Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. április 24.

Általános alapelvek.

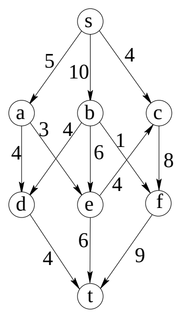
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást az alábbi hálózatban.



* * * * *

Jó folyam, jó indoklás a maximalitásra 5 pont, jó vágás, jó indoklás a minimalitásra szintén 5 pont. Picit hiányos indoklás esetén 1-1 pontot vonjunk le, nagyobb hiány esetén ennél többet (tipikus példa: jó folyam, jó vágás, semmi indoklás - ez max. 6 pont, ha viszont a két érték nem egyezik, akkor ennél jóval kevesebb). Ha valaki a javítóutas algoritmust használja, de hibázik (és ezért nem jön ki megoldás), akkor max. 2-3 pontot kaphat a folyam részre, ha kiderül, hogy hogy keresne minimális vágást, akkor erre is adható max. 2-3 pont. Ha a hibá(k)ról nem derül ki, hogy számolási vagy elvi hiba, akkor szigorúan járjunk el, azaz tekintsük elvinek.

2. Húzzunk be 3 élet két diszjunkt 5 csúcsú teljes gráf csúcsai közé úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Igaz-e hogy G minden esetben

a) háromszorosan összefüggő?

b) háromszorosan élösszefüggő?

* * * * *

a) Ha a három újonnan behúzott élnek van közös csúcsa, akkor ezt a csúcsot elhagyva G nyilván szétesik, tehát nem lehet háromszorosan összefüggő (sőt, kétszeresen összefüggő sem). (3 pont) Természetesen más jó ellenpélda is van.

b) Megmutatjuk, hogy G összefüggő marad, ha két tetszőleges élét elhagyjuk, a b) állítás tehát igaz. Ha a két élet ugyanabból az 5 csúcsú teljes gráfból hagyjuk el, az akkor is összefüggő marad, hiszen bármely két csúcs közt volt 4 éldiszjunkt út, amiből legalább 2 meg is maradt. (3 pont)
Másrészt a három újonnan behúzott él közül legalább egy minden esetben megmarad, (2 pont)
így a két él elhagyása után a két 5 csúcsú (eredetileg) teljes gráf egy-egy csúcsa között vezet él. (1 pont)
Mivel láttuk, hogy a két rész maga is összefüggő, G tetszőleges két csúcsa között a két él elhagyása után is van út, ezzel az állítást beláttuk. (1 pont)

3. Oldjuk meg a

$$34x \equiv 6 \pmod{98}$$

lineáris kongruenciát.

* * * * *

98 és 34 lnko.-ja 2, ez osztja a 6-ot, így lesz megoldás (mégpedig 2 darab modulo 98, de ezt nem muszáj itt megállapítani). (1 pont)
Osszuk le a kongruenciát 2-vel, ekkor az eredetivel ekvivalens $17x \equiv 3 \pmod{49}$ kongruenciát kapjuk. (1 pont)
Ezt a lineáris kongruenciát Euklideszi algoritmussal oldjuk meg. Tudjuk, hogy $49x \equiv 0 \pmod{49}$. (1 pont)
Innen $15x = 49x - 2 \cdot 17x \equiv 0 - 2 \cdot 3 \pmod{49}$. (2 pont)
Így $2x = 17x - 15x \equiv 3 - (-2 \cdot 3) \pmod{49}$, (2 pont)
ahonnan $x = 15x - 7 \cdot 2x \equiv (-2 \cdot 3) - 7 \cdot (3 - (-2 \cdot 3)) \pmod{49}$, (2 pont)
azaz $x \equiv -69 \equiv 29 \pmod{49}$. (1 pont)

Ha nem esik szó arról, hogy Euklideszi algoritmussal dolgozunk, akkor meg kell indokolni, hogy a kapott megoldás miért jó és miért nincs más megoldás. Ezek hiányáért 1-1 pontot vonjunk le. A megoldást ugyanakkor nem muszáj modulo 98 is megadni, a feladat szövege szerint ez nem elvárás.
Természetesen $17x \equiv 3 \pmod{49}$ megoldása másképp is lehetséges, pl.
mivel 3 és 49 relatív prímek, (1 pont)
a kongruenciát 3-mal szorozva az eredetivel ekvivalens (1 pont)
$51x \equiv 9 \pmod{49}$ kongruenciát kapjuk, ahonnan $2x \equiv 9 \pmod{49}$. (3 pont)
A jobb oldalhoz a modulust hozzáadva $2x \equiv 58 \pmod{49}$. (1 pont)
Mivel 2 és 49 relatív prímek, (1 pont)
az $x \equiv 29 \pmod{49}$ kongruencia is ekvivalens az eredetivel. (2 pont)

4. Határozzuk meg $46^{47^{48}}$ 25-tel vett osztási maradékát.

* * * * *

Mivel 46 és 25 relatív prímek, (1 pont)
az Euler-Fermat tétel szerint $46^{\varphi(25)} \equiv 1 \pmod{25}$. (1 pont)
$\varphi(25) = 25 - 5 = 20$. (1 pont)
Most tehát a 47^{48} szám 20-szal vett osztási maradékára vagyunk kíváncsiak. (1 pont)
Mivel 47 és 20 is relatív prímek, (1 pont)
az Euler-Fermat tétel szerint $47^{\varphi(20)} \equiv 1 \pmod{20}$. (1 pont)
$20 = 2^2 \cdot 5$, így $\varphi(20) = (4-2) \cdot 4 = 8$, (1 pont)
tehát $47^{48} = (47^8)^6$ 20-szal osztva 1 maradékot ad. (1 pont)
Így $46^{47^{48}} \equiv 46^{20k+1} \pmod{25}$ valamely k egészre. (1 pont)

Mivel $46^{20k} \equiv 1 \pmod{25}$, a $46^{47^{48}}$ szám 25-tel vett osztási maradéka kongruens 46-tal modulo 25, azaz a keresett maradék 21. (1 pont)

5. Az n szám kettes számrendszerbeli alakja 110100101101100011011. Határozzuk meg n^n kettes számrendszerbeli alakjának utolsó négy jegyét.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az utolsó négy jegy meghatározásához az iskolában tanultak szerint a kérdéses szám 16-os osztási maradékát kell megtalálni. (1 pont)
Ha k-val jelöljük n 16-os osztási maradékát, akkor nyilván $k^n \equiv n^n \pmod{16}$. (1 pont)
Esetünkben n kettes számrendszerbeli alakjából $k = 11$, (1 pont)
tehát 11^n 16-os osztási maradékára vagyunk kíváncsiak. Mivel 11 és 16 relatív prímek, (1 pont)
az Euler-Fermat tétel szerint $11^{\varphi(16)} \equiv 1 \pmod{16}$. (1 pont)
$16 = 2^4$, így $\varphi(16) = 8$, tehát az n szám 8-cal vett osztási maradékát kell megkeresni. (1 pont)
A kettes számrendszerbeli alak szerint (vagy a 16-os maradékból) ez 3, (1 pont)
így $11^n \equiv 11^{8k+3} \pmod{16}$ valamely k egészre. Mivel $11^{8k} \equiv 1 \pmod{16}$, a 11^n szám 16-tal vett osztási maradéka kongruens 11^3-nal modulo 16. (1 pont)
Mivel $11^2 = 121$ 9 maradékot ad 16-tal osztva, $11^3 \equiv 11 \cdot 9 = 99 \equiv 3 \pmod{16}$, a keresett maradék tehát 3, (1 pont)
az utolsó négy számjegy pedig így 0011. (1 pont)

6. Legyen $H = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ és $(a,b) * (c,d) = (ac, bd)$. Döntsük el, hogy $(H, *)$ csoport-e.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

$(a,b), (c,d) \in H$ esetén $(a,b) * (c,d) \in H$, így $*$ művelet a H halmazon. (2 pont)
$((a,b) * (c,d)) * (e,f) = (ac,bd) * (e,f) = (ace, bdf)$
és $(a,b) * ((c,d) * (e,f)) = (a,b) * (ce,df) = (ace,bdf)$, így a $*$ művelet asszociatív H-n. (2 pont)
Mivel $(1,1) * (a,b) = (a,b)$ és $(a,b) * (1,1) = (a,b)$, az $(1,1)$ elem egységelem. (2 pont)
Ha $(a,b) \in H$, akkor a és b sem lehet 0, így az $\frac{1}{a}$ és $\frac{1}{b}$ számok léteznek (1 pont)
és $(a,b) * (\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) = (1,1)$, továbbá $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) * (a,b) = (1,1)$, tehát egy tetszőleges (a,b) elem inverze $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$. (2 pont)
A fentiek alapján a kérdéses struktúra tehát csoport. (1 pont)

Az egységelem és az inverz esetén is fontos, hogy mindkét oldali szorzásnál teljesüljön az egyenlőség. Aki ezt nem ellenőrzi, attól 1-1 pontot vonjunk le. Ha valaki igazolja a kommutativitást, akkor erre természetesen nincs szükség.