Valószínűségszámítás vizsga dolgozat megoldása

Műszaki informatika szak

2011. június 8.

1. Addig dobunk egy szabályos kockával, amíg 3-nál kisebb számot nem kapunk. Jelölje X az ehhez szükséges dobások számát! Mennyi X várható értéke és szórása?
   Megoldás: $X \in G\left(\frac{1}{3}\right) \Longrightarrow \mathbf{E}X = 3, \boldsymbol{\sigma}X = \sqrt{6}$

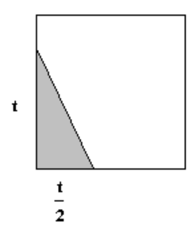
2. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(t) = \begin{cases} \alpha \cdot \cos \frac{t}{2} & , t \in (0, \pi) \\ 0 & , \text{egyébként} \end{cases}$$

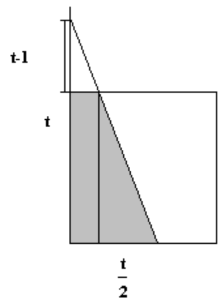
   $\mathbf{P}\left(X > \frac{\pi}{3}\right) = ?$
   Megoldás: $1 = \int\limits_0^{\pi} \alpha \cos \frac{t}{2} dt = \alpha \left[2 \sin \frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 2\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,5$
   $\mathbf{P}\left(X > \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(X \leq \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 0,5 \cos \frac{t}{2} dt = 1 - \left[\sin \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$
   $= 1 - \sin \frac{\pi}{6} = 0,5$

3. Legyen $X \in Po(2)$, azaz Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 2$ paraméterrel. Számolja ki az $Y = X(X-1)(X-2)$ várható értékét!
   Megoldás: $\mathbf{E}Y = \sum\limits_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) \frac{2^k}{k!} e^{-2} = 8$

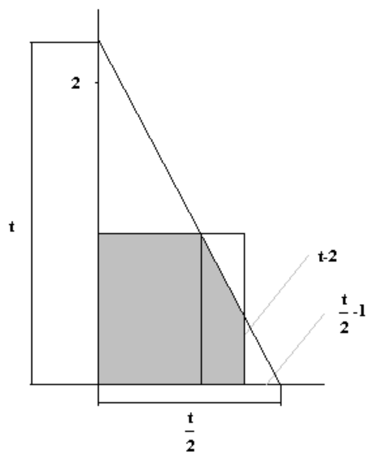
4. Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ (azaz a 0-1 intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók) függetlenek! Számolja ki a $Z = 2X + Y$ eloszlásfüggvényét!
   Megoldás: $R_Z = [1,3], F_Z(t) = \mathbf{P}(Z < t) = \mathbf{P}(2X + Y < t) = \mathbf{P}(Y < t - 2X)$
   Azaz, az egységnégyzetben meg kell nézni, mekkora terület esik az $y = t - 2x$ egyenes alá!
   a.) $0 \leq t < 1$



   A besatírozott terület nagysága: $\frac{t^2}{4}$, vagyis $F_Z(t) = \frac{t^2}{4}$, ha $0 \leq t < 1$
   b.) $1 \leq t < 2$



Most a besatírozott terület a nagy és kis háromszog területének különbsége:
$F_Z(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{(t-1)^2}{4} = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$, ha $1 \leq t < 2$
c.) $2 \leq t < 3$



Most két kis háromszög területét kell kivonni a nagyháromszög területéből:
$\frac{t^2}{4} - \frac{(t-1)^2}{4} - \frac{(t-2)^2}{4} = \frac{3t}{2} - \frac{t^2}{4} - \frac{5}{4}$, ha $2 \leq t < 3$.
d.) Természetesen, $F_Z(t) = 0$, ha $t < 0$ és $= 1$, ha $t \geq 3$.

5. Legyen $X_1, X_2, ..., X_n$ egy $G(\vartheta)$ (geometriai) eloszlásból származó statisztikai minta. Adjuk meg a ϑ paraméter becslését a momentummódszerrel!
   Megoldás: $\mathbf{E}X = \frac{1}{\vartheta} \approx \overline{X}_n \Longrightarrow \vartheta \approx \frac{1}{\overline{X}_n}$

6. Mondja ki a homogén Markov-láncok átmenetvalószínűségi mátrixaira vonatkozó Chapmann-Kolmogorov-tételt!
   Megoldás: Ha $\underline{\underline{\Pi}}$ jelöli az egylépéses átmenetvalószínűség mátrixot, és $\underline{\underline{\Pi}}_k$ a k-lépéses átmenetvalószínűség mátrixot, akkor

$$\underline{\underline{\Pi}}_k = \underline{\underline{\Pi}}_l \cdot \underline{\underline{\Pi}}_{k-l} = \underline{\underline{\Pi}}_{k-l} \cdot \underline{\underline{\Pi}}_l = \underline{\underline{\Pi}}^k$$