text{x } \underline{c}$ és az $\underline{a} \text{ x} (\underline{b} \text{ x } \underline{c})$ vektoriális szorzatokat vizsgálni.

<u>Kifejtési tétel:</u>

Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ tetszőleges vektorok, akkor a következő két azonosság igaz:

$(\underline{a} \text{ x } \underline{b}) \text{x } \underline{c} = (\underline{a}\ \underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\ \underline{c})\underline{a}$ illetve $\underline{a} \text{ x} (\underline{b} \text{ x } \underline{c}) = (\underline{a}\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\ \underline{b})\underline{c}$

A második egyenlőség az elsőből megkapható, hiszen egy tényezőcserével az első egyenletből kapjuk -1-el való szorzás után.

$\underline{c} \text{ x} (\underline{a} \text{ x } \underline{b}) = -(\underline{a}\underline{c})\underline{b} + (\underline{b}\ \underline{c})\underline{a}$

Betűcserével $\underline{c} \leftrightarrow \underline{a}$ pedig ebből $\underline{a} \text{ x} (\underline{c} \text{ x } \underline{b}) = -(\underline{c}\ \underline{a})\underline{b} + (\underline{b}\ \underline{a})\underline{c}$ -t kapunk, amelyből a

$\underline{c} \text{ x } \underline{b} = -\underline{b} \text{ x } \underline{c}$ helyettesítés és -1-el való szorzás után $\underline{a} \text{ x} (\underline{b} \text{ x } \underline{c}) = (\underline{a}\ \underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\ \underline{b})\underline{c}$ egyenlőséget kapjuk, ami éppen a második azonosság. Ezért elegendő belátni csak az első azonosságot, azaz a $(\underline{a} \text{ x } \underline{b}) \text{x } \underline{c} = (\underline{a}\ \underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\ \underline{c})\underline{a}$ -t.

<u>Bizonyítás:</u>

1) Nézzük először azt az esetet, amikor $\underline{a} \parallel \underline{b}$. Ekkor mindkét vektor egy $\underline{e}$ egységvektorral kifejezhető: $\underline{a} = \alpha\, \underline{e}$ és $\underline{b} = \beta\, \underline{e}$

A baloldal nyilván 0, hiszen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ párhuzamos esetben $0^\circ -$ os szöget zár be, ekkor pedig a vektoriális szorzat értéke 0. A jobb oldalról pedig behelyettesítéssel láthatjuk be, hogy 0, ugyanis $(\alpha\ \underline{e}\ \underline{c})\beta\ \underline{e} - (\beta\ \underline{e}\ \underline{c})\alpha\ \underline{e} = \alpha\ \beta\{(\underline{e}\ \underline{c})\underline{e} - (\underline{e}\ \underline{c})\underline{e}\} = 0$

Vagyis $\underline{a} \parallel \underline{b}$ esetén beláttuk az állítást.

2) $\underline{a}$ és $\underline{b}$ ne legyen egyirányú.

a. Ekkor, ha $\underline{c}$ -re igaz az állítás, akkor $\lambda \cdot \underline{c}$ is igaz. Ugyanis az $(\underline{a} \text{ x } \underline{b}) \text{x } \underline{c} = (\underline{a}\ \underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\ \underline{c})\underline{a}$ egyenletet megszorozva λ -val $(\underline{a} \text{ x } \underline{b})\lambda\ \underline{c} = (\underline{a}\ \lambda\underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\ \lambda\underline{c})\underline{a}$ egyenletet kapjuk.

b. ha $\underline{c}_1$-re és $\underline{c}_2$-re igaz az állítás, akkor $\underline{c}_1 + \underline{c}_2$-re is igaz. Ugyanis felírva az egyenlőséget $\underline{c}_1$ és $\underline{c}_2$-re, ezeket összeadva a $\underline{c}_1 + \underline{c}_2$-re vonatkozó egyenlőséget kapunk.

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}_1 = (\underline{a}\,\underline{c}_1)\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{c}_1)\underline{a}$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}_2 = (\underline{a}\,\underline{c}_2)\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{c}_2)\underline{a}$$

összeadás után

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c}_1 + \underline{c}_2) = (\underline{a}\ \ \underline{c}_1 + \underline{c}_2)\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{c}_1 + \underline{c}_2)\underline{a}$$

Mivel $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ három nem egyirányú vektor, ezért bármely $\underline{c}$ vektor előállítható az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\underline{c} = \alpha\,\underline{a} + \beta\,\underline{b} + \gamma\,\underline{a} \times \underline{b}$. Így az előbbiek alapján elég a tételt belátni $\underline{c} = \underline{a}$-ra, $\underline{c} = \underline{b}$-re és $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$-re.

Az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektora az állítás nyilvánvaló, ugyanis baloldal 0, hiszen minden vektor önmagával képzett vektoriális szorzata 0, jobb oldal pedig helyettesítéssel adódik. $o = (\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{a}\ \underline{a}\mathrm{x}\underline{b})\underline{b} - (\underline{b}\ \underline{a}\mathrm{x}\underline{b})\underline{a}$

Mivel az $\underline{a} \times \underline{b}$ merőleges mind $\underline{a}$-ra, mind $\underline{b}$-re, így az $(\underline{a}\ \underline{a}\mathrm{x}\underline{b})$ és $(\underline{b}\ \underline{a}\mathrm{x}\underline{b})$ tényezők 0-t adnak. Már csak $\underline{a}$-ra és $\underline{b}$-re kell igazolnunk az állítást, azaz a

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = (\underline{a}\ \ \underline{a})\underline{b} - (\underline{a}\,\underline{b})\underline{a} \text{ és a}$$

$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{b} = (\underline{a}\ \ \underline{a})\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{b})\underline{a}$ egyenlőségeket kell belátni. A második egyenletet nem kell belátni, mert az az elsőből következik. Ugyanis az első egyenletben $\underline{a}$-t felcserélve $\underline{b}$-re $(\underline{b} \times \underline{a}) \times \underline{b} = (\underline{b}\ \ \underline{b})\underline{a} = (\underline{a}\,\underline{b})\underline{b}$-t kapjuk.

Felhasználva a $\underline{b} \times \underline{a} = -(\underline{a} \times \underline{b})$-t és szorozva az egyenletet -1-el, kapjuk: $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{b} = (\underline{a}\ \ \underline{a})\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{b})\underline{a}$-t, ami éppen a $\underline{b}$-re vonatkozó egyenlőség. Ezért elegendő belátni csak $\underline{a}$-ra az egyenlőséget, azaz $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = (\underline{a}\,\underline{a})\underline{b} - (\underline{a}\,\underline{b})\underline{a}$. Legyen $\underline{e}$ $\underline{a}$ irányba mutató egységvektor. Ekkor $\underline{a} = \alpha\,\underline{e}$ alakba írható, ahol $\alpha = |\underline{a}|$. Beírva $\underline{a}$ kifejezését az egyenlőségbe

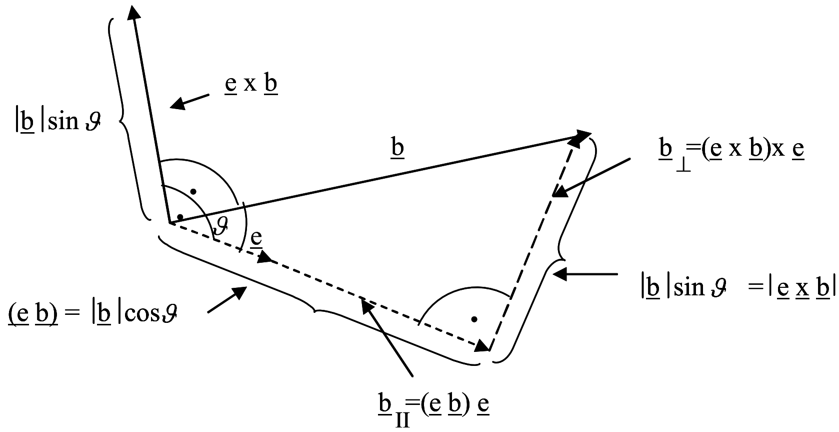
$$(\alpha\ \ \underline{e} \times \underline{b}) \times \alpha\,\underline{e} = \alpha^2(\underline{e}\,\underline{e})\underline{b} - \alpha(\underline{e}\,\underline{b})\alpha\,\underline{e}$$

$$\alpha^2(\underline{e} \times \underline{b}) \times\ \underline{e} = \alpha^2\underline{b} - \alpha^2(\underline{e}\,\underline{b})\,\underline{e}$$

Elosztva α^2 -el a következő egyenlőséget kapjuk:

$(\underline{e} \times \underline{b}) \times\ \underline{e} = \underline{b} - (\underline{e}\,\underline{b})\,\underline{e}$, vagy átrendezve $\underline{b} = (\underline{e} \times \underline{b}) \times\ \underline{e} + (\underline{e}\,\underline{b})\,\underline{e}$

Az ábráról az egyenlőség jelentése könnyen leolvasható:



Ez pedig azt fejezi ki, hogy bármely $\underline{b}$ vektort fel lehet bontani tetszőleges $\underline{e}$ irányú $\underline{b}_{II}$ vektorra és az $\underline{e}$-re merőleges, az $\underline{e}$, $\underline{b}$ által meghatározott síkban lévő $\underline{b}_{\perp}$ vektorra. Vagyis $\underline{b} = \underline{b}_{\perp} + \underline{b}_{II}$ ami az ábrából is nyilvánvaló. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Vektor-skalár függvények

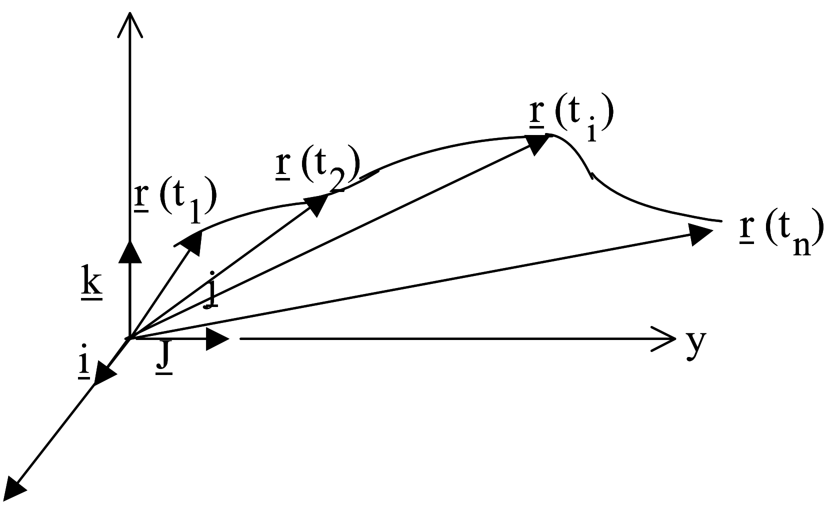
A fizikában gyakran előfordul, hogy egy vektor nagysága és iránya (tehát a vektor) egy skalár mennyiségtől függ. Egyik legnyilvánvalóbb példa egy test helyzetvektora, amely ha a test mozog, akkor az időnek függvénye.

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

Ez azt jelenti teljes általánosságban, hogy mindhárom koordináta a t skalár (az említett esetben az idő) függvénye.

Az olyan függvényt, amely egy skalár értékéhez vektort rendel, vektor skalár függvénynek nevezzük.

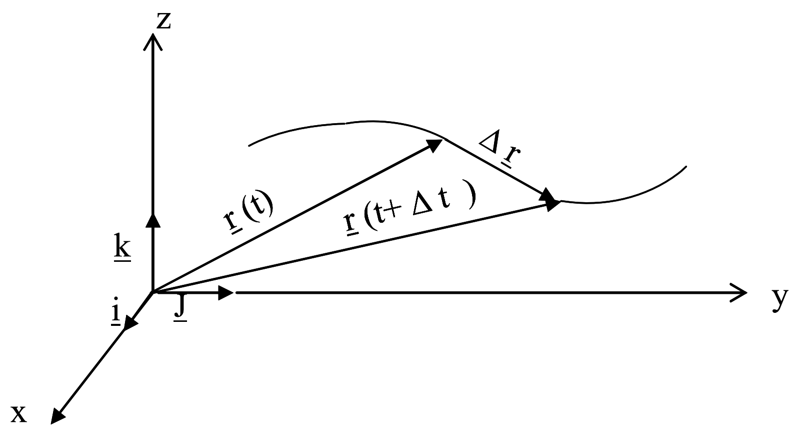
Ábrázolás: Ha veszünk egy $t_1, t_2 ... t_n$, növekedő paraméter sorozatot, akkor minden egyes t_i-hez a függvény hozzárendeli az $\underline{r}(t_i)$ vektort, amelynek komponensei $x(t_i)$, $\underline{y}(t_i)$ és $z(t_i)$. Ha az $\underline{r}(t_1)$, $\underline{r}(t_2) \ldots \underline{r}(t_n)$ vektorok végpontjait összekötjük, egy térbeli görbét kapunk. (14. ábra).



Ha az $\underline{r}(t)$ történetesen egy pont helyzete az idő függvényében, akkor az $\underline{r}(t)$ térbeli görbét a pont pályájának nevezzük.

Vektor-skalár függvény deriváltja:

Sokszor fontos kérdés az, hogy a vektor skalár függvény változójának bizonyos megváltozására mennyivel változik meg a vektor. Ennek jellemzésére legalkalmasabb a differencia hányados, amelyet a következő módon definiálunk.
Legyen t és $t+\Delta t$ a független változó két értéke és $\underline{r}(t)$, $\underline{r}(t+\Delta t)$ a hozzájuk rendelt vektorok.
Értelemszerűen a differenciahányadoson a $\frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$ kifejezést értjük (lásd 15. ábra).



15. ábra

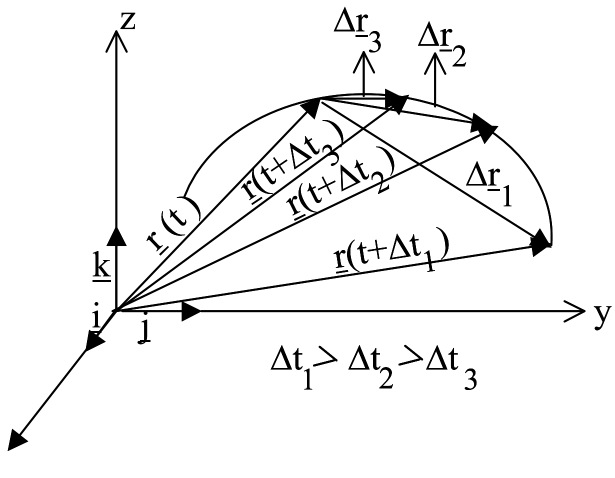
A $\Delta \underline{r}$-t az $\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)$ adja és mivel a valós számmal való szorzás értelmezett, így van értelme $\frac{1}{\Delta t}$-vel szorozni $\Delta \underline{r}$ vektort. A $\Delta \underline{r}$ vektor az $\underline{r}(t)$ görbe $\underline{r}(t)$ és $\underline{r}(t+\Delta t)$ pontjai által meghatározott húrvektort jelenti.

Ha a független változó a „t" változását egyre kisebbre választjuk, akkor a húr hossza is egyre kisebb lesz, így van értelme azt vizsgálni, hogy ha Δt-vel minden határon túl tartunk a nullához a $\frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$ differenciahányados (ami egy vektor) milyen értékű lesz (nagyság és irány szerint). Ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy képezzük a $\frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$ határértéket.

Jelölésben: $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{d\underline{r}(t)}{dt} = \dot{\underline{r}}(t)$$

Ha ez a határérték létezik, akkor az így kapott vektort az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény t skalárértékhez tartozó derivált vektorának vagy differenciálhányados vektorának nevezzük. (Rövidítve deriváltja, differenciálhányadosa). Jelölésére a $\frac{d\underline{r}(t)}{dt}$ és $\dot{\underline{r}}(t)$-t szokás használni.

Az előállításból nyilvánvaló, hogy $\dot{\underline{r}}(t)$ iránya a $\underline{r}(t)$ görbe ezen pontjához tartozó érintőjének irányába mutat, hiszen ha a Δt-t egyre csökkentjük, akkor a húr fokozatosan átmegy a görbe $\underline{r}(t)$ pontbeli érintőjébe (16. ábra).



16. ábra

A $\Delta \underline{r}_1, \Delta \underline{r}_2$ és $\Delta \underline{r}_3$ vektorok hossza egyre csökken és irányuk egyre jobban közelíti a $\underline{r}(t)$ pontbeli érintő irányát. Ha az $\underline{r}(t)$ éppen egy anyagi pont helyzetvektora, akkor $\dot{\underline{r}}(t)$ jelentése éppen a sebességvektor, mivel az $\dot{\underline{r}}(t)$-t a $\frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$ határértékeként értelmeztük, amelynek irányát $\Delta \underline{r}$ iránya, nagyságát pedig $\frac{|\Delta \underline{r}|}{\Delta t}$ adja meg, ami az időegység alatt megtett út. Így határesetben $(\Delta t \to 0)$ éppen a $\underline{r}(t)$

pályán mozgó anyagi pont sebességét adja meg az $\dot{\underline{r}}(t)$ vektor. Szokás pillanatnyi sebességnek is nevezni.

Derivált vektor koordinátás alakjai:

Mivel a deriválás művelete lineáris, azaz két vektor-skalár függvény összegének deriváltja az egyes deriváltak összege, így ha az $\underline{r}(t)$ koordinátás alakjából indulunk ki, akkor:

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, x(t) + \underline{j}\, y(t) + \underline{k}\, z(t).$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}\, \dot{x}(t) + \underline{j}\, \dot{y}(t) + \underline{k}\, \dot{z}(t)$$

vagyis az $\dot{\underline{r}}(t)$ vektort úgy kapjuk, hogy az $\underline{r}(t)$ vektor egyes komponenseit deriváljuk.

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

ahol $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ és $\dot{z} = \dfrac{dz}{dt}$

Skalár-vektor függvények:

Az olyan függvényeket, amelyek vektorhoz skalárt rendelnek skalár-vektor függvényeknek nevezzük. Jelölése például $\phi(\underline{a})$ vagy $\Psi(\underline{a})\ldots$

Legegyszerűbb példák erre, amikor egy vektorhoz hozzárendeljük az abszolút értéket, vagy annak négyzetét.

$$\phi(\underline{a}) = |\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \text{vagy} \quad \phi(\underline{a}) = |\underline{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

A legtöbb skalár-vektor függvény esetében a vektor változó a helyvektor.

A későbbiekben az általánosság sérelme nélkül jelöljük a vektorváltozót $\underline{r}$ -el.

Jelölésben ez egyrészt $\phi(\underline{r})$ módon írható, de figyelembe véve hogy $\underline{r}$-nek három komponense van, $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ azt is írhatjuk, hogy

$$\phi(x, y, z)$$

Vagyis a skalár-vektor függvény úgy is tekinthető, mint egy háromváltozós függvény .

Például: $$\phi = \alpha \frac{1}{|\underline{r}|^2} = \alpha \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

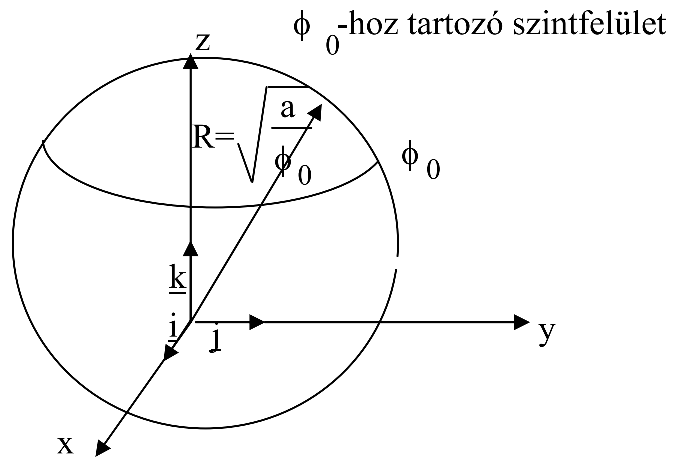
A kifejezésben α egy állandó. Ha a fenti példában a ϕ értéke éppen ϕ_0, akkor $\phi_0 = \alpha \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ kifejezés azon pontok mértani helyét jelenti, azon x, y, z értékhármasokat, amelyekre a függvény értéke éppen ϕ_0. Átalakítással

$$\frac{\phi_0}{\alpha} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

véve az egyenlet reciprokát:

$$\frac{\alpha}{\phi_0} = x^2 + y^2 + z^2$$

Ez egy gömb egyenlete, amelynek sugara $R = \sqrt{\frac{\alpha}{\phi_0}}$. Vagyis ϕ_0 értékhez tartozik egy gömbfelület, amelynek minden pontjában a függvény ϕ_0 értéket vesz fel.



17. ábra

Általában az így adódó felületeket (ami nem feltétlenül gömb) az adott skalár-vektor függvény szintfelületeinek nevezzük.

Sokszor fontos azt tudni, hogy egy adott skalár-vektor függvény az $\underline{r}$ pontban felvett értékéhez képest egy $\Delta\underline{r}$ vektorral arrébb lévő pontban mennyivel változik meg. Ezt a ϕ függvény differenciája határozza meg:

$$\Delta\phi = \phi(\underline{r} + \Delta\underline{r}) - \phi(\underline{r}) = \phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)$$

Végezzük el a következő azonos átalakításokat.

$$\Delta\phi = \phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y + \Delta y + z + \Delta z) +$$
$$+ \phi(x, y + \Delta y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z + \Delta z) +$$
$$+ \phi(x, y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z).$$

Látható, hogy az összeg 2. és 3. tagja illetve a 4. és 5. tagja kiejtik egymást. Osszuk el jobb oldal első különbségét Δx -el és szorozzuk is meg, hasonlóan Δy -al második különbséget és Δz -vel a harmadikat. Így a $\Delta\phi$ -re a

$$\Delta\phi = \frac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y + \Delta y\ z + \Delta z)}{\Delta x}\Delta x +$$
$$+ \frac{\phi(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y}\Delta y +$$
$$+ \frac{\phi(x, y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta z}\Delta z$$

kifejezést kapjuk.

Látható, hogy a kifejezés első tagja a ϕ háromváltozós függvénynek a differenciahányadosa méghozzá úgy, hogy az y és a z változó állandó. Ugyanígy a második tag az y változó szerinti differencia hányadosa miközben az x és z változó változatlan és végül a z szerinti differenciahányadosa miközben x és y változó állandó.

Ha a Δx, Δy és Δz kicsik, akkor a fenti differenciahányadosok jól közelíthetőek a megfelelő változók szerinti differenciálhányadosokkal, hiszen a differenciálhányadosok a differenciahányadosok határértékeként értelmezettek.

Mivel a ϕ függvénynek mindhárom változója szerinti differenciahányados szerepel a kifejezésben, ezért az egyes változók szerinti differenciálhányadosokat az egyváltozós függvényektől eltérően jelöljük:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

Ezeket parciális differenciálhányadosoknak nevezzük. A parciális differenciálási szabályok az egyváltozós függvényekével azonosak. Az adott változó szerinti differenciálásnál a másik két változót egyszerűen állandónak tekintjük.

Így a ϕ függvény megváltozása:

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z + \Delta h(\underline{r})$$

Ahol $\Delta h(\underline{r})$ olyan, hogy $\lim\limits_{|\Delta \underline{r}|\to 0} \frac{\Delta h(\underline{r})}{|\Delta \underline{r}|} = 0$. A $\Delta h(\underline{r})$ hibafüggvény megjelenése azzal függ össze, hogy a differenciahányadosokat a megfelelő differenciálhányadosokkal helyettesítettük. A jobb oldal első tagja úgy tekinthető, mint két vektor a

$$\text{grad}\,\phi \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{és a} \qquad \Delta\underline{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

vektorok skaláris szorzata. Azaz $\Delta\phi = \text{grad}\,\phi \cdot \Delta\underline{r} + \Delta h(\underline{r})$. A $\Delta h = 0$ csak végtelen kicsiny mennyiségek esetén áll fent, ekkor $d\phi = \text{grad}\,\phi \cdot d\underline{r}$ alakban szokás írni, ahol $d\phi$ és $d\underline{r}$ a ϕ, illetve $\underline{r}$ differenciáljai. ($\Delta\phi$ és $\Delta\underline{r}$ határértékei végtelen kicsiny mennyiségeket jelölnek).

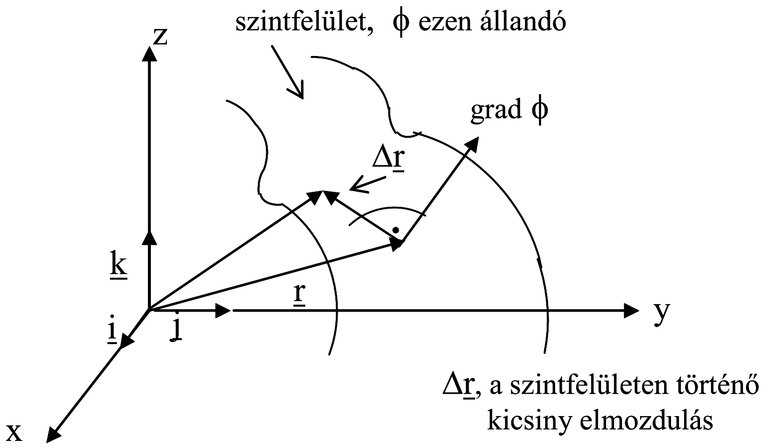
A $\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}$ vektort a $\phi(x, y, z)$ skalár-vektor függvény $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pontbeli gradiensének, gradiens vektorának nevezzük. Jelölésére használjuk a $\text{grad}\,\phi$ vagy $\underline{\nabla}\,\phi$, ahol $\underline{\nabla}$-t nabla operátornak nevezzük:

$$\underline{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$ A nabla operátor egy vektor operátor, amely skalár-vektor függvényre úgy hat, hogy azt x, y és z szerint differenciálja és az így előálló parciális differenciálhányadosokból egy vektort képez.

$$\underline{\nabla}\phi \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv \text{grad}\ \phi$$

Kézírásban a nabla operátornál sokszor a vektor jelölést -az aláhúzást- el szokás hagyni. Egyszerűbb írásmóddal $\nabla\phi$.

A gradiens jellemzője, hogy mindig merőleges ϕ szintfelületére. Ez abból következik, hogy a szintfelület mentén a ϕ értéke egy ϕ_0 állandó, így a ϕ megváltozása ha a $\Delta\underline{r}$ vektor szintfelületen van 0 kell, hogy legyen, azaz $0 \equiv \Delta\phi = \text{grad}\ \phi \cdot \Delta\underline{r}$, ami éppen a merőlegességet jelenti (Lásd 18. ábra).



18. ábra

A végtelen kicsiny mennyiségek közötti kapcsolatot leíró összefüggésből az is következik, hogy a gradiens vektor iránya az az irány, amely irányban elmozdulva a skalár függvény változása a leggyorsabb, a legnagyobb, ugyanis

$$d\phi = \text{grad}\ \phi \cdot d\underline{r} = |\text{grad}\ \phi|\ |d\underline{r}| \cos\gamma$$

$d\phi$ akkor a legnagyobb, ha $\cos\gamma = 1$, azaz $d\underline{r}$ és $\text{grad}\ \phi$ iránya azonos, azaz $\gamma = 0$.

Vektor-vektor függvények

Az olyan függvényeket, amelyek vektorhoz vektort rendelnek, vektor-vektor függvényeknek nevezzük. Egy egyszerű példa erre például a szélsebesség függvény, amely a tér különböző pontjaiban ($\underline{r}$ helyvektor) hozzárendeli az ottani $\underline{v}$ szélsebességet (amelynek iránya és nagysága van).

A fizikában előforduló vektor-vektor függvények esetében a független változó vektor általában a helyvektor, amelyhez a függvény hozzárendel egy vektoriális fizikai mennyiséget. Az általánosság sérelme nélkül a későbbieken a független változó vektort $\underline{r}$-el fogjuk jelölni.

A vektor-vektor függvények jelölésére az $\underline{A}(\underline{r})$ írásmódot szokás használni.

Koordinátás alakban (Descartes-rendszerben)

$$\underline{A}(\underline{r}) = \begin{Bmatrix} A_x(\underline{r}) \\ A_y(\underline{r}) \\ A_z(\underline{r}) \end{Bmatrix} \begin{matrix} = A_x(x,y,z) \\ = A_y(x,y,z) \\ = A_z(x,y,z) \end{matrix}$$

A koordinátás alak szerint a vektor-vektor függvény ekvivalens három skalár-vektor függvénnyel.

Vektor-vektor függvény deriváltja

A fizikai alkalmazások szempontjából csak ritkán fordul elő a vektor-vektor függvény deriváltja. Mivel egy vektor-vektor függvény, ahogyan azt megállapítottuk egyenértékű három skalár-vektor függvénnyel, úgy a derivált is a három skalár-vektor függvény deriváltja segítségével képezhető. Így a vektor függvény mindhárom komponensét skalár-vektor függvénynek tekintve kapjuk a már végtelen kis mennyiségekre felírt összefüggéseket.

$$dA_x(\underline{r}) = \operatorname{grad} A_x(\underline{r})d\underline{r} = \frac{\partial A_x}{\partial x}dx + \frac{\partial A_x}{\partial y}dy + \frac{\partial A_x}{\partial z}dz$$

$$dA_y(\underline{r}) = \operatorname{grad} A_y(\underline{r})d\underline{r} = \frac{\partial A_y}{\partial x}dx + \frac{\partial A_y}{\partial y}dy + \frac{\partial A_y}{\partial z}dz$$

$$dA_z(\underline{r}) = \operatorname{grad} A_z(\underline{r})d\underline{r} = \frac{\partial A_z}{\partial x}dx + \frac{\partial A_z}{\partial y}dy + \frac{\partial A_z}{\partial z}dz$$

ami mátrix formában is felírható

$$\begin{pmatrix} dA_x(\underline{r}) \\ dA_y(\underline{r}) \\ dA_z(\underline{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

vagy rövidítve $d\underline{A}(\underline{r}) = \underline{\underline{A}}d\underline{r}$ ahol $\underline{\underline{A}}$ jelölés a fenti mátrixot jelenti. Ez azt jelenti, hogy a vektor-vektor függvények esetében a derivált egy mátrix, amelynek elemei az egyes vektorkomponensek parciális deriváltjai.

Vektor-vektor függvény divergenciája:

A fizikai alkalmazások területén gyakran előforduló mennyiség a divergencia, amely a vektorkomponensek bizonyos parciális deriváltjaiból a következő módon áll elő:

$$\operatorname{div}\underline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Az előállításból látszik, hogy a divergencia egy skalár mennyiség, ami természetesen $\underline{r}$ függvénye, hiszen a parciális differenciálhányadosok is a hely függvényei. Ahogyan a fenti írásmód is jelzi, nem írjuk ki részleteiben, hanem div $\underline{A}$-val jelöljük (rövidítjük). Szokásos írásmód még a $\underline{\nabla}$ (nabla)-vektoroperátorral való kifejezés, amely a $\underline{\nabla}$ vektoroperátor és az $\underline{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ vektor formális skalárszorzataként

értelmezi a divergenciát $\underline{\nabla} \cdot \underline{A} \equiv \mathrm{div}\underline{A}$.

Vektor-vektor függvény rotációja

A vektor-vektor függvény esetében gyakran használt másik mennyiség a vektorfüggvény rotációja. Míg a divergencia skalármennyiség, a rotáció a parciális deriváltakból képzett vektormennyiség.

Képzési szabályai legegyszerűbben a

$\underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ nabla operátor és az $\underline{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ vektor formális vektoriális szorzataként

értelmezett; $\underline{\nabla} x \underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

amelyet komponensenként kiírva kapjuk

$$\underline{\nabla} x \underline{A} = \underline{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \underline{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \underline{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Szokásos jelölése még a vektor rotációjának $\mathrm{rot}\,\underline{A}$ (Az angolszász területen $\mathrm{curl}\,\underline{A}$ jelölés is elterjedt).

Az előzőekben megismerkedtünk a gradiens, a divergencia és rotációképzés szabályaival. Gyakran előfordul a fizikában, hogy ezen műveleteket egymás után kell alkalmazni.

Így van értelme a:

$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\phi)$-nek

$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\underline{A})$-nak

$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\phi)$-nek

$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\underline{A})$-nak

Nézzük meg a felsorolt operációkat!

<u>Laplace operátor</u>: A $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi)$ operátort -mivel gyakran előfordul az alkalmazások során- külön névvel jelöljük, Laplace operátornak nevezzük. Külön jelölést vezetünk be rá: $\nabla^2\phi$ vagy $\Delta\phi$. A $\nabla^2\phi$ jelölést nabla négyzetnek, a $\Delta\phi$ jelölést pedig Laplace operátornak szokás nevezni. Ez persze csak kétféle jelölés. Felhasználva a gradiens -és divergencia képzési szabályait:

$$\Delta\phi \equiv \nabla^2\phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = \operatorname{div}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

<u>div (rot A)</u>

A $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\underline{A}(\underline{r}))$ kifejezés abban az esetben értelmezett, ha az $\underline{A}(\underline{r})$ vektor-vektor függvény bármely komponensének második deriváltjai léteznek. Figyelembe véve a rotáció képzés szabályait írhatjuk:

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z\,\partial x}$$

Kihasználva, hogy vegyes parciális differenciálhányadosok megegyeznek $\left(\text{például}\cdots\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y\,\partial x}\right)$ a kifejezés azonosan 0-t ad bármely $\underline{A}(\underline{r})$ vektor-vektor függvényre.

Vagyis $\boxed{\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{A}(\underline{r}) \equiv 0}$

rot (grad ϕ)

Figyelembe véve gradiens és a rotáció képzési szabályát:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ \phi) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z\, \partial y} \right) + \underline{j}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial z} \right) + \underline{k}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y\, \partial x} \right)$$

A vegyes parciális deriváltak egyenlősége miatt ez szintén azonosan nullát ad.

Vagyis $\boxed{\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ \phi) \equiv 0}$ bármely ϕ-re

rot (rot A)

A $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\ \underline{A})$ képzése a rotáció képzési szabályok kétszeri alkalmazásával meghatározható. Mivel a számítás nem rövid, ezért csak a végeredményt írjuk fel (egyébként nem bonyolult végigcsinálni).

$$\mathrm{rot\ rot}\ \underline{A}\ (\underline{r}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\underline{A}\ (\underline{r})) - \Delta \underline{A}$$

Látható, hogy a jobb oldalon megjelent a $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\underline{A})$ és megjelent egy már ismert operátor a Laplace operátor, amelyet eddig csak $\phi(\underline{r})$ skalárfüggvényre értelmeztünk.

Ez a kifejezés egyben értelmezi a Δ (Laplace) operátor vektorra való alkalmazását, amely a kifejezés szerint azt jelenti, hogy a vektor mindhárom komponensének, mint skalárfüggvénynek kell venni a Laplace-át, azaz

$$\Delta \underline{A} = \begin{cases} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{cases}$$

Egyéb gyakran előforduló vektor analízisbeli azonosságok:

$$\mathrm{div}(\underline{A}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r})) = \underline{B}(\underline{r}) \cdot \mathrm{rot}\ \underline{A}(\underline{r}) - \underline{A}(\underline{r}) \cdot \mathrm{rot}\ \underline{B}(\underline{r})$$

$$\mathrm{div}(\varphi(\underline{r})\ \underline{A}(\underline{r})) = \underline{A}(\underline{r}) \cdot \mathrm{grad}\ \varphi(\underline{r}) + \varphi(\underline{r})\ \mathrm{div}\ \underline{A}(\underline{r})$$

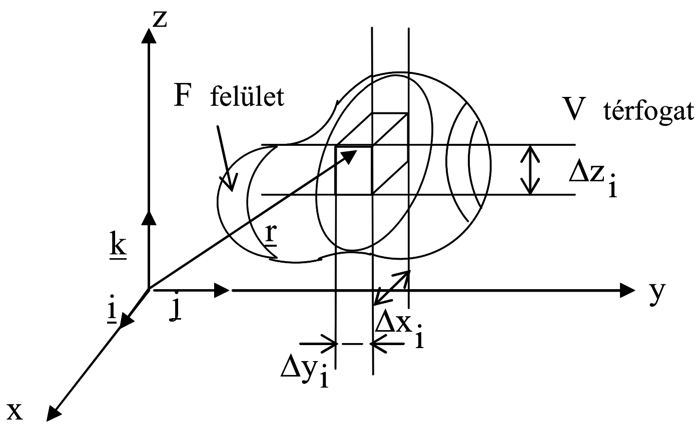
$$\mathrm{rot}(\varphi(\underline{r})\ \underline{A}(\underline{r})) = \mathrm{grad}\ \varphi(\underline{r}) \times \underline{A}(\underline{r}) + \varphi\ \mathrm{rot}\ \underline{A}(\underline{r})$$

$$\mathrm{grad}(\varphi(\underline{r})\ \psi(\underline{r})) = \varphi(\underline{r})\ \mathrm{grad}\ \psi(\underline{r}) + \psi(\underline{r})\ \mathrm{grad}\ \varphi(\underline{r})$$

A levezetések a divergencia, a rotáció és a gradiens képzési és -differenciálási szabályok felhasználásával egyszerűen elvégezhetők.

Skalár értékű térfogati integrál

Legyen $\phi(\underline{r})$ valamely skalár vektor függvény és V egy véges térfogat a háromdimenziós térben.



19. ábra

Szeleteljük fel egymással párhuzamos síkokkal az adott térfogat az (x,z), (x,y) és (y,z) síkokkal párhuzamosan. Így a V térfogatot a $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ oldalhosszúságú téglatestekre osztottuk, eltekintve a V térfogat határfelületének környezete.

Ha egyre csökkentjük a szeletelő síkok távolságát, akkor a $\Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$ elemi térfogatok is egyre csökkennek (lásd 19. ábra). A $\phi(x)$ skalár-vektor függvény térfogati integrálját a következő határértékként értelmezzük és jelöljük:

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0 \\ \Delta z_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \phi(\underline{r}_i)\, \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i = \int_V \phi(\underline{r})\, dx dy dz = \int_V \phi(r)\, dV$$

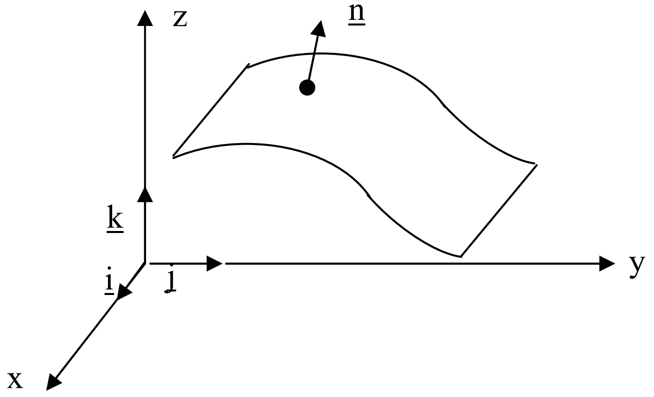
ahol $\underline{r}_i$ vektor a $\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ oldalhosszúságú téglatestben van.

Azt mondjuk, hogy ha az előbbi határérték létezik, akkor $\phi(\underline{r})$ függvény térfogati integrálja létezik a V térfogatra nézve. Ha $\phi(\underline{r})$ történetesen a $\phi(\underline{r}) \equiv 1$ függvény, akkor a fenti integrál éppen V térfogat nagyságát adja.

Felületi integrál

Felületi normális:

Tekintsünk egy felületet, amelyet mint tudjuk például egy $\phi(\underline{r}) = \phi_0 = \text{állandó}$ skalár-vektor függvénnyel adhatunk meg.



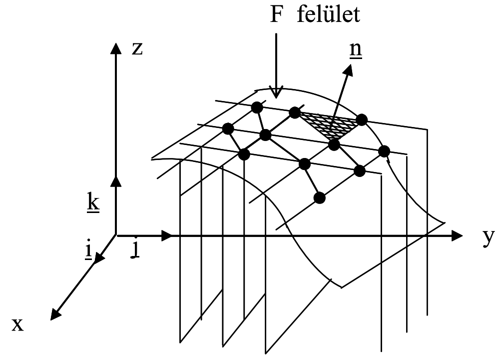
20. ábra

Tudjuk azt is a $\phi(\underline{r}) = \phi_0 = \text{állandó}$ skalár-vektor függvényeknél tanultakból, hogy a grad $\phi(\underline{r})$ merőleges a szintfelületre, a felület minden pontjában így értelmezhető egy egységvektor $\frac{\text{grad}\phi(\underline{r})}{|\text{grad}\phi(\underline{r})|}$ módon, amely a felület minden kiválasztott pontjában (lokálisan) merőleges a szintfelületre. Az így definiált egységvektort a felület $\underline{r}$ pontjához tartozó normálvektorának nevezzük.

$$\underline{n}(\underline{r}) = \frac{\text{grad}\phi(\underline{r})}{|\text{grad}\phi(\underline{r})|}$$

Legyen egy F felület adva valamely $\phi(\underline{r})$ skalár-vektor függvény által és legyen $\underline{A}(\underline{r})$ egy vektor-vektor függvény, amely F felületi pontjaiban értelmezett.

Az (x, z) síkkal és (y, z) síkkal párhuzamos síkokkal szeleteljük fel az F felületet (lásd 21. ábra).



21. ábra

Ezen síkok metszésvonalai egy-egy pontban átdöfik az F felületet. Minden egyes döféspontot összekötve a szomszédos pontokkal egymáshoz illeszkedő háromszögeket kapunk. Ha a síkok távolságát csökkentjük, ezen háromszögek egyre jobban belesimulnak az eredeti felületbe.

Felületelem-vektor

Minden kis háromszöghöz rendeljük hozzá a háromszög síkjára merőleges normálvektort.

Ha az $\underline{n}$ normál-vektort megszorozzuk a kis háromszög Δf területével, akkor ezt a vektort felületelem vektornak nevezzük, amelynek nagysága a felületelem területe, iránya pedig merőleges a kis háromszög síkjára.

$$\Delta \underline{f} = \underline{n} \cdot \Delta f$$

Felületi integrál definíciója:

Az $\underline{A}(\underline{r})$ vektor F felületre vonatkozó felületi integráljának nevezzük a következő határértéket:

$$\lim_{\Delta f_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \underline{A}(\underline{r}_i) \cdot \underline{n}(\underline{r}_i) \Delta f_i = \lim_{\Delta f_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \underline{A}(\underline{r}_i)\, \Delta \underline{f}\,(\underline{r}_i) = \int_F \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{f}$$

$\int_F \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{f}$ $\leftarrow$ Rövidített jelölés

A definícióban szereplő „·” skaláris szorzást jelent, így az integrál értéke is skalár. A $\underline{A}(\underline{r})$ vektor F felületre vett integrálja tehát azt jelenti, hogy venni kell az $\underline{A}(\underline{r})$ vektornak F felület $\underline{r}_i$ pontbeli normál-vektor irányába eső vetületét és azt szorozni kell az elemi felület nagyságával és ezt összegezni kell a teljes felületre.

Gauss tétel

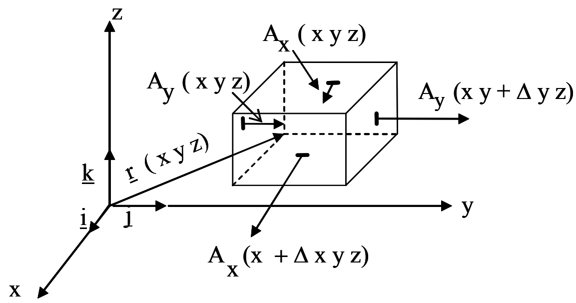
Legyen $\underline{A}(\underline{r})$ minden komponensében mindhárom változója szerint folytonosan differenciálható vektor-vektor függvény egy V térfogatban és legyen F egy zárt felület, amely V térfogatot éppen közbezárja.

Ekkor igaz a következő állítás: $\oint_F \underline{A}(\underline{r}) d\underline{f} = \int_V \operatorname{div} \underline{A}(\underline{r}) dV$

A baloldalon az integráljelen levő kis kör azt jelzi, hogy zárt felületről van szó. A tétel tehát azt mondja ki, hogy egy vektor zárt felületre vett felületi integrálja egyenlő ugyanezen vektor divergenciájának a zárt felület által határolt térfogatra vett térfogati integráljával.

Biz.:

Először lássuk be az állítást egy kicsiny $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ élhosszúságú téglatestre (lásd 22. ábra).



22. ábra

Írjuk fel a felületi integrált erre a kis téglatestre. Az x tengelyre merőleges felületek normálisai $-\underline{i}$ a hátsó és $\underline{i}$ az elülső oldallapokra , ezért a skaláris szorzásban csak A_x szerepel. Így mind a hat lapot figyelembe véve

$\oint \underline{A} d\underline{f} = \left(-A_x(xyz) + A_x(x+\Delta xyz)\right)\Delta y \Delta z +$ az x tengelyre merőleges két felület járuléka

$+\left(-A_y(xyz) + A_y(xy+\Delta yz)\right)\Delta x \Delta z +$ az y tengelyre merőleges két felület járuléka

$+\left(-A_z(xyz) + A_z(xyz+\Delta z)\right)\Delta x \Delta y$ a z tengelyre merőleges két felület járuléka

Felhasználva, hogy a differenciahányados és a differenciálhányados közel egyenlő

$$A_x(x+\Delta xyz) - A_x(xyz) \cong \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x$$

$$A_y(xy+\Delta yz) - A_y(xyz) \cong \frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta y$$

és
$$A_z(xyz+\Delta z) - A_z(xyz) \cong \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta z$$

ami annál jobban igaz, minél kisebb a $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

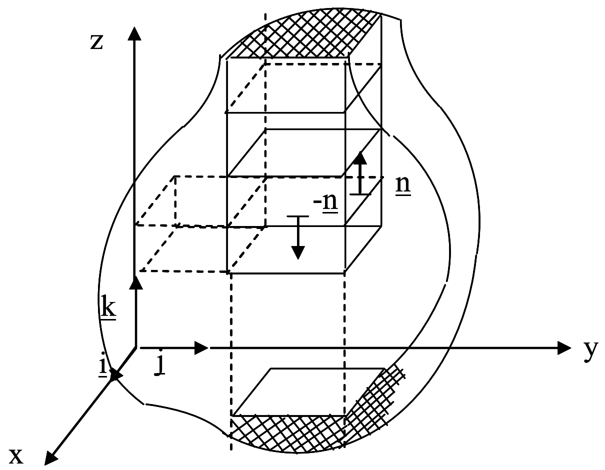
Ezeket beírva az előző egyenletbe kapjuk:

$$\oint \underline{A}d\underline{f} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$ ami rövidítve úgy is írható, hogy

$\oint \underline{A}d\underline{f} = \mathrm{div}\, \underline{A}\, \Delta V$ ahol $\Delta V = \Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ a téglatest térfogata.

Látható, hogy egy elemi téglatestre vonatkozólag igaz az összefüggés. (Ez egyben a divergencia koordináta független definícióját is megadja: $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \underline{A}d\underline{f}}{\Delta V} = \mathrm{div}\, \underline{A}$)

Ha tetszőleges térfogatról van szó, akkor azt fel kell bontani elemi téglatestre (lásd 23. ábra).



23. ábra

Mivel az állítás minden elemi téglára igaz, így az összegükre is igaz.

Mivel a téglatest belsejében az egymással érintkező téglatestek járulékai a felületi integrálás során kiejtik egymást, hiszen az érintkező felületelem vektorai azonos nagyságúak, de ellentétes irányúak, ezért a felületi integrálhoz csak a kérdéses térfogat felületén elhelyezkedő, nem szabályos „téglatestek” adnak járulékot és azok külső felülete éppen kiadja az F felületet (lásd 23. ábra).

Így egy kiválasztott téglatestre felírt $\oint \underline{A}d\underline{f} = \text{div } A \, \Delta V$ egyenleteket az összes belső téglatestre, és a térfogat szélén lévő nem szabályos „téglatestekre" összegezzük, akkor a

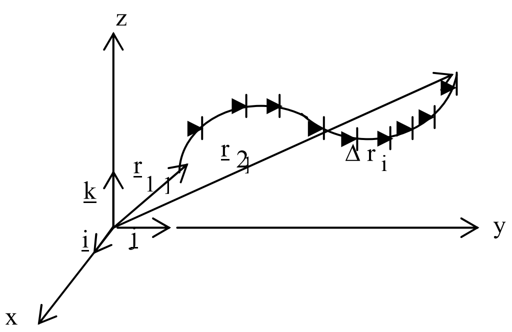
$\sum_i \int_{\ldots\ldots i} \underline{A}(\underline{r})d\underline{f} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \text{div } \underline{A}(\underline{r}_i)\Delta V_i$ kifejezést kapjuk. Mivel az elmondottak szerint belső téglatest felületelemek járulékai kiejtik egymást, így a baloldal éppen a külső felületre vett integrált, a $\oint_F \underline{A}(\underline{r})d\underline{f}$ -et adja, jobb oldal pedig a div $\underline{A}$ térfogati integrálját. Így a végeredmény:

$$\boxed{\oint_F \underline{A}(\underline{r})d\underline{f} = \int_V \text{div } \underline{A}(\underline{r})dV}$$

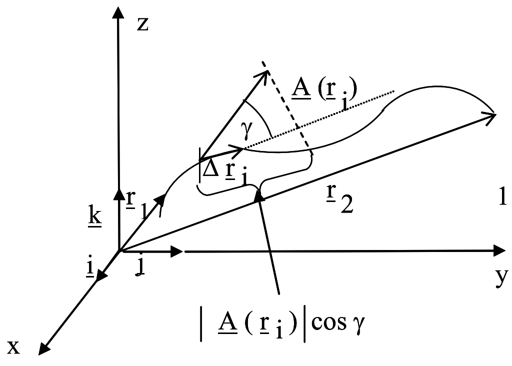
amit bizonyítani kívántunk.

Vonalmenti integrál

Legyen $\underline{A}(\underline{r})$ egy vektor, és legyen $\underline{r}(t)$ valamely vektor-skalár függvény. $\underline{r}(t)$ egy térbeli görbét ír le, amelynek tekintsük két pontját $\underline{r}_1$-et és $\underline{r}_2$ -t (lásd 24. ábra).



24. ábra



25. ábra

Osszuk fel az $\underline{r}_1$-től $\underline{r}_2$-ig terjedő görbét kicsiny $\Delta\underline{r}_i$ húrokra. Az $\underline{A}(\underline{r})$ vektor az $\underline{r}(t)$ görbére vett vonalmenti integrálján értjük a következő határértéket:

$$\lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \underline{A}(\underline{r}_i)\Delta\underline{r}_i = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} \qquad \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} \leftarrow \text{rövidített jelölés.}$$

A vonalmenti integrál a skaláris szorzás definícióját figyelembe véve azt jelenti, hogy venni kell $\underline{A}(\underline{r}_i)$ vektornak $\Delta\underline{r}_i$ irányába eső vetületét és azt szorozni kell az elemi húr hosszával és az így kapott szorzatot összegezni kell a görbe mentén a $\underline{r}_1$-től $\underline{r}_2$-ig (lásd 25. ábra)

A vonalmenti integrál tehát skalár mennyiség.

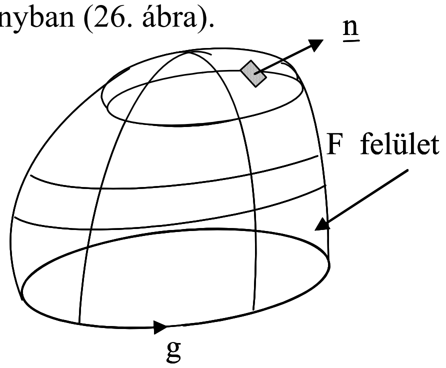
Ha egyre finomítjuk a görbe felosztását, azaz $|\Delta\underline{r}_i|$-t egyre kisebbre választjuk, akkor az i-dik húr egyre inkább az $\underline{r}_i$ pontbeli érintővel azonos irányba mutat. Ha a görbe zárt, vagyis az $\underline{r}_1 = \underline{r}_2$, akkor zárt görbementi integrálról beszélünk, amelyet az integrál jelén lévő kör jelez.

Jelölése: $\oint \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$

Ha az $\underline{r}(t)$ görbét konkrétan nem adjuk meg, csak valamely „g” görbe menti integrált jelölünk, akkor az integrál alá írt „g” betű jelzi azt. A „g” görbére vett vonalintegrál jele $\int_g \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$. Ha „g” görbe zárt, akkor $\oint_g \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$

Stokes tétele:

Legyen $\underline{A}(\underline{r})$ egy vektor-vektor függvény, amelynek mindhárom komponensének mindhárom változó szerinti deriváltja létezik és folytonos egy tartományban. Legyen továbbá g egy tetszőleges zárt görbe és F egy tetszőleges felület, amelynek széle a „g” görbe az említett tartományban (26. ábra).



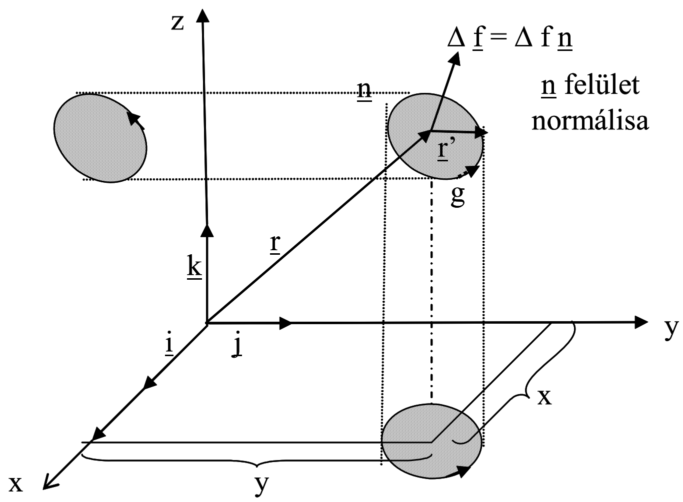
26. ábra

Ekkor a következő tétel igaz: Az $\underline{A}(\underline{r})$ vektornak a g zárt görbére vett vonalmenti integrálja egyenlő a $\text{rot}\,\underline{A}(\underline{r})$ vektor F felületre vett integráljával (a g görbe körüljárása és az F felület normálisa jobb csavar szerint van egymáshoz rendelve)

$$\oint_g \underline{A}(r)d\underline{r} = \int_F \text{rot}\,\underline{A}(r)d\underline{f}$$

Ezt a tételt nevezzük Stokes tételének.

Biz.: Először lássuk be a tételt egy kicsiny felületdarabra (lásd 27. ábra).



27. ábra

A g görbe pontjait a kis felület egyik belső pontja $(\underline{r})$ körül írja le az $\underline{r}'$ vektor. Mivel kicsiny felületről beszélünk, ezért $|\underline{r}'|$ is kicsi. A g zárt görbe menti integrál alakja.

$\oint_g \left(\underline{A}_x dx' + A_y dy' + A_z dz'\right)$ ahol dx', dy', dz' a $d\underline{r}'$ vektor x, y és z komponensei.

Nézzük az integrál első tagját:

$$\oint_g A_x(\underline{r}+\underline{r}')dx'$$

Ismerve, hogy $A_x(\underline{r}+\underline{r}') - A_x(\underline{r}') \cong \frac{\partial A_x}{\partial x}x' + \frac{\partial A_x}{\partial y}y' + \frac{\partial A_x}{\partial z}z'$

Így $A_x(\underline{r}+\underline{r}')$ helyére beírhatjuk a

$A_x(\underline{r}+\underline{r}') \cong A_x(\underline{r}') + \frac{\partial A_x}{\partial x}x' + \frac{\partial A_x}{\partial y}y' + \frac{\partial A_x}{\partial z}z'$ kifejezést, ami annál inkább igaz, minél kisebb az x', y' és a z'. A behelyettesítés után az integrál első tagjára kapjuk:

$$\oint_g A_x(\underline{r}+\underline{r}')dx' = \oint_g A_x(\underline{r}')dx' + \oint_g \frac{\partial A_x(\underline{r})}{\partial x}x'dx' +$$

$$+\oint_g \frac{\partial A_x(\underline{r})}{\partial y}y'dx' + \oint_g \frac{\partial A_x(\underline{r})}{\partial z}z'dx'$$

Mivel $A_x(\underline{r})$, $\frac{\partial A_x(\underline{r})}{\partial x}$, $\frac{\partial A_x(\underline{r})}{\partial y}$ és $\frac{\partial A_x(\underline{r})}{\partial z}$ nem, függenek x', y' és z'-től, ezért kivehetők az integrál elé (hiszen állandók).

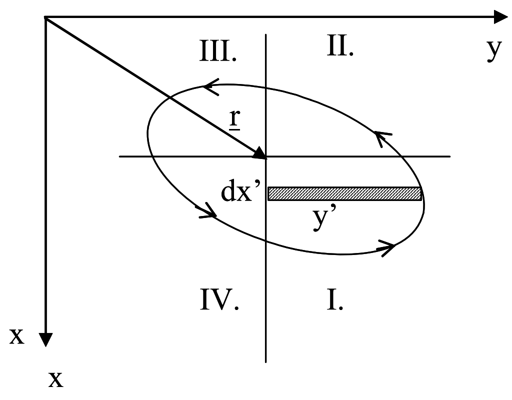
Így az integrál első tagja:

$$\oint A_x(\underline{r}+\underline{r}')dx' = A_x(\underline{r})\oint_g dx' + \frac{\partial A_x}{\partial x}\oint_g x'dx' + \frac{\partial A_x}{\partial y}\oint_g y'dx' + \frac{\partial A_x}{\partial z}\oint_g z'dx'$$

A kifejezés első két tagja 0-t ad. Az első azért, mert a görbe mentén körben dx'-ket összeadva nyilván 0-t kapunk, hiszen visszajutunk az eredeti pontba. A második integrál értéke megint csak 0, mert az integrál alsó és felső értéke azonos.

$$\oint_g x'dx' = \left.\frac{x'^2}{2}\right|_a^a \equiv 0$$ ahol "a" a kiindulási pont x koordinátája.

A 3. tag járuléka arányos az $\oint y'dx'$-vel ami megadja F felületnek az (x, y) síkra vetített felület területét méghozzá negatív előjellel, az adott irányú körbenjárás esetén.



28. ábra

A 28. ábra a $\oint_g y'dx'$ integrál kiszámítását mutatja, ahol a jelölt körbenjárás esetén az y' pozitív és a dx' negatív a I.-el és II.-vel jelölt tartományban, míg a III. és IV. tartományban az y' negatív és a dx' pozitív. Így a szorzatok mindvégig negatívak a I.-II.-III. és IV. tartományokban. Ez adja a negatív előjelet.

Az integrál abszolút értéke pedig nyilván a felület vetületének $(x\ y)$ síkbani területét adja, ami a $\Delta\underline{f}$ felületelem-vektor z komponense, azaz: $\Delta f(\underline{n}\ \underline{k})$, ahol $\underline{k}$ a z tengely irányába mutató egységvektor. Az integrál másik 0-tól különböző járulékát a 4. tag adja, amelynek értéke megadja az F felület$(z\ x)$ síkra eső vetültének területét pozitív előjellel, azaz a $\Delta\underline{f}$ felületelem-vektor y komponensét $\Delta f(\underline{n}\ \underline{j})$-t.

Így vonalintegrál első tagja

$$\oint_g A_x(\underline{r}+\underline{r}')dx' = -\frac{\partial A_x(\underline{r})}{\partial y}\Delta f(\underline{n}\ \underline{k}) + \frac{\partial A_x}{\partial z}\Delta f(\underline{n}\ \underline{j})$$

Vonalintegrál második és harmadik tagjára hasonló módon, mint az elsőre a következők adódnak:

$$\oint_g A_y(\underline{r}+\underline{r}')dy' = -\frac{\partial A_y(\underline{r})}{\partial z}\Delta f(\underline{n}\ \underline{i}) + \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta f(\underline{n}\ \underline{k})$$

$$\oint_g A_z(\underline{r}+\underline{r}')dz' = -\frac{\partial A_z(\underline{r})}{\partial x}\Delta f(\underline{n}\ \underline{j}) + \frac{\partial A_z}{\partial y}\Delta f(\underline{n}\ \underline{i})$$

Így a teljes vonalmenti integrál

$$\oint_g \underline{A}(\underline{r}+\underline{r}')d\underline{r}' = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Delta f(\underline{n}\ \underline{i}) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\Delta f(\underline{n}\ \underline{j}) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta f(\underline{n}\ \underline{k})$$

Mivel

$$\left.\begin{aligned} \Delta f(\underline{n}\ \underline{i}) &= \Delta f_i \\ \Delta f(\underline{n}\ \underline{j}) &= \Delta f_j \\ \Delta f(\underline{n}\ \underline{k}) &= \Delta f_k \end{aligned}\right\} = \Delta\ \underline{f}$$

A jobb oldal nem más, mint a már definiált $\text{rot}\,\underline{A}(\underline{r})$ és a $\Delta\underline{f}$ felületelem-vektor skaláris szorzata, azaz

$$\oint_g \underline{A}(\underline{r}+\underline{r}')d\underline{r}' = \text{rot}\ \underline{A}(\underline{r})\cdot\Delta\underline{f}$$

(Ez egyben a rotáció képzés koordináta független értelmezését adja:

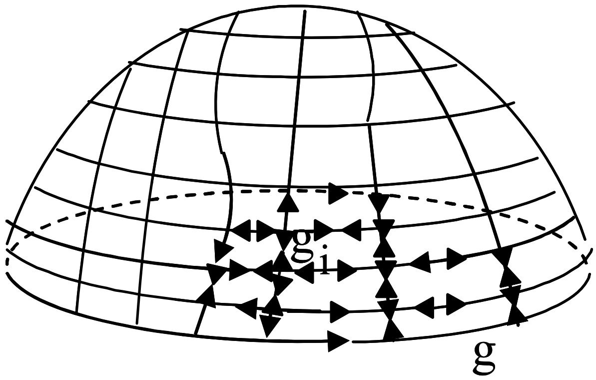
$$\lim_{\Delta f\to 0}\frac{\oint_g \underline{A}(\underline{r}+\underline{r}')d\underline{r}'}{\Delta f} = \text{rot}\ \underline{A}(\underline{r})\cdot\underline{n},$$

ahol $\underline{n}$ a Δf felület normálisa).

Ha nem elemi felületről van szó, akkor a felületet osszuk fel elemi felületekre. Ezek mindegyikére igaz az előbb igazolt összefüggés, ezért ha az összes elemi felületre felírjuk a levezetett összefüggést és ezeket összegezzük, akkor a következőket kapjuk:

$$\lim_{|\Delta \underline{f}_i| \to 0} \sum_i \oint_{g_i} \underline{A}(\underline{r}_i + \underline{r}_i')d\underline{r}_i' = \lim_{|\Delta \underline{f}_i| \to 0} \sum_i \text{rot}\ \underline{A}(\underline{r}_i)\Delta \underline{f}_i$$

De nézzük meg, hogy a bal oldalon lévő vonalintegrálok összege mit is ad. Rajzoljuk fel a felület felosztást (lásd 29. ábra).



29. ábra

Látható, hogy a nem a „g” görbe mentén lévő felületelemeket határoló „g_i” görbementi integrálok kiejtik egymást, mert a szomszédos érintkező elemeken a vonalmenti integrálás iránya ellentétes, így csupán a szélen lévő a „g” görbe mentén lévő felületelemek adnak járulékot, ami $\underline{A}(\underline{r})$-nek éppen a „g” görbe menti integrálját adja. Így végül kapjuk:

$$\oint_g \underline{A}(\underline{r})d\underline{r} = \lim_{|\Delta \underline{f}_i| \to 0} \sum_i \text{rot}\ \underline{A}(\underline{r}_i)\Delta \underline{f}_i$$

A jobb oldal $|\Delta \underline{f}_i| \to 0$ esetén éppen a rot $\underline{A}(\underline{r})$-nek az F felületre vett integrálja ,

azaz $$\boxed{\oint_g \underline{A}(\underline{r})d\underline{r} = \int_F \text{rot}\ \underline{A}(\underline{r})d\underline{f}}$$ amit bizonyítani kívántunk.

Néhány következmény

1) $\phi(\underline{r}) = \phi(xyz)$ legyen egyszer folytonosan differenciálható mindhárom változója szerint.

Legyenek

$$\underline{A}(\underline{r}) = \underline{i}\,\phi\,(xyz) \quad + 0\underline{j} + 0\underline{k}$$

$$\underline{B}(\underline{r}) = 0\underline{i} \qquad + \phi(xyz)\underline{j} + 0\underline{k}$$

$$\underline{C}(\underline{r}) = 0\underline{i} \qquad + 0\underline{j} + \underline{k}\,\phi(xyz)$$

vektorok. Mindhárom vektorra felírhatjuk a Gauss-tételt.

$$\oint_F \underline{A}\, d\underline{f} = \oint_F \phi(xyz) df_x = \int_V \operatorname{div} \underline{A}(\underline{r})\, dV = \int_V \frac{\partial\phi}{\partial x} dV$$ mivel $\underline{A}$ -nak csak x komponense van

$$\oint_F \underline{B}\, d\underline{f} = \oint_F \phi(xyz) df_y = \int_V \operatorname{div} \underline{B}(\underline{r})\, dV = \int_V \frac{\partial\phi}{\partial y} dV$$ mivel $\underline{B}$ -nek csak y komponense van

$$\oint_F \underline{C}\, d\underline{f} = \oint_F \phi(xyz) df_z = \int_V \operatorname{div} \underline{C}(\underline{r})\, dV = \int_V \frac{\partial\phi}{\partial z} dV$$ mivel $\underline{C}$ -nek csak z komponense van.

Az $\underline{A}$ -ra vonatkozó egyenletet szorozva $\underline{i}$ -vel,

a $\underline{B}$ -re vonatkozó egyenletet szorozva $\underline{j}$ -vel,

és a $\underline{C}$ re vonatkozó egyenletet szorozva $\underline{k}$ -val

összeadva az egyenleteket kapjuk:

$$\boxed{\oint_F \phi(xyz) d\underline{f} = \int_V \operatorname{grad} \phi\, dV}$$

Tehát egy $\phi\,(xyz)$ skalár-vektor függvény vektor értékű zárt felületre vett integrálja egyenlő, a skalárfüggvény gradiens-vektorának az ugyanezen felület által közrefogott térfogati integráljával.

2) Legyen $\underline{A}(\underline{r})$ a Gauss tételnek eleget tevő vektor-vektor függvény.

$$\underline{A}(\underline{r}) = A_x\, \underline{i} \quad + A_y \underline{j} + A_z \underline{k} \qquad \text{alakú.}$$

Képezzük a következő vektorokat:

$$\underline{A}'(\underline{r}) = A_y\, \underline{i} \quad + 0\underline{j} + 0\underline{k}$$

$$\underline{A}''(\underline{r}) = 0\, \underline{i} \quad + A_z \underline{j} + 0\underline{k}$$

$$\underline{A}'''(\underline{r}) = 0\, \underline{i} \quad + 0\underline{j} + A_x \underline{k}$$

valamint

$$\underline{B}'(\underline{r}) = A_z\,\underline{i} \quad + 0\underline{j} + 0\underline{k}$$

$$\underline{B}''(\underline{r}) = 0\,\underline{i} \quad + A_x\,\underline{j} + 0\underline{k}$$

$$\underline{B}'''(\underline{r}) = 0\,\underline{i} \quad + 0\underline{j} + A_y\,\underline{k}$$

Mivel $\underline{A}$ eleget tett a Gauss-tétel feltételeinek, így az $\underline{A}'$, $\underline{A}''$, $\underline{A}'''$, $\underline{B}'$, $\underline{B}''$ és $\underline{B}'''$ vektorok is eleget tesznek hiszen az $\underline{A}$ komponenseiből felépülő vektorok.

Alkalmazzuk mindegyik vektorra a Gauss-tételt:

$$\int_V \operatorname{div} \underline{A}'(\underline{r})\,dV = \int_V \frac{\partial A_y}{\partial x}\,dV = \oint_F A_y df_x$$

$$\int_V \operatorname{div} \underline{A}''(\underline{r})\,dV = \int_V \frac{\partial A_z}{\partial y}\,dV = \oint_F A_z df_y$$

$$\int_V \operatorname{div} \underline{A}'''(\underline{r})\,dV = \int_V \frac{\partial A_x}{\partial z}\,dV = \oint_F A_x df_z$$

$$\int_V \operatorname{div} \underline{B}'(\underline{r})\,dV = \int_V \frac{\partial A_z}{\partial x}\,dV = \oint_F A_z df_x$$

$$\int_V \operatorname{div} \underline{B}''(\underline{r})\,dV = \int_V \frac{\partial A_x}{\partial y}\,dV = \oint_F A_x df_y$$

$$\int_V \operatorname{div} \underline{B}'''(\underline{r})\,dV = \int_V \frac{\partial A_y}{\partial z}\,dV = \oint_F A_y df_z$$

A 2. egyenletből kivonva az utolsót, a 3.-ból kivonva a 4.-et és végül az 1.-ből kivonva az 5.-et a következő három egyenletet kapjuk:

$$\int_V \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} dV = \oint_F A_z df_y - A_y df_z$$

$$\int_V \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} dV = \oint_F A_x df_z - A_z df_x$$

$$\int_V \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} dV = \oint_F A_y df_x - A_x df_y$$

Az így kapott első egyenletet szorozva $\underline{i}$-vel a másodikat $\underline{j}$-vel, harmadikat $\underline{k}$-val és ezeket összeadva kapjuk:

$$\int_V \underline{i}\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\underline{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\underline{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]dV =$$

$$=\oint \underline{i}\left[\left(A_z df_y - A_y df_z\right)+\underline{j}\left(A_x df_z - A_z df_x\right)+\underline{k}\left(A_y df_x - A_x df_y\right)\right]$$

Ami rövidítve $\boxed{\int_V \mathrm{rot}\underline{A}(\underline{r})\,dV = -\oint_F \underline{A}(\underline{r})\,x d\underline{f}}$ írható.

A jobboldalt vektoriális felületi integrálnak nevezzük. Vagyis egy vektor rotációjának térfogati integrálja egyenlő a vektornak a térfogatot körülvevő F felületre vett vektoriális felületi integráljának a mínusz egyszeresével.