## Egészségügyi mérnökképzés

# MECHANIKA

Előadók:
**Kiss Rita**
**Németh Róbert**
**Pandula Zoltán**

## A félév tartalma

- Szilárd testek mechanikája (kb. 7 hét)
- Áramlástan (kb. 4 hét)
- Mozgásvizsgálatok (kb. 3 hét)

Számonkérés:

Írásbeli és szóbeli vizsga

## A fél félév tartalma

- Alapfogalmak, erők és hatások
- Egyensúlyozás
- Igénybevételek, igénybevételi ábrák
- Szilárdságtani alapfogalmak
- Feszültségek, elmozdulások számítása
- Rugalmasságtani alapfogalmak
- Munka- és energiatételek, numerikus módszerek (VEM) alapjai

## Egészségügyi mérnökképzés

# MECHANIKA

**I. rész: Szilárd testek mechanikája**

készítette: Németh Róbert

## Mechanika

A mechanika a
- mozgásokkal
- mozgást okozó hatásokkal (erőkkel)

foglalkozó tudomány

---

- Folyadékok és gázok mechanikája (áramlástan)
- Szilárd testek mechanikája (+merev testek)

## Szilárd testek mechanikája osztályozása

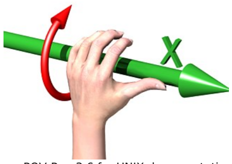
**Dinamika**
- Kinematika (a mozgás leírása)
- Kinetika (a mozgás okainak vizsgálata)

Speciális eset, ha nincs mozgás:

**Statika**
- merev testek
- szilárd testek

# Ismétlés

- Mértékegységek, SI-rendszer:
  - alapegységek: m, kg, s, A, K, mol, cd
  - származtatott egységek: N = kg m / s$^2$
  - prefixumok:
    - d~, c~, m~, ..., k~, M~, G~, ...
- Koordináta-rendszerek
  - balkezes (balsodrású) krsz.:
    - hüvelykujj (x)
    - mutatóujj (y)
    - középső ujj (z)



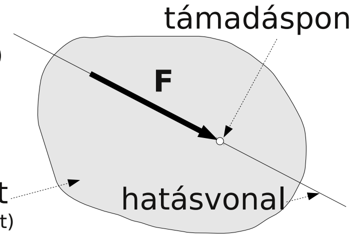

src: POV-Ray 3.6 for UNIX documentation

# Az erő

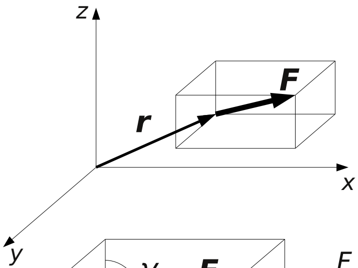
Olyan hatás, mely a testek alakját, mozgását megváltoztathatja

Kötött vektormennyiség, van:

- nagysága
- iránya (hatásvonala)
- értelme
- támadáspontja

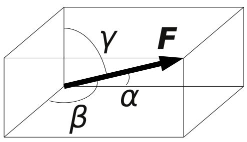



# Az erő megadása




$\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$

$\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$




$F_x = F \cos \alpha$

$F_y = F \cos \beta$

$F_z = F \cos \gamma$

$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$ $F = 0$ : zéruserő

# Az erők osztályozása

- távolba ható
- közelbe ható

- külső erők
- belső erők

- koncentrált
- megoszló
  - vonal mentén
  - felület mentén
  - térfogat mentén

- aktív erők
- passzív erők (reakcióerők)

# Erőrendszerek

Több erő hat egy testre: erőrendszer.

Jelölése felsorolással: $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$

Spec. esetek:

- síkbeli erőrendszer
- térbeli erőrendszer
- közös metszéspontú erőrendszer
- párhuzamos erőrendszer

Általános eset: szétszórt erőrendszer

# Egyenértékűség, eredő

Eredő:

egyetlen, az erőrendszerrel azonos hatású erő:

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n) \doteq R$$

Egyenértékű erőrendszerek:

$(F_1, F_2, \ldots, F_n) \doteq R$ és $(P_1, P_2, \ldots, P_n) \doteq R$,

akkor $(F_1, F_2, \ldots, F_n) \doteq (P_1, P_2, \ldots, P_n)$

Egyensúly: $(F_1, F_2, \ldots, F_n) \doteq 0$

Ellentett: $(F, -F) \doteq 0$ $(R, -R) \doteq 0$

# Merev testre ható erők I.

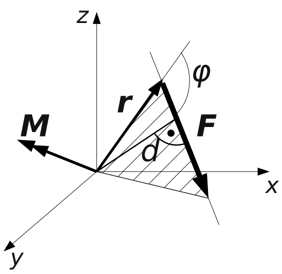
- Alaptételek
  - két, közös metszéspontú erő eredője a metszésponton átmenő erő, vektora a vektorösszeg
  - a hatásvonal mentén való eltolás az erő statikai hatását nem befolyásolja
  - eredőt az erők egyesítésének sorrendje nem befolyásolja
  - egyensúlyi erőrendszer hozzáadása nem változtatja meg az erőrendszer eredőjét

# Merev testre ható erők II.

- További tételek
  - két erő egyensúlya
    (azonos hatásvonal, nagyság, ellentétes irány)
  - három erő egyensúlya
    (közös metszéspont, zárt vektorháromszög)
  - hatás-ellenhatás törvénye

# Erő statikai nyomatéka egy pontra I.

Legyen $\boldsymbol{r}$ a kiválasztott pontból az $F$ erő hatásvonalának egy pontjába mutató vektor




Def.: $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$

$$|\boldsymbol{M}|=M=F\cdot r\cdot\sin\varphi$$

$$M=F\cdot d$$

Erő kar

# Erő statikai nyomatéka egy pontra

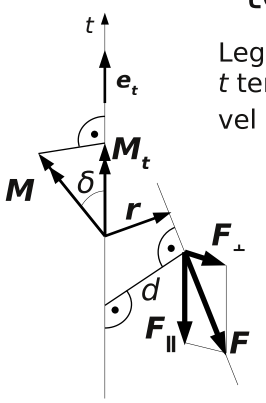
$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ r_x & r_y & r_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}=(r_yF_z-r_zF_y)\,\boldsymbol{i}+(r_zF_x-r_xF_z)\,\boldsymbol{j}+(r_xF_y-r_yF_x)\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}F_zr_y-F_yr_z\\ F_xr_z-F_zr_x\\ F_yr_x-F_xr_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_z\end{bmatrix}$$

ha $\boldsymbol{F}$ és $\boldsymbol{r}$ az $xy$-síkban fekszik: $F_z=0$, $r_z=0$, így $M_x=0$ $M_y=0$

# Erő statikai nyomatéka egy tengelyre




Legyen $\boldsymbol{M}$ az $F$ erő nyomatéka a $t$ tengely egy pontjára, $\mathbf{e_t}$ egy $t$-vel párhuzamos egységvektor.

Def.: $\boldsymbol{M_t}=(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e_t})\boldsymbol{e_t}$

$$M_t=(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{e_t}=M\cdot\cos\delta$$

$$M_t=(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{e_t}=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e_t})\cdot\boldsymbol{F}=\ldots$$

$$|M_t|=F_\perp\cdot d$$

A tengellyel párhuzamos erő nem forgat a tengely körül.

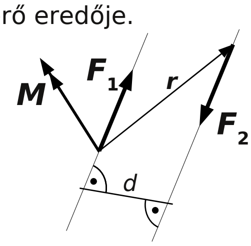
# Erőpár

Két, párhuzamos, nem közös hatásvonalú, ellentétes irányú, azonos nagyságú erő eredője.

$$(F_1,F_2)\doteq M$$

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

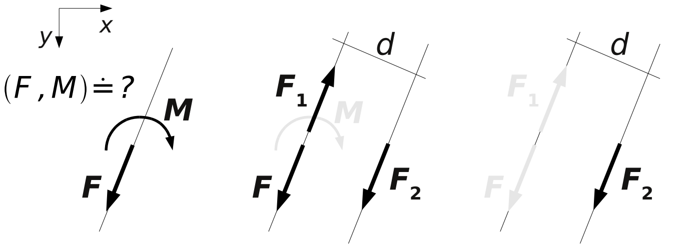
$$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{F}|\cdot d$$




Az *erőpár* egyenértékű egy *nyomaték*kal, aminek a nagysága független a helyétől, *szabad vektor*.

A nyomaték felbontható rá merőleges két erőre, a nagyságuk, vagy a távolságuk szabadon vehető fel.

# Erő és erőpár eredője




$(F, M) \doteq R$

$M \doteq (F_1, F_2)$

$F_1 \doteq -F$

$|F| = |F_1| = |F_2|$

$d = \dfrac{M}{F}$

$(F, F_1, F_2) \doteq R$

$(F, F_1) \doteq 0$

$(F_2) \doteq R$

# Műveletek erőkkel

Feladatok:

- Eredő meghatározása $(F_i, M_j) \doteq ?$
- Egyensúlyozás $(F_i, M_j, ?) \doteq 0$

Módszerek:

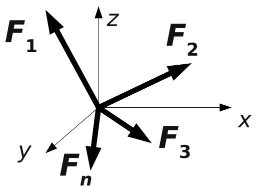
– számítással,

– szerkesztéssel,

– grafoanalitikusan.

# Közös metszéspontú erőrendszer eredője

Az eredő egy, a közös metszésponton átmenő erő.




$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \doteq R$

$(F_1, F_2) \doteq R_2$

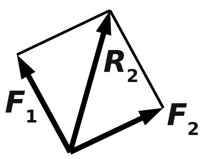
$(R_2, F_3, \dots, F_n) \doteq R$

$(R_2, F_3) \doteq R_3$

$(R_3, \dots, F_n) \doteq R$

$\vdots$

$(R_{n-1}, F_n) \doteq R$

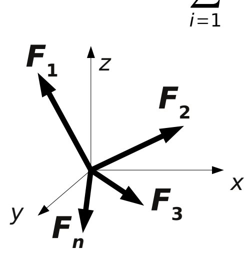


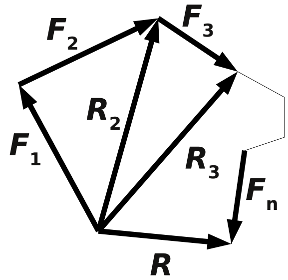

# Közös metszéspontú erőrsz. eredője grafikusan

Vektortétel:

$\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} + \dots + \boldsymbol{F_n} = \boldsymbol{R}$

$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F_i} = \boldsymbol{R}$



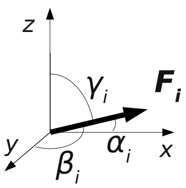

# Közös metszéspontú erőrsz. eredője számítással

$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \doteq R$

Vetülettétel: $\sum F_{ix} : \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i = R\cos\alpha_R = R_x$

$\sum F_{iy} : \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i = R\cos\beta_R = R_y$

$\sum F_{iz} : \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\gamma_i = R\cos\gamma_R = R_z$




$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

egyensúly: $R_x = R_y = R_z = 0$

# Közös metszéspontú erőrendszer eredője síkban

Legyen az összes erő az *xy*-síkban.

Ekkor $F_{iz} = 0$ minden *i*-re, így $R_z = 0$.

$\sum F_{ix} : \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i = R\cos\alpha_R = R_x$

$\sum F_{iy} : \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\beta_i = R\cos\beta_R = R_y$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

egyensúly: $R_x = R_y = 0$

# Erőpárok eredője

A nyomaték szabad vektor, eltolhatók egy közös metszéspontba. Az eredő egy, a közös metszésponton átmenő nyomatékvektor.

$$\sum M_{ix}: \sum_{i=1}^{m} M_i \cos\alpha_i = M_R \cos\alpha_R \;\; = M_{Rx}$$

$$\sum M_{iy}: \sum_{i=1}^{m} M_i \cos\beta_i = M_R \cos\beta_R \;\; = M_{Ry}$$

$$\sum M_{iz}: \sum_{i=1}^{m} M_i \cos\gamma_i = M_R \cos\gamma_R \;\; = M_{Rz}$$

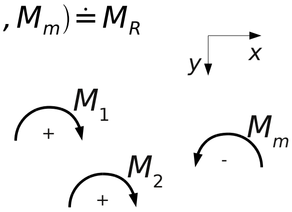
$$M_R = \sqrt{M_{Rx}^2 + M_{Ry}^2 + M_{Rz}^2}$$

# Erőpárok eredője síkbeli feladatnál

A síkban fekvő erők nyomatékai a sík pontjaira a síkra merőleges nyomatékvektorokat eredményeznek, csak a merőleges irány

$$(M_1, M_2, M_3, \ldots, M_m) \doteq M_R$$

$$\sum M_{iz}: \sum_{i=1}^{m} M_i = M_R$$




# Szétszórt erőrendszer I.

- Mi az eredő? $(F_1, F_2, \ldots, F_n, M_1, \ldots, M_m) \doteq ?$
  - Társerő, társnyomaték:

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n, M_1, \ldots, M_m) \doteq (F_A, M_A)$$

$$\sum \boldsymbol{F}: \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F_i} = \boldsymbol{F_A}$$

$$\sum \boldsymbol{M}: \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r_{Ai}} \times \boldsymbol{F_i} + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{M_i} = \boldsymbol{M_A}$$

$\boldsymbol{M_A}$ függ az $A$ pont helyétől, de $\boldsymbol{M_A} \cdot \boldsymbol{F_A} = \text{áll.}$

# Szétszórt erőrendszer II.

- Mi az eredő?

$\boldsymbol{F_A} = \boldsymbol{0}$ és $\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{0}$ Egyensúly

$\boldsymbol{F_A} = \boldsymbol{0}$ és $\boldsymbol{M_A} \neq \boldsymbol{0}$ Nyomaték

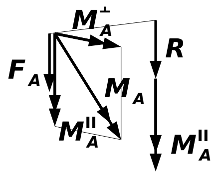
$\boldsymbol{F_A} \neq \boldsymbol{0}$ és $\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{0}$ Erő

$\boldsymbol{F_A} \neq \boldsymbol{0}$ és $\boldsymbol{M_A} \neq \boldsymbol{0}$ Erő, vagy erőpár

$$\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{M_A^{\parallel}} + \boldsymbol{M_A^{\perp}}$$

$$(F_A, M_A^{\perp}) \doteq R$$

$$(F_A, M_A) \doteq (R, M_A^{\parallel})$$




# Eredő lehetséges esetei

- Az eredő:
  - Egyensúly: $\boldsymbol{F_A} = \boldsymbol{0}$ és $\boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{0}$
  - Nyomaték: $\boldsymbol{F_A} = \boldsymbol{0}$ és $\boldsymbol{M_A} \neq \boldsymbol{0}$
  - Erő: $\boldsymbol{F_A} \neq \boldsymbol{0}$ és $\boldsymbol{F_A} \cdot \boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{0}$
  - Erőcsavar: $\boldsymbol{F_A} \cdot \boldsymbol{M_A} \neq \boldsymbol{0}$

# Párhuzamos térbeli erőrendszer

- Legyen az erők iránya $z$
- Felírható egyenletek:

$$\sum F_{iz}$$
$$\sum M_{ix}$$
$$\sum M_{iy}$$

- Az eredő lehet:
  - Erő
  - Nyomaték
  - Egyensúly

# Szétszórt síkbeli erőrendszer

- Legyen az erők síkja *xy*
- Felírható egyenletek:

$$\sum F_{ix}$$
$$\sum F_{iy}$$
$$\sum M_{iz} (= \sum M_i^O)$$

- Az eredő lehet:
  – Erő
  – Nyomaték
  – Egyensúly

# Párhuzamos síkbeli erőrendszer

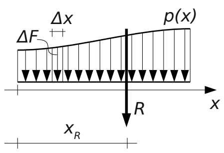
- Legyen az erők síkja *xy*, az erők iránya *y*
- Felírható egyenletek:

$$\sum F_{iy}$$
$$\sum M_{iz} (= \sum M_i^O)$$

- Az eredő lehet:
  – Erő
  – Nyomaték
  – Egyensúly

# Síkbeli megoszló erők

- Végtelen kicsiny erők végtelen közel egymáshoz:




$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}$$

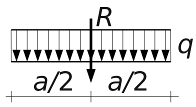
$$\sum F_{iy}: \quad \int p(x)\,dx = R$$

$$\sum M_i^0: \quad \int p(x)\,x\,dx = R\,x_R$$

$$x_R = \frac{\int p(x)\,x\,dx}{\int p(x)\,dx}$$

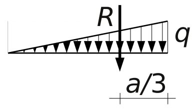
# Megoszló erők eredője

– állandó



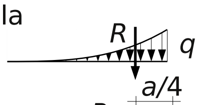

$R = qa$

– lineárisan változó

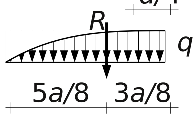



$R = qa/2$

– másodfokú parabola
az egyik érintő vízszintes!




$R = qa/3$



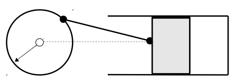

$R = 2qa/3$

# Szerkezetek

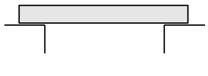
Egy vagy több *merev test*ből álló, *kényszer*ekkel egymáshoz ill. a „földhöz" kapcsolt alakzatok

Fő funkció alapján:

– **Mechanizmus**
mozgások megvalósítása



– **Tartó**
teherhordásra alkalmas



- egyszerű (1 merev test)
- összetett (több)

# Kényszerek

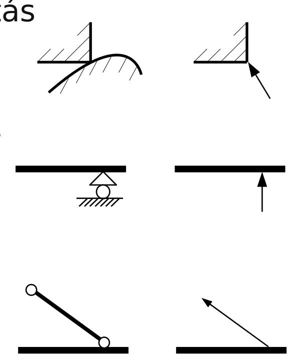
– Összekötött elemek egy vagy több egymáshoz képesti elmozdulását (eltolódás, vagy elfordulás) megakadályozza

Meggátolt elmozdulások száma a *szabadsági fok* (statikai)

A gátolt eltolódás(ok) irányában erő(k) lépnek fel, a gátolt elfordulás(ok) tengelye(i) körül forgatónyomaték(ok) lépnek fel.
Ezeket hívjuk reakcióerőnek ill. -nyomatéknak

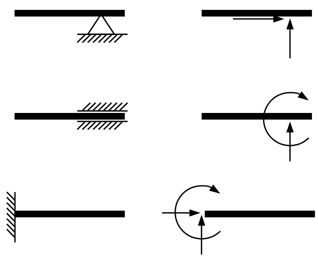
## 1 szabadságfokú kényszerek

- egyszerű megtámasztás
- görgős megtámasztás
- támasztórúd (kötél)



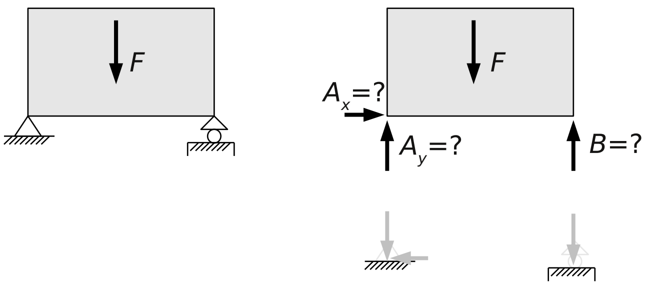
## Többszabadságfokú kényszerek

- csukló
- vezeték
- merev befogás
- egyéb (pl. gömbcsukló)



## Egyszerű tartók reakcióinak számítása

- Elv: elkülönítés elve




A testre ható összes erő egyensúlyi erőrendszert alkot

## Megoldás menete

1. Vázlat (feladat elolvasása)
2. Elkülönítés
3. Egyensúlyi kijelentés
4. Ismeretlenek számbavétele
5. Egyensúlyi egyenletek felírása, megoldása (ellenőrzés)

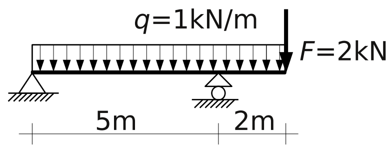
## Feladat megoldhatósága (statikai határozottság)

- Statikailag határozott: egyértelmű megoldás
- Statikailag határozatlan: nem egyértelmű megoldás
- Statikailag túlhatározott: nincs megoldás (lehet, hogy mozog a szerkezet.)
- Statikailag határozatlan és túlhatározott: a tehertől függ, hogy mozog-e.

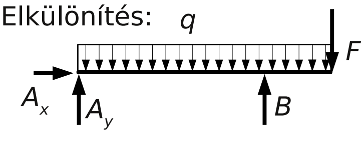
Független egyenletek és ismeretlenek száma *segít*.

## Egyszerű tartók: 1. példa

- Kéttámaszú tartó




Elkülönítés:




Egy. kij.:

$((q), F, A, B) \doteq 0$

Ismeretlenek:

$A_x=?, A_y=?, B=?$

# Egyszerű tartók: 1. példa

$\sum F_{ix}: A_x = 0$

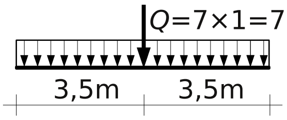
$A_x = 0\,\mathrm{kN}$

$\sum M_i^A: +7 \cdot 3{,}5 + 2 \cdot 7 - B \cdot 5 = 0$

$B = +7{,}700\,\mathrm{kN}(\uparrow)$

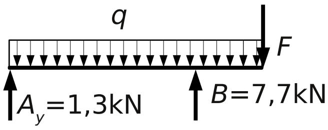
$\sum M_i^B: -7 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 2 + A_y \cdot 5 = 0$

$A_y = +1{,}300\,\mathrm{kN}(\uparrow)$



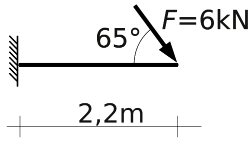

Ellenőrzés:

$\sum F_{iy}: +7 + 2 - 1{,}3 - 7{,}7 = 0$

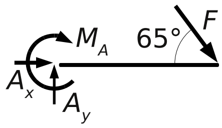



# Egyszerű tartók: 2. példa

- Mereven befogott konzol




Elkülönítés:




Egy. kij.: $(F, A, M_A) \doteq 0$

Ism.: $A_x = ?,\ A_y = ?,\ M_A = ?$

$\sum F_{ix}: 6 \cdot \cos 65° + A_x = 0$

$A_x = -2{,}536\,\mathrm{kN}(\leftarrow)$

$\sum F_{iy}: +6 \cdot \sin 65° - A_y = 0$

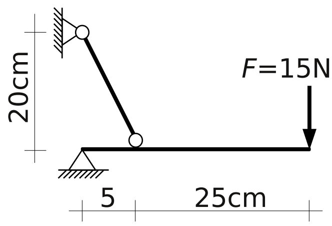
$A_y = +5{,}438\,\mathrm{kN}(\uparrow)$

$\sum M_i^A: +6 \cdot \sin 65° \cdot 2{,}2 + M_A = 0$

$M_A = -11{,}96\,\mathrm{kNm}(\circlearrowleft)$

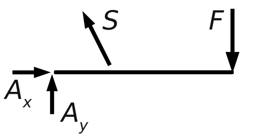
# Egyszerű tartók: 3. példa

- Csuklóval és rúddal megtámasztott alkar




$L_S = \sqrt{5^2 + 20^2} = 20{,}62\,\mathrm{cm}$

Elkülönítés:



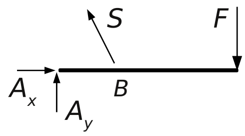

Egy. kij.:
$(F, A, S) \doteq 0$

Ismeretlenek:
$A_x = ?,\ A_y = ?,\ S = ?$

# Egyszerű tartók: 3. példa

$\sum M_i^A: +15 \cdot 30 - S \dfrac{20}{20{,}62} \cdot 5 = 0$

$S = +92{,}79\,\mathrm{N}(\nwarrow)$

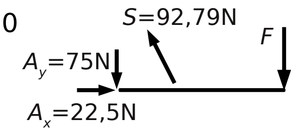



$\sum M_i^B: +15 \cdot 25 + A_y \cdot 5 = 0$

$A_y = -75{,}00\,\mathrm{N}(\downarrow)$

$\sum F_{ix}: +A_x - 92{,}79 \cdot \dfrac{5}{20{,}62} = 0$

$A_x = +22{,}50\,\mathrm{N}(\rightarrow)$




# Összetett tartók reakciói

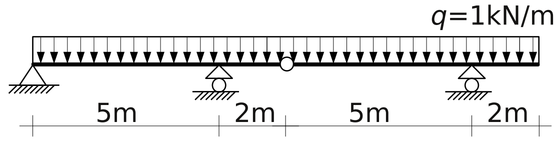
- Az elv itt is az elkülönítés.

  „Ha minden alkotó test külön-külön egyensúlyban van, akkor az egész szerkezet és bármely része is egyensúlyban van.”

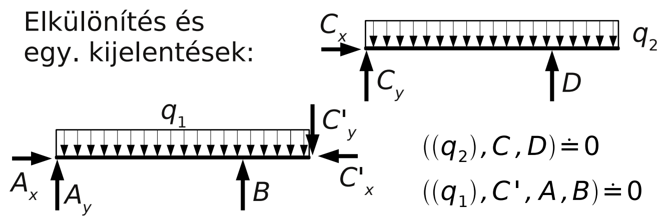
- A megoldás menete ugyanaz, mint az egyszerű tartónál de belső reakciók is lesznek.

# Összetett tartók: 1. példa

- Gerber-tartó




Elkülönítés és
egy. kijelentések:

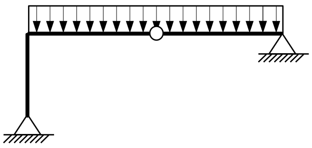



$((q_2), C, D) \doteq 0$

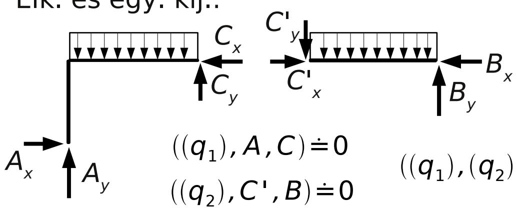
$((q_1), C', A, B) \doteq 0$

# Összetett tartók: 2. példa

- Háromcsuklós tartó



Elk. és egy. kij.:



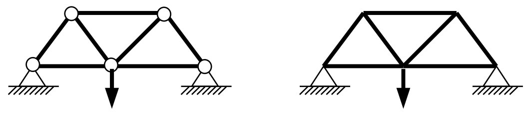

$((q_1), A, C) \doteq 0$

$((q_2), C', B) \doteq 0$

$((q_1), (q_2), A, B) \doteq 0$

# Rácsos tartók

- Korlátozás:
  - csak rudak és csuklók alkotják
  - terhelés a csuklókon koncentrált erővel



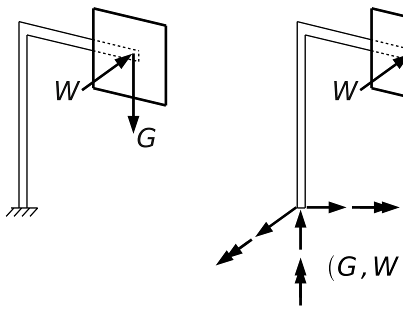
- Megoldási módszerek:
  - minden csomópont egyensúlya
  - átmetszéses módszerek

# Síkbeli szerkezetek

- Tárcsák
  - Terhelés egy síkban
  - Jellemző elmozdulások egy síkban
- Lemezek
  - Terhelés a síkjára merőlegesen
- Speciális kényszerek
  - Rugalmas, külpontos stb.

# Térbeli szerkezetek I.

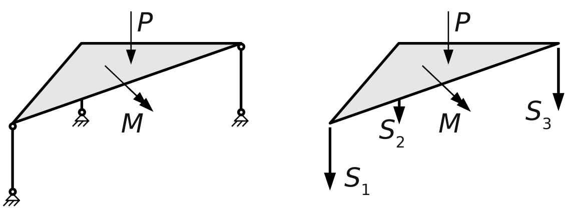
- Merev befogás (közlekedési tábla)




$(G, W, A, M_A) \doteq 0$

# Térbeli szerkezetek II.

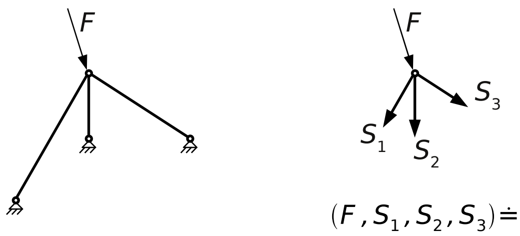
- Párhuzamos térbeli erők (asztallap)




$(P, W, S_1, S_2, S_3) \doteq 0$

# Térbeli szerkezetek III.

- Közös metszéspontú térbeli erők (háromlábú bakállvány)

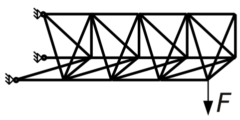



$(F, S_1, S_2, S_3) \doteq 0$

# Térbeli szerkezetek IV.

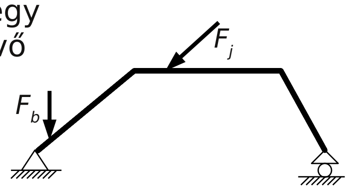
- Térbeli rácsos tartó
- Lemezművek
- Héjszerkezetek
- 
- stb.

  Számítás: főként numerikus módszerek

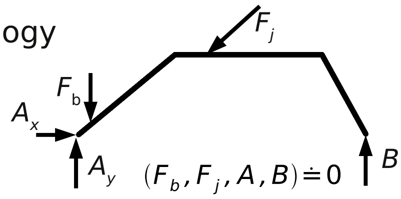



# Igénybevételek I.

- Kiindulási pont: egy *egyensúlyban* lévő szerkezet



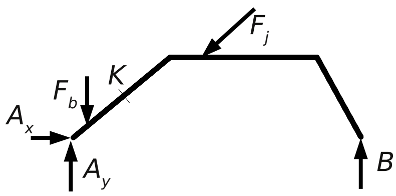

- Nem számít, hogy egy erő aktív, vagy passzív




$(F_b, F_j, A, B) \doteq 0$

# Igénybevételek II.

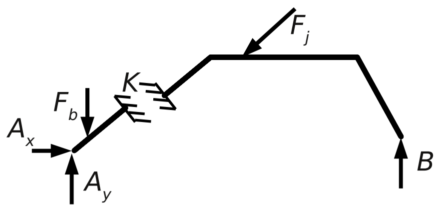
- Minden egyes keresztmetszet egy eltolódásokat és elfordulást is akadályozó belső kényszernek tekinthető




- Válasszuk ki a *K* jelűt!

# Igénybevételek III.

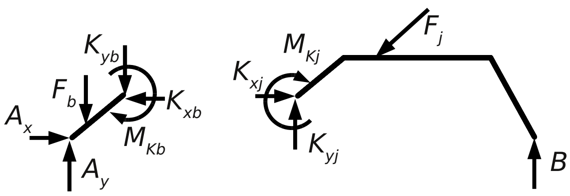
- Az eltolódásokat és elfordulást akadályozó kényszer a merev befogás




- A *K*-tól jobbra ill. balra lévő rész is egyensúlyban van.

# Igénybevételek IV.

- A keresztmetszet helyén felvett befogásban ébredő reakciók a belső erők, vagy *igénybevételek*




$(A, F_b, K_b, M_{Kb}) \doteq 0$ $(F_j, B, K_j, M_{Kj}) \doteq 0$

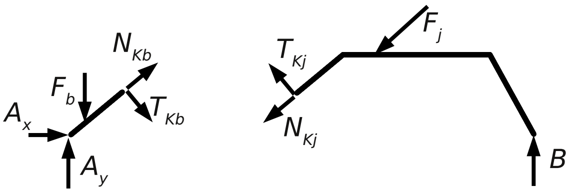
# Igénybevételek elnevezése

Az igénybevételeket hatásuk alapján nevezzük el.

- Az erő két komponensét a tartó tengelyével párhuzamos és merőleges krsz.-ben vesszük fel:
  - a tartó tengelyével párhuzamos komponens a normálerő, jele *N* (a keresztmetszet síkjának normálisával párhuzamos)
  - a tartó tengelyére merőleges komponens a nyíróerő, jele *T* (a keresztmetszet síkjában fekvő erő)
- a belső befogási nyomaték a hajlítónyomaték, jele *M* (a nyomaték vektora a keresztmetszet síkjában van)

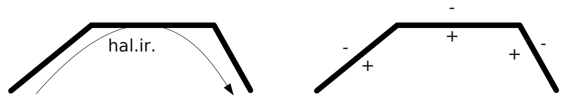
## Belső erők előjelei

- **Normálerő**: a keresztmetszetből kifelé mutató (húzó-) erő pozitív, a befelé mutató (nyomó-) erő negatív előjelű.
- **Nyíróerő**: a pozitív normálerő irányát 90°-kal az óramutató járásával megegyezően elforgatva kapjuk a pozitív irányt, ellenkezően a negatívat.

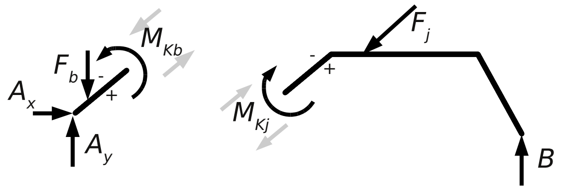



## Hajlítónyomaték előjele

– felveszünk egy tetszőleges (de ha lehet, balról-jobbra mutató) haladási irányt, ennek jobb (bal) oldala a pozitív (negatív) oldal

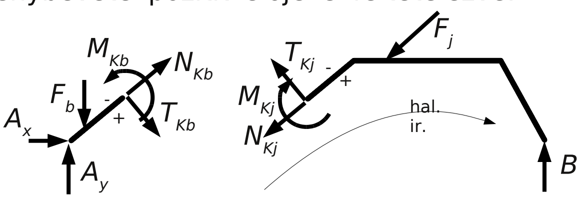



– A pozitív oldalt „húzó” nyomaték előjele pozitív



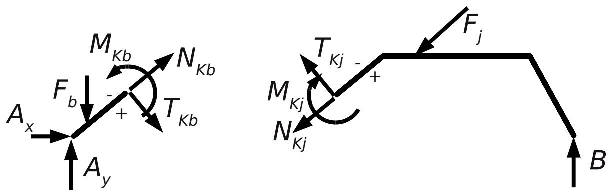

## Igénybevételek előjelei

- Az összes (balról ill. jobbról számított) igénybevétel pozitív előjellel feltételezve:




- Newton III. tv.-e alapján (hatás-ellenhatás) a balról ill. jobbról számított igénybevételek számértékei azonosak

## Igénybevételek számítása I.




$(A, F_b, N_{Kb}, T_{Kb}, M_{Kb}) \doteq 0$ $\quad (F_j, B, N_{Kj}, T_{Kj}, M_{Kj}) \doteq 0$

az egész szerkezetre: $(F_b, F_j, A, B) \doteq 0$

$(N_{Kb}, T_{Kb}, M_{Kb}) \doteq (F_j, B)$ $\quad (N_{Kj}, T_{Kj}, M_{Kj}) \doteq (A, F_b)$

A keresztmetszettől egyik oldalra lévő erők redukálása a keresztmetszet pontjába.

## Igénybevételek számítása II.

- Egy *L* keresztmetszet igénybevételei a *K* km. igénybevételeinek ismeretében:
  - *K*-ban jobbról számolva az igbv.-ket, azok a jobbra levő erők eredőjével lesz egyenértékű: $(N_K, T_K, M_K) \doteq (R_{Kj})$
  - *L*-ben jobbról számolva az igbv.-ket, a jobbra levő erők a K-tól jobbra levő erők és a két km. közötti erők:

$$(N_L, T_L, M_L) \doteq (R_{LK}, R_{Kj})$$

## Igénybevételek számítása III.

- Egy *L* keresztmetszet igénybevételei a *K* km. igénybevételeinek ismeretében:
  - Behelyettesítve:

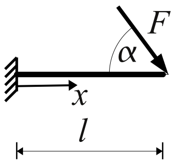
$$(N_K, T_K, M_K) \doteq (R_{Kj})$$
$$(N_L, T_L, M_L) \doteq (R_{LK}, R_{Kj})$$

---

$$(N_L, T_L, M_L) \doteq (R_{LK}, N_K, T_K, M_K)$$

# Igénybevételi függvények

- Egyetlen keresztmetszet igénybevételei helyett az összes keresztmetszet igénybevételeit keressük → függvények

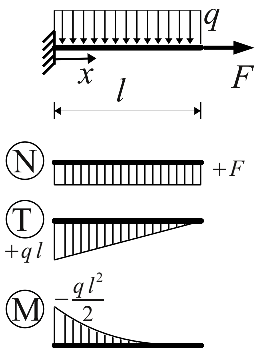



$$N(x) = +F\cos\alpha$$
$$T(x) = +F\sin\alpha$$
$$M(x) = -F\sin\alpha\cdot(l-x)$$

# Igénybevételi ábrák I.

- Egyszerűbben átlátható, ha ábrázoljuk a függvényt → igénybevételi ábra
- Az ábrázolás tengelye a tartó tengelye, a függvényértékeket erre merőlegesen ábrázoljuk.
- A pozitív irány a haladási irány szerinti jobb oldal.

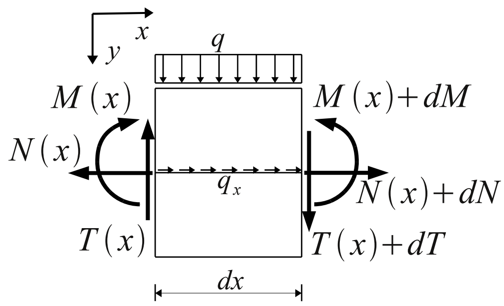
# Igénybevételi ábrák II.




$$N(x) = +F$$
$$T(x) = +q(l-x)$$
$$M(x) = -q(l-x)\frac{l-x}{2}$$

# Igénybevételi ábrák és a teher közötti összefüggés I.

- Elemi rúdszakasz a rá ható terhekkel és igénybevételekkel:




# Igénybevételi ábrák és a teher közötti összefüggés II.

- Az egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_{ix}: -N(x)+q_x dx+N(x)+dN=0 \;\rightarrow\; \frac{dN(x)}{dx}=-p_x$$

$$\sum F_{iy}: -T(x)+q\cdot dx+T(x)+dT=0 \;\rightarrow\; \frac{dT(x)}{dx}=-q$$

$$\sum M_i^{(A)}: +M(x)+T(x)dx-q\cdot dx\frac{dx}{2}-M(x)-dM=0$$

$$\rightarrow\; \frac{dM(x)}{dx}=T(x) \quad \rightarrow\; \frac{d^2M(x)}{dx^2}=-q$$

# Igénybevételi ábrák és a teher közötti összefüggés III.

- A differenciális összefüggések használata:
  - Szakaszonként a függvény jellegének meghatározása
  - A szakaszra jellemző igénybevétel-érték alapján a szakasz megrajzolása
  - Kapcsolódó szakaszok közötti illesztés használata (számításra vagy ellenőrzésre)

## Igénybevételek térben I.

- Az alapelv ugyanaz: a keresztmetszet egyik oldalán levő szerkezet-részre ható erőket redukáljuk a keresztmetszetbe.
- Függvényként való ábrázolásuk axonometrikusan, vagy vetülettel oldható meg.

## Igénybevételek térben II.

- Az erő felbontása:
  - Normálerő: a km. síkjára merőleges
  - Nyíróerő(k): a km. síkjában (két komponens)
- A nyomaték felbontása:
  - Csavarónyomaték: a tartó tengelyével párhuzamos
  - Hajlítónyomaték(ok): a km. síkjában (két komponens)

## Szilárdságtan – bevezetés I.

- Szilárd test:
  korlátozottan alakváltozásra képes anyag
- A szilárdságtan tárgya a szilárd test:
  - alakváltozások
  - elmozdulások
  - feszültségek

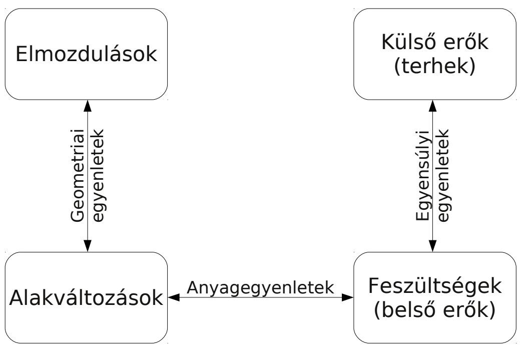
## Szilárdságtan – bevezetés II.

- A kapcsolódó fizikai tulajdonságok a szilárdsági tulajdonságok
- Az anyaggal szemben támasztható szilárdságtani követelmények:
  - szilárdsági (teherbírási)
  - merevségi (használhatósági)
  - stabilitási

## Szilárdságtan – bevezetés III.

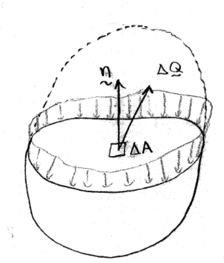
- A vizsgált anyag:
  - Folytonos függvényekkel leírható kontinuum, mely a teret gyűrődés- és hézagmentesen tölti ki.
  - Viselkedése, mikroszerkezete szerint lehet:
    - homogén, vagy inhomogén,
    - izotróp, anizotróp vagy ortotróp,
    - időfüggetlen, vagy időfüggő
    - hőmérsékletfüggetlen, vagy hőmérsékletfüggő
    - a terhelési történettől független, vagy függő
    - stb.

## Vizsgált változók, egyenletek



# (Mechanikai) Feszültségek I.

- A test részei egyensúlyban vannak. Az $\boldsymbol{n}$ normálisú elemi felület mentén megoszló erő:




Feszültségvektor:

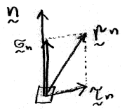
$$\boldsymbol{p}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta A} = \frac{d\boldsymbol{Q}}{dA}$$

nagysága és iránya is $\boldsymbol{n}$ irányától függ → tenzor

$\Delta A$-t az eredeti, vagy a megváltozott helyzetben nézzük? (nemlinearitás)

# Feszültségek II.

- Feszültségvektor felbontása: normál- és nyírófeszültségre



$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\tau}_n$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n \| \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{\tau}_n \perp \boldsymbol{n}$$

Komponensek számítása:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = (\boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = \sigma_n \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{\sigma}_n = \tau_{nt} \boldsymbol{t}$$

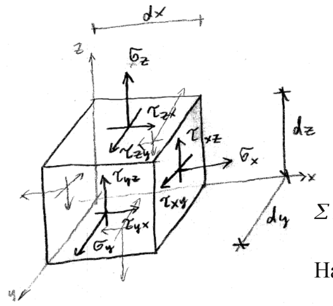
$\tau$ nyírófeszültség indexelése:
első (egyetlen) index: felület normálisa
második index (ha van): irány

# Feszültségek III.

- Keressük egy pontban az *összes irány*hoz tartozó feszültségvektort.
  - Ez a pont *feszültségállapota*.
  - A feszültségállapot leírásának eszköze a *feszültségtenzor*.
- Keressük a test *összes pont*jában a feszültségállapotot → *feszültségmező*
  - Hely (és idő) függvénye

# Feszültségállapot és -tenzor I.

- Az elemi hasábra ható feszültségkomponensek:




$$\Sigma M_{ix} \to (\tau_{yz}\, dx\, dz)\, dy - (\tau_{zy}\, dx\, dy)\, dz = 0$$

$\tau_{yz} = \tau_{zy} \to$ reciprocitás elve

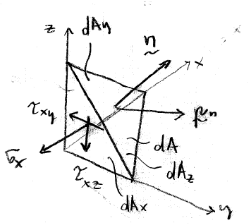
Hasonló elven:

$\tau_{xz} = \tau_{zx}$

$\tau_{yx} = \tau_{xy}$

# Feszültségállapot és -tenzor II.

- Az elemi tetraéder egyensúlya:




$$\Sigma F_{ix}: p_{nx}\, dA - \sigma_x\, dA_x - \tau_{yx}\, dA_y - \tau_{zx}\, dA_z = 0$$
$$\Sigma F_{iy}: p_{ny}\, dA - \tau_{xy}\, dA_x - \sigma_y\, dA_y - \tau_{zy}\, dA_z = 0$$
$$\Sigma F_{iz}: p_{nz}\, dA - \tau_{xz}\, dA_x - \tau_{yz}\, dA_y - \sigma_z\, dA_z = 0$$

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} dA_x / dA \\ dA_y / dA \\ dA_z / dA \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_n = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_x & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$$

# Feszültségállapot és -tenzor III.

- $$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$$
  ahol $\boldsymbol{F}$ a feszültségtenzor
- a reciprocitás elve miatt $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}$
- a fenti formula koordinátarendszertől független
- az $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$ mátrixos alakra csak a vektor komponenseinek számításához van szükség

## Feszültségkomponensek

- Komponensek számítása:
  $\boldsymbol{\sigma}_n = (\boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = ((\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = \sigma_n \boldsymbol{n}$
  $\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} - \sigma_n \boldsymbol{n}$
- $\boldsymbol{\tau}_n = (\boldsymbol{F} - \sigma_n \boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{n}$
- Mit jelent $\boldsymbol{\tau}_n = 0$? (matematikailag)
- $\boldsymbol{0} = (\boldsymbol{F} - \sigma_n \boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{n} \rightarrow$ hom. lin. egy.rsz., sajátértékfeladat
  $\boldsymbol{n}$ az $\boldsymbol{F}$ tenzor sajátvektora, $\sigma_n$ az $\boldsymbol{F}$ tenzor sajátértéke.

## Feszültségi főirányok, főfeszültségek I.

- Megoldás menete: $det(\boldsymbol{F} - \sigma_n \boldsymbol{E}) = 0 \rightarrow$ harmadfokú egy.
- Három megoldás: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \rightarrow$ *főfeszültségek*
- A hozzájuk tartozó $\boldsymbol{n}$ vektorok: $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3 \rightarrow$ *főirányok*

(A levezetésből következően: $\boldsymbol{\tau}_{n_1} = \boldsymbol{\tau}_{n_2} = \boldsymbol{\tau}_{n_3} = 0$)

- A feszültségtenzor mátrixos alakja az $\{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3\}$ vektorok által meghatározott koordinátarendszerben:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{feszültségi ellipszoid}$$

## Feszültségi főirányok, főfeszültségek II.

- A főfeszültségek a feszültségtenzor és így a pont feszültségállapotának jellemzői, krsz.től függetlenek
- Az ilyen mennyiségek a tenzor *invariánsai*.
  További invariánsok:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$
$$I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1),$$
$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

## Feszültségállapotok

- Lineáris → egyetlen nemzérus főfeszültség
- Síkbeli → két nemzérus főfeszültség

$$\sigma_{1,2?!} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \ \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- Térbeli → három nemzérus főfeszültség

- Hidrosztatikus → $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$
- Deviátoros → $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \ (= I_1)$

## Feszültségtenzorok

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_d$$

- Hidrosztatikus (gömbi): $\boldsymbol{F}_0$
- Deviátoros: $\boldsymbol{F}_d$ (tiszta nyírás)

$$\boldsymbol{F}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_d = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{F}_d$ invariánsai:

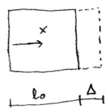
$$J_1 = 0, J_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2), J_3 = s_1 s_2 s_3, \text{ stb.}$$

## Főfeszültségi trajektóriák

- Minden pontban létezik az egymásra merőleges feszültségi főirány
- Egy olyan görbe, mely minden pontjában az érintő az ottani főirány → *trajektória*
- Végtelen (x2) ilyen vonal van → vonalsereg
- Használat: fotoelasztikus kísérlet

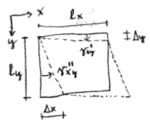
# Alakváltozások I.

- Fajlagos nyúlás:



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta}{l_0}$$

- Fajlagos szögtorzulás:



$$\gamma_{xy} = \gamma'_{xy} + \gamma''_{xy} = \frac{\Delta y}{l_x} + \frac{\Delta x}{l_y}$$

# Alakváltozások II.

- Egy pont eltolódásai, és annak testen belüli változása (elmozdulásgradiens):

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \frac{d\,\boldsymbol{u}(x,y,z)}{d\,\boldsymbol{x}}$$

- Az ***f*** gradiens tartalmazza a merevtest-szerű elfordulásokat is!

# Alakváltozások III.

- Bontsuk fel ***f***-t szimmetrikus és antimetrikus tagok összegére:

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \boldsymbol{A}(x,y,z) + \boldsymbol{f}_m(x,y,z)$$

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = \frac{\boldsymbol{f}(x,y,z) + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(x,y,z)}{2}, \quad \left( \boldsymbol{f}_m = \frac{\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}}{2} \right)$$

- Az ***A*** mátrix az alakváltozás-tenzort ábrázolja.
- Elemei:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

# Alakváltozástenzor I.

- Alakváltozás-tenzor elemei:

$$\varepsilon_x = \frac{du(x,y,z)}{dx}, \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{du(x,y,z)}{dy} + \frac{dv(x,y,z)}{dx}$$

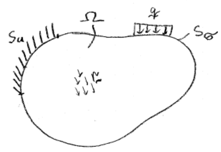
$$\varepsilon_y = \frac{dv(x,y,z)}{dy}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{dv(x,y,z)}{dz} + \frac{dw(x,y,z)}{dy}$$

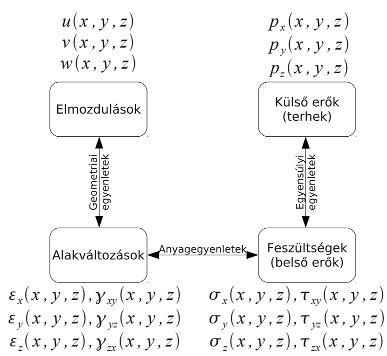
$$\varepsilon_z = \frac{dw(x,y,z)}{dz}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{dw(x,y,z)}{dx} + \frac{du(x,y,z)}{dz}$$

# Alakváltozástenzor II.

- Tenzor, tehát:
  - Irányfüggőség: (nyúlási) főirányok, főnyúlások
  - Invariánsok
  - Alakváltozásállapotok
    - lineáris, síkbeli, térbeli
    - gömbi, deviátoros

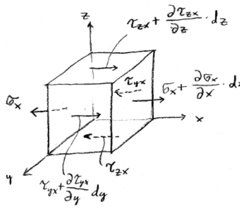
# Vizsgált tartomány, mezők, egyenletek





# Egyensúlyi egyenletek I.

- Az elemi hasáb egyensúlya egy irányban:




$$\Sigma F_{ix}:$$

$$-\sigma_x dy\,dz+\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz-$$
$$-\tau_{yx} dx\,dz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx\,dz-$$
$$-\tau_{zx} dx\,dy+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dx\,dy+$$
$$+p_x dx\,dy\,dz=0$$

- (nyomatéki egyensúly a reciprocitás elvéből)

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+p_x=0$$

# Egyensúlyi egyenletek II.

- Mezőegyenletek:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+p_x=0$$
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+p_y=0 \qquad \boldsymbol{L}^*\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+p_z=0$$

- Peremfeltételek:

Az $S$ perem azon $S_\sigma$ részén, ahol feszültség van előírva:

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{q}$$

# Geometriai egyenletek I.

- Mezőegyenletek:

$$\varepsilon_x(x,y,z)=\frac{du(x,y,z)}{dx},\ \gamma_{xy}(x,y,z)=\frac{du(x,y,z)}{dy}+\frac{dv(x,y,z)}{dx}$$
$$\varepsilon_y(x,y,z)=\frac{dv(x,y,z)}{dy},\ \gamma_{yz}(x,y,z)=\frac{dv(x,y,z)}{dz}+\frac{dw(x,y,z)}{dy}$$
$$\varepsilon_z(x,y,z)=\frac{dw(x,y,z)}{dz},\ \gamma_{zx}(x,y,z)=\frac{dw(x,y,z)}{dx}+\frac{du(x,y,z)}{dz}$$

- Peremfeltételek:

Az $S$ perem azon $S_u$ részén, ahol eltolódás van előírva:

$$\boldsymbol{u}(x_u,y_u,z_u)=\boldsymbol{u}_0$$

# Geometriai egyenletek II.

- Az alakváltozások nem vehetők fel tetszőlegesen → *kompatibilitás*:

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} \qquad 2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$
$$\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2} \qquad 2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$
$$\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2} \qquad 2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

# Anyagegyenletek I.

- Anyag
  - homogén
  - izotróp
  - lineárisan rugalmas
  - időfüggetlen anyag
- Teher
  - statikus, kvázi-statikus

# Anyagegyenletek II.

- Hooke-törvény:

engedékenység

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

merevség

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\\\varepsilon_z\\\gamma_{xy}\\\gamma_{yz}\\\gamma_{xz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E}&\frac{-\nu}{E}&\frac{-\nu}{E}&&&\\\frac{-\nu}{E}&\frac{1}{E}&\frac{-\nu}{E}&&\boldsymbol{0}&\\\frac{-\nu}{E}&\frac{-\nu}{E}&\frac{1}{E}&&&\\&&&\frac{1}{G}&0&0\\&\boldsymbol{0}&&0&\frac{1}{G}&0\\&&&0&0&\frac{1}{G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\sigma_z\\\tau_{xy}\\\tau_{yz}\\\tau_{xz}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\sigma_z\\\tau_{xy}\\\tau_{yz}\\\tau_{xz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\frac{1-\nu}{\nu}&\lambda&\lambda&&&\\\lambda&\lambda\frac{1-\nu}{\nu}&\lambda&&\boldsymbol{0}&\\\lambda&\lambda&\lambda\frac{1-\nu}{\nu}&&&\\&&&G&0&0\\&\boldsymbol{0}&&0&G&0\\&&&0&0&G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\\\varepsilon_z\\\gamma_{xy}\\\gamma_{yz}\\\gamma_{xz}\end{bmatrix}$$

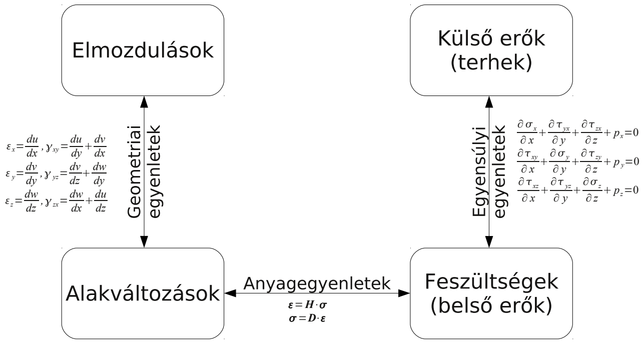
# Anyagállandók

- E: rugalmassági modulusz
- G: nyírási modulusz
- $\nu$ : Poisson-tényező (harántkontrakció)
- $\lambda$ : Lamé-féle állandó

Nem függetlenek, pl.:

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \ , \ \lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

# Egyenletek összefoglalva




# Megoldás I. (erőmódszer)

- Elmozdulások kiküszöbölésével (és $\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$)

$$(1+\nu)\Delta\sigma_x+\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=0 \qquad (1+\nu)\Delta\tau_{xy}+\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}=0$$

$$(1+\nu)\Delta\sigma_y+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}=0 \qquad (1+\nu)\Delta\tau_{yz}+\frac{\partial^2 s}{\partial y\partial z}=0$$

$$(1+\nu)\Delta\sigma_z+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=0 \qquad (1+\nu)\Delta\tau_{zx}+\frac{\partial^2 s}{\partial z\partial x}=0$$

ahol $\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , $s=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$

- Beltrami-egyenletek

# Megoldás II. (elmozdulásmódszer)

- Feszültségeket, alakváltozásokat kiküszöbölve

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial x}+G\Delta u+p_x=0$$

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial y}+G\Delta v+p_y=0$$

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial z}+G\Delta w+p_z=0$$

ahol $e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\rightarrow$ fajlagos térfogatváltozás

- Lamé-egyenletek

# Anyagmodellek

- Cél a feszültségek és alakváltozások közötti kapcsolat pontosabb leírása
- Időfüggés szerint lehet:
  - Statikus kapcsolat $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$
  - Dinamikus kapcsolat $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$
- Terheléstörténet szerint
  - Rugalmas anyagmodell
  - Rugalmatlan anyagmodell

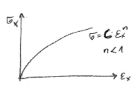
# Rugalmas anyagmodellek I.

- Rugalmas (elasztikus): egy terhelés-tehermentesítés ciklus után nincsenek maradó alakváltozások
- Általános rugalmas modell:

  a feszültségek az alakváltozások

  függvényében felírhatók:

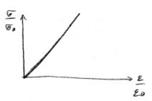
  $\sigma_x(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ , $\tau_{xy}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ , stb.
- Pl.:

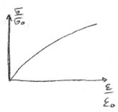


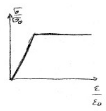

$$\sigma_x(\varepsilon_x)=C\cdot\varepsilon_x^n$$

## Rugalmas anyagmodellek II.

- A kapcsolat esetenként megfordítható
- Pl.: Ramberg-Osgood modell: $\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_x}{\sigma_0}+\frac{3}{7}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_0}\right)^n$

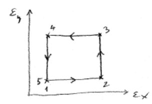
$n=1$  lineáris

$n>1$  nemlineáris

$n\to\infty$  ?

## Rugalmas anyagmodellek III.

- A számítás során a nemlinearitás miatt nem érvényes az egymásrahalmozás elve → iteratív, ill. növekményes eljárást kell használni
- Többirányú feszültségek vizsgálatánál a függvények felvétele során biztosítani kell, hogy zárt vonalon körbehaladva az energiamérleg 0 legyen.



## Hiperelasztikus anyagmodellek I.

- Energetikai megközelítés

  Alakváltozási energiasűrűség-függvény $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})$

$$\sigma_x=\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\varepsilon_x},\sigma_y=\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\varepsilon_y},\sigma_z=\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\varepsilon_z}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\gamma_{xy}},\tau_{yz}=\tau_{zy}=\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\gamma_{yz}},\tau_{xz}=\tau_{zx}=\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\gamma_{xz}}$$

## Hiperelasztikus anyagmodellek II.

- Lineárisan rugalmas anyag:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\ \ \rightarrow\ \ \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\ \ ,\ \ \boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}$$

  ***C*** független elemei (anyagi paraméterek):
  - 9x9 = 81
  - Szögtorzulások → 6x6 = 36
  - A kvadratikus alak szimmetriái → 21
- Ortotróp anyag: 3 merőleges szimmetriasík → további zérus elemek ***C***-ben, marad
- Izotróp anyag: 2 anyagi paraméter

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})=\frac{1}{2}\left(\lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2+2G(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)\right)$$

## Hiperelasztikus anyagmodellek III.

- Az alakváltozási energiasűrűség-függvény változói az alakváltozás-tenzor elemei
  - A tenzor elemei koordinátarendszer-függők, de a pont alakváltozás-állapotát írják le.
  - Felírható az energiafüggvény a tenzor invariánsaival is (más változók, más fv.):

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})=\Psi\left(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{xz}\right)=\hat{\Psi}\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\right)=\bar{\Psi}\left(I_1',I_2',I_3'\right)$$

- Nagy elmozdulásoknál az elmozdulások, alakváltozások nem lineárisan változnak → más (nemlineáris) alakváltozástenzor kell → más energiafüggvények

## Nemlineáris, hiperelasztikus anyagmodellek

- NL-alakváltozások
  - Neo-Hookean:

$$\Psi=\frac{\mu}{2}(\bar{I}_1-3)+\frac{\kappa}{2}(J-1)^2$$

  - Mooney-Rivlin:

$$\Psi=\frac{\mu_1}{2}(\bar{I}_1-3)+\frac{\mu_2}{2}(\bar{I}_2-3)+\frac{\kappa}{2}(J-1)^2$$

  $J$ - deformációgradiens determinánsa

  $\bar{I}_\alpha$ - deviátoros alakváltozástenzor módosított invariánsa
  - Összenyomhatalan anyagok

# Képlékeny anyagmodellek I.

Képlékeny:

- terhelés-tehermentesítés más útvonalon
- maradó alakváltozások

- Mikor van az anyag képlékeny állapotban?
  - képlékenységi (folyási) feltétel:

$$f=f(\sigma_{ij},k)$$
$$f<0\rightarrow \text{ rugalmas}$$
$$f=0\rightarrow \text{ képlékeny}$$

  - kifejezhető a főfeszültségekkel is

# Képlékeny anyagmodellek II.

- Huber-Mises-Hencky:

  Fémek hidrosztatikus feszültségállapotban nem folynak:

$$f=\frac{1}{6}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2\right]+\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2-\tau_f^2$$

  - a főfeszültségek terében egy henger

- Tresca:

  A középső főfeszültség hatása kisebb, tiszta nyírásra hamarabb folyik meg:

$$f_1=(\sigma_2-\sigma_3)^2-4\tau_f^2\ ,\ f_2=(\sigma_3-\sigma_1)^2-4\tau_f^2\ ,\ f_3=(\sigma_1-\sigma_2)^2-4\tau_f^2$$

  - hatszög keresztmetszetű hasáb

# Képlékeny vizsgálat

- A pont állapota:

$$f<0\ ,\ df \text{ tetszőleges}\rightarrow \text{rugalmas}$$
$$f=0\ ,\ df<0\rightarrow \text{rugalmas (tehermentesítés)}$$
$$f=0\ ,\ df=0\rightarrow \text{(aktív) képlékeny állapot}$$

- Aktív képlékeny állapotban: $d\varepsilon=d\varepsilon^e+d\varepsilon^p$
  - Drucker-féle posztulátum

$$f(\sigma_{ij},k)=0 \text{ konvex felület}$$
$$d\varepsilon^p \text{ merőleges az } f(\sigma_{ij},k)=0 \text{ felületre}$$

- Növekmények számítása:
  - Prandtl-Reuss egyenletek

# Viszkózus anyagok

- Jelenségek
  - kúszás: $\sigma=\text{állandó},\ \varepsilon(t)$
  - ernyedés: $\varepsilon=\text{állandó},\ \sigma(t)$
- A válasz a terhelés módjától és sebességétől is függhet
- Alapvető modellek:
  - rugalmas $\sigma=E\varepsilon$
  - képlékeny $\sigma<\sigma_f\rightarrow\varepsilon=0$; $\sigma=\sigma_f\rightarrow\dot\varepsilon>0$
  - viszkózus $\sigma=\mu\dot\varepsilon$

# Viszkoelasztikus modellek

- Maxwell-féle v.e. modell (sorba kapcsolva)

$$\sigma^e=\sigma^v=\sigma \qquad \dot\varepsilon=\frac{\dot\sigma}{E}+\frac{\sigma}{\mu}$$
$$\varepsilon=\varepsilon^e+\varepsilon^v$$

  - ernyedést jól írja le, kúszást kevésbé

- Kelvin-Voigt-féle v.e. modell (párhuzamos)

$$\sigma=\sigma^e+\sigma^v \qquad \sigma=E\varepsilon+\mu\dot\varepsilon$$
$$\varepsilon^e=\varepsilon^v=\varepsilon$$

  - kúszás leírására jobb, ernyedésre kevésbé

- Kapcsolt modell
  - legjobb eredmény, legbonyolultabb számítás

# További modellek

- Viszkoplasztikus modell

  képlékeny és viszkozus modell összekapcsolása

  - sorba
  - párhuzamosan (Bingham-modell)

- Elaszto-viszkoplasztikus
  - Amint a neve mutatja...

# Munka- és energiatételek I.

- Általánosított erők
- Általánosított elmozdulások

- Statikailag lehetséges erőrendszer
  - egyensúly
- Geometriailag lehetséges elmozdulásrendszer
  - folytonosság, peremfeltételek

# Munka- és energiatételek II.

- Teljes munka: külső + belső $W = W_k + W_b$

$$W_k = \int_e \boldsymbol{f}^T d\,\boldsymbol{e} + \int_S \int_u \boldsymbol{q}^T d\,\boldsymbol{u}\, dS + \int_V \int_u \boldsymbol{g}^T d\,\boldsymbol{u}\, dV$$

$$W_b = -\int_V \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}^T d\,\boldsymbol{\varepsilon}\, dV$$

- Kiegészítő munka: külső + belső $\tilde{W} = \tilde{W}_k + \tilde{W}_b$

$$\tilde{W}_k = \int_f \boldsymbol{e}^T d\,\boldsymbol{f} + \int_S \int_q \boldsymbol{u}^T d\,\boldsymbol{q}\, dS + \int_V \int_g \boldsymbol{u}^T d\,\boldsymbol{g}\, dV$$

$$\tilde{W}_b = -\int_V \int_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon}^T d\,\boldsymbol{\sigma}\, dV$$

# Virtuális elmozdulások és a virtuális elmozdulások tétele

- Virtuális elmozdulás: a tényleges elmozdulás egy geometriailag lehetséges variációja
- Tétel: egy statikailag lehetséges erőrendszer bármely virtuális elmozdulásrendszeren végzett munkája 0:

$$\delta W = \boldsymbol{f}^T \delta \boldsymbol{e} + \int_S \boldsymbol{q}^T \delta \boldsymbol{u}\, dS + \int_V \boldsymbol{g}^T \delta \boldsymbol{u}\, dV - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = 0$$

- Jelentése egyensúly
- Használata: merev testek egyensúlya

# Virtuális erők és a virtuális erők tétele

- Virtuális erők: a tényleges erőrendszer egy statikailag lehetséges variációja
- Tétel: egy geometriailag lehetséges elmozdulásrendszer bármely virtuális erőrendszeren végzett kiegészítő munkája 0:

$$\delta \bar{W} = \boldsymbol{e}^T \delta \boldsymbol{f} + \int_S \boldsymbol{u}^T \delta \boldsymbol{q}\, dS + \int_V \boldsymbol{u}^T \delta \boldsymbol{g}\, dV - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma}\, dV = 0$$

- Jelentése geometriai kompatibilitás
- Használata: elmozdulások számítása

# Potenciális energia és szélsőértéktétele

- Teljes potenciál: külső + belső

$$\Pi_k = -W_k \ , \ \Pi_b = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})\, dV$$

- Tétel: a geometriailag lehetséges elmozdulás-rendszerek közül az a tényleges, ahol a poten-ciális energiának stacionaritási pontja van.
- Változói elmozdulások (elmozdulásfüggvények) → elmozdulásmódszer
- A változók szerinti (parciális) derivált, illetve variáció eltűnésére felírt egyenletek: egyensúlyi egyenletek

# Kiegészítő potenciális energia és minimumtétele

- Teljes kiegészítő potenciál: külső + belső

$$\bar{\Pi} = -\bar{\boldsymbol{e}}^T \boldsymbol{f} - \int_{S_u} \bar{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{q}\, dS - \int_V \bar{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{g}\, dV + \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{\sigma}\, dV$$

- Tétel: a statikailag lehetséges erőrendszerek közül az a tényleges, ahol a kiegészítő poten-ciális energiának minimuma van.
- Változói erők → erőmódszer
- A változók szerinti (parciális) derivált, illetve variáció eltűnésére felírt egyenletek: geometriai egyenletek

## Stabilitásvizsgálat

- Egyensúlyi helyzet minősítése:

  Mi történik, ha a testet kicsit kitérítjük belőle?
  - Visszatér → stabil egyensúlyi helyzet
  - Tovább mozog → instabil egyensúlyi helyzet
  - Helyben marad → kritikus egyensúlyi helyzet
- A stabilitás vizsgálata:
  - Definíció alapján
  - Potenciális energia vizsgálatával
    - Stabil → minimum
    - Instabil → nyereg, vagy maximum
    - Kritikus → eltűnő második derivált

## Végeselem-módszer I.

- Differenciálegyenlet-rendszer
  - Geometriai egyenlet $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}$
  - Anyagegyenlet $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}$
  - Egyensúlyi egyenlet $\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$
- Potenciális energia stacionaritási tétele

$$\Pi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \int_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right) dV = \int_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right) dV = stac.$$

## Végeselem-módszer II.

- A geometriai egyenletet behelyettesítve:

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \int_V \left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}u)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}u - \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right) dV = stac.$$

- Függvénytér finitizálása:

$$\boldsymbol{u}(x, y, z) = \boldsymbol{N}(x, y, z)\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{L}u(x, y, z) = \boldsymbol{L}\boldsymbol{N}(x, y, z)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{B}(x, y, z)\boldsymbol{v}$$

$$\Pi(\boldsymbol{v}) = \int_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{v}\right) dV = stac.$$

$$\frac{\partial \Pi(\boldsymbol{v})}{\partial v_i} = \int_V \left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\right) dV = 0$$

## Végeselem-módszer III.

- Geometriai finitizálás:

$$\frac{\partial \Pi(\boldsymbol{v})}{\partial v_i} = \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{V_i}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,dV\right)\boldsymbol{v} - \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{V_i}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\,dV\right) = 0$$

- Integrálás elvégzése elemenként:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{K}_i\right)\boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{q}_i = 0$$

- Megoldás

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{q} = 0 \rightarrow \boldsymbol{K}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{q}$$

## Geometriai finizitzálás

- Véges méretű elemek (csomópontok)

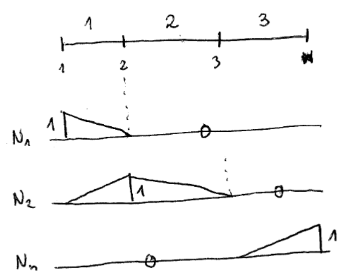
$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

$$\boldsymbol{K} = \int_V \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,dV = \sum_{i=1}^{n}\int_{V_i}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,dV = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{K}_i$$

- ***N*** bázisfüggvények felvétele:
  - Legtöbb elemen 0
  - Ha nem 0, akkor 1 csp.-ban 1, a többiben 0
  - Folytonosság ( $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ )
  - Következmény: $v_i$ fizikai jelentése

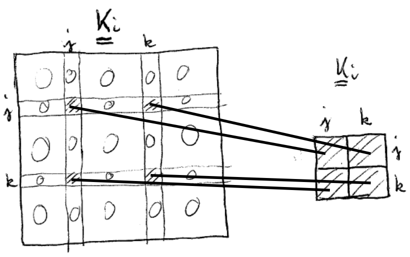
## Geometriai finizitzálás - példa

- Rúd felbontása és néhány bázisfüggvénye



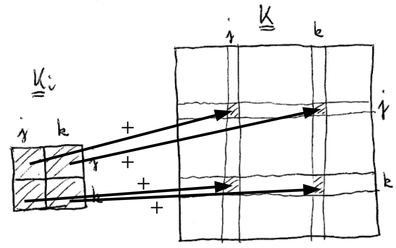
# Bázisfüggvények

- ***N*** felvétele → következmény
  - $\boldsymbol{K}_i$-t csak olyan bázisfüggvények befolyásolják, melyek csomópontja az *i*-edik elemen van




# Merevségi mátrix

- ***K*** számításához elemenként számoljuk $\boldsymbol{K}_i$-t, majd a szerkezet merevségi mátrixához adjuk hozzá az elem merevségi mátrixát. (kompilálás)




- Tehervektort hasonló módon, elemenként kompiláljuk

# Megoldás

- $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{q}$ megoldása: $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{q}$
- Majd a másodlagos mennyiségek (alakváltozások, feszültségek)
- Rudak, tárcsák, lemezek héjak esetén a térfogat mentén való integrálást részben előre elvégezzük, így más lesz az elmozdulás, alakváltozás, ***L*** operátor-mátrix, anyagi merevségi mátrix stb. Csak a fő lépések maradnak.

# Elemi szilárdságtan

- Feszültségek, elmozdulások kézi számítása rudakban