1. feladat (12 pont)

Számolja ki az $a_n = \left(\dfrac{n^2-2}{n^2-(-1)^{n+1}}\right)^{4n^2+3}$ sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz inferiorját, illetve limesz szuperiorját! Konvergens a sorozat?

Mo. Ha n páros, akkor $a_n = \left(\dfrac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{4n^2+3}$, és ennek a részsorozatnak a határértéke $\left(\dfrac{1-2/n^2}{1+1/n^2}\right)^{4n^2+3} \to e^{-12}$.

Ha n páratlan, akkor $a_n = \left(\dfrac{n^2-2}{n^2-1}\right)^{4n^2+3}$, és ennek a részsorozatnak a határértéke $\left(\dfrac{n^2-2}{n^2-1}\right)^{4n^2+3} \to e^{-4}$.

Így a sorozat torlódási pontjai: e^{-12} és e^{-4} , limesz inferiorja e^{-12} és limesz szuperiorja e^{-4} . A sorozat nem konvergens, mert két különböző torlódási pontja is van .

---

2. feladat (5+12=17 pont)

a) Adjon szükséges és elégséges feltételt arra, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ teljes értelmezési tartományán differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ pontban lokális szélsőértékhelye van.
b) Mely intervallumokon monoton az $f(x) = (x-1)^3(x+3)^4$ függvény? Hol vannak lokális szélsőértékei?

Mo. a) Szükséges feltétel: $f'(x_0) = 0$. Elégséges feltétel: $f'(x_0) = 0$ és f' előjelet vált x_0-ban (vagy $f'(x_0) = 0$ és $\exists f''(x_0) \neq 0$ (elég az egyik)).

b) $f'(x) = 3(x-1)^2(x+3)^4 + 4(x-1)^3(x+3)^3 = (7x+5)(x-1)^2(x+3)^3 = 0$ megoldásából a stacionárius pontok $x = -3, -5/7$ és 1.

A $(-\infty, -3)$-on $f' > 0$, azaz itt a függvény szigorúan monoton növő.
A $(-3, -5/7)$-en $f' < 0$, azaz itt a függvény szigorúan monoton csökkenő.
A $(-5/7, 1)$-en $f' > 0$, azaz itt a függvény szigorúan monoton növő.
Az $(1, \infty)$-en $f' > 0$, azaz itt a függvény ismét szigorúan monoton növő.
A fentiek alapján lokális maximuma van az $x = -3$ pontban , ill. lokális minimum van az $x = -5/7$ pontban .

---

3. feladat (5+10=15 pont)
a) Hogyan értelmezzük egy nemkorlátos függvény improprius integrálját?
b) Számolja ki az
$$\int_0^1 \frac{1}{(1+4x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}\,dx$$
integrált!

Mo. a) Ha pl. f nem korlátos $[a,b]$-n, de integrálható minden $[a+\delta,b]$ $(\delta < b-a)$ intervallumon , akkor az improprius integrál értelmezése
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0+}\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx.$$
(hasonlóan kimondható az állítás a b végponttal is, ill. elég az egyik változatot kimondani).
b) Az a) pontban leírt eset van most. A függvény ∞-hez tart 0-ban jobbról. Így tehát az integrál értéke:
$$\int_0^1 \frac{1}{(1+4x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}\,dx = \lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1 \frac{1}{(1+4x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}\,dx =$$
$$= \lim_{\delta\to 0+}\left[\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}\right]_\delta^1 = \sqrt{\operatorname{arctg} 2}$$

---

4. feladat (4+8=12 pont)
a) Adja meg az elsőrendű, szétválasztható változójú ill. az elsőrendű, lineáris differenciálegyenletek általános alakját!
b) Adja meg megfelelő helyettesítéssel az $y' = (x+y)^2$ differenciálegyenlet általános megoldását explicit alakban!

Mo. a) $y' = f(x)g(y)$, $a_1(x)y' + a_0(x)y = j(x)$
b) Az $u = x+y$ helyettesítés után az $u' = 1+u^2$ szétválasztható változójú egyenletet kell megoldani . Ennek általános megoldása $u(x) = \operatorname{tg}(x+c)$, azaz az eredeti egyenlet általános megoldása $y(x) = \operatorname{tg}(x+c) - x$.

---

5. feladat (7+12=19 pont)
a) Mutassa meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx+\pi)}{n^2}$$

függvénysor összegfüggvénye folytonos a valós számok halmazán!
b) A nevezetes függvények Taylor-sorainak felhasználásával adja meg az $f(x) = \ln(1+x^2)$ és $g(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorait és azok konvergenciasugarát!

Mo. *a*) A Weierstrass-kritériumot tudjuk használni :

$$\left|\frac{\sin(nx+\pi)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

és a $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ sor konvergens , így a függvénysor egyenletesen konvergál az összegfüggvényéhez. Mivel a sor minden tagja folytonos függvény, így az összegfüggvény is folytonos lesz.
b) $f'(x) = 2x/(1+x^2) = 2x/(1-(-x^2)) = 2x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^{2n+1}$. Tehát

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+2} x^{2n+2}$$

(az integrálási konstans nulla, mert a függvény 0-ban 0-t vesz fel) a konvergenciasugár 1 , mert a végtelen mértani sor konvergenciasugara is 1 ($|-x^2| < 1 \iff |x| < 1$), ami az integrálás során sem változik.
A g függvénynél pedig a binomiális sort használjuk.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^{2n}.$$

A konvergenciasugara pedig ennek is 1, mivel a binomiális soré is 1 ($|x^2| < 1 \iff |x| < 1$).

---

6. feladat (6+7=13 pont)
a) Milyen kapcsolat van egy kétváltozós függvény folytonossága és totális deriválhatósága között? Igazolja is az állítást!
b) Totálisan deriválható-e az alábbi függvény?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 2, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mo. a) Ha f totálisan deriválható egy (x_0, y_0) pontban, akkor ott folytonos is . Biz.: Ha totálisan deriválható, akkor az (x_0, y_0) pont egy környezetében érvényes az

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + A_1\Delta x + A_2\Delta y + h(\Delta x, \Delta y)$$

egyenlőség, ahol A_1, A_2 konstansok (a pontbeli parciális deriváltak), ill. h olyan függvény, melyre $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} h(\Delta x, \Delta y)/\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0$. Ekkor $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ esetén $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \to f(x_0, y_0)$, ami mutatja, hogy a függvény folytonos.
b) Pl. polárkoordinátákkal a függvény alakja az origón kívül $f(r,\varphi) = r\sin^2\phi + 1$, azaz a függvény az origóban egyhez tart. Mivel a függvényértéke pedig 2, így a függvény nem folytonos az origóban , így ott nem is lehet totálisan deriválható . (Elég lenne pl. az x-szerinti parciális függvényt vizsgálni, ami nem folytonos, így f sem lehet az.)

---

7. feladat (12 pont)
Hengerkoordináták felhasználásával számítsa ki az $f(x,y,z) = z^2$ függvény integrálját az $x^2 + y^2 \leq 1$ és $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ felültek által meghatározott véges V tartományra! Készítsen ábrát is az integrálási tartományról!

Mo. Ábra készítése . Az integrál értéke

$$\int_V z^2\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} z^2 r\, dzd\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\frac{\sqrt{4-r^2}^3}{3} r\, d\varphi dr =$$

$$= \int_0^1 4\pi \frac{\sqrt{4-r^2}^3}{3} r\, dr = -\frac{2\pi}{3}\left[\frac{(4-r^2)^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = -\frac{2\pi}{3}\left[\frac{3^{5/2}}{5/2} - \frac{4^{5/2}}{5/2}\right]$$
