Méréselmélet 1. zárthelyi 2020. március 24. (100 perc)

1. Zajos megfigyelés(ek)re alapozva eldöntendő, hogy a megfigyelési csatornában az $a_0 = 1$ vagy egy attól eltérő a_1 jelszint van-e jelen? H_0 jelöli azt a hipotézist, hogy az a_0 jelszint van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_0 = 0.7$. H_1 jelöli azt a hipotézist, hogy az a_1 jelszint van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_1 = 0.3$. A költségek: $C_{10} = C_{01} = 10$; $C_{00} = C_{11} = 1$. A feltételes valószínűségsűrűség függvények:

$$f\{z|H_0\} = \begin{cases} \frac{1-cos(\pi z)}{2}, & 0 \le z \le 2 \\ 0\ egyébként \end{cases} \qquad f\{z|H_1\} = \begin{cases} \frac{z}{2}, & 0 \le z \le 2 \\ 0\ egyébként \end{cases}$$

Az elsőként megfigyelt érték $z_0 = 1.6$. Hogyan dönt (max. 3 pont)? Elvégzünk egy második mérést is, aminek eredménye $z_1 = 1.8$. Erre a mérésre alapozva hogyan dönt (max. 1 pont)? Hogyan dönt, ha mindkét megfigyelt értéket figyelembe veszi (max. 1 pont)? Mekkora az a_1 jelszint várható értéke (max. 2 pont)?

Megoldás:

A megfigyelt értéket behelyettesítjük a likelihood arány függvénybe, és ha $\Lambda(z) > \eta$, akkor a döntés H_1, ha $\Lambda(z) < \eta$, akkor a döntés a H_0.

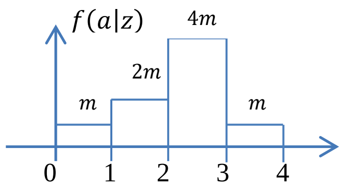
$$\eta = \frac{0.7(10-1)}{0.3(10-1)} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \cong 2{,}33,\ \Lambda(z_0) = \frac{f(z_0|H_1)}{f(z_0|H_0)} \cong \frac{0.8}{0.345} = 2.32 < \eta,\ \Lambda(z_1) = \frac{f(z_1|H_1)}{f(z_1|H_0)} \cong \frac{0.9}{0.095} \cong 9.47 > \eta,$$

$$\Lambda(z_0, z_1) = \frac{f(z_0|H_1)}{f(z_0|H_0)} \frac{f(z_1|H_1)}{f(z_1|H_0)} \cong \frac{0.8}{0.345} \frac{0.9}{0.095} \cong \frac{0.72}{0.033} \cong 21{,}8 > \eta$$

A döntéseink rendre: H_0, H_1, H_1

$$E[a_1] = \int_{-\infty}^{\infty} z\, f\{z|H_1\} dz = \int_0^2 \frac{z^2}{2} dz = \left.\frac{z^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

2. Az ábrán látható a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (max. 2 pont), a minimális átlagos abszolút hibájú becslő (max. 1 pont), és a maximum a posteriori becslő (max. 1 pont) számértékét! Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő varianciáját (max. 3 pont)?



Megoldás:

$m = \frac{1}{8}$ mert $m + 2m + 4m + m = 1$, $\quad \hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} a f(a|z) da = \int_0^1 \frac{a}{8} da + \int_1^2 \frac{a}{4} da + \int_2^3 \frac{a}{2} da + \int_3^4 \frac{a}{8} da =$

$\left.\frac{a^2}{16}\right]_0^1 + \left.\frac{a^2}{8}\right]_1^2 + \left.\frac{a^2}{4}\right]_2^3 + \left.\frac{a^2}{16}\right]_3^4 = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$, $\quad \hat{a}_{ABS}$: $m + 2m + 4mx = 4m(1-x) + m \rightarrow x = \frac{1}{4}$, $\hat{a}_{ABS} = 2\frac{1}{4}$

$\hat{a}_{MAP} = 2\frac{1}{2}$.

$$var(\hat{a}_{MS}) = E[a^2] - \hat{a}_{MS}{}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f(a|z) da - \hat{a}_{MS}{}^2 = \int_0^1 a^2 \frac{1}{8} da + \int_1^2 a^2 \frac{1}{4} da +$$

$$+ \int_2^3 a^2 \frac{1}{2} da + \int_3^4 a^2 \frac{1}{8} da - \hat{a}_{MS}{}^2 = \left.\frac{a^3}{24}\right]_0^1 + \left.\frac{a^3}{12}\right]_1^2 + \left.\frac{a^3}{6}\right]_2^3 + \left.\frac{a^3}{24}\right]_3^4 - \hat{a}_{MS}{}^2 = 5\frac{1}{3} - \left(2\frac{1}{8}\right)^2 = 0{,}8177$$

3. Mérendő egy két komponens összegéből álló jel komponenseinek ismeretlen A és B amplitúdója N megfigyelésre alapozva: $z(n) = Acos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + Bcos\left(\frac{4\pi}{N}n\right) + w(n)$, $n = 0,1, \ldots N-1$. Az ismeretlen A és B paraméterek eloszlása nem ismert. A w_k megfigyelési zaj nulla várható értékű, Gauss eloszlású, színes zaj, kovariancia mátrixa C_w. Vezesse le a paraméter legjobb maximum likelihood (ML) becslésének $(\hat{a}_{ML}, C_{\hat{a}_{ML}})$ összefüggéseit ($\hat{\boldsymbol{a}}_{ML} = [\hat{A}_{ML} \quad \hat{B}_{ML}]^T$) (max. 3 pont)! Határozza meg $C_{\hat{a}_{ML}}$ számértékét $\sigma_w = 0.1V, \rho = 0.5$ és $C_w = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}$ mellett (max. 3 pont)!

Megoldás:

Az együttes sűrűségfüggvény logaritmusának az $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ paramétertől függő része:

$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})$$

Ennek deriváltja $\boldsymbol{a}$ szerint:

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{a}}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}A)^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})\right]=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}a),$$

ahonnan

$$\widehat{\boldsymbol{a}}_{ML}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z}.$$

A becslő kovariancia mátrixa:

$$\boldsymbol{C}_{\hat{A}_{ML}}=E\left[\left(\widehat{\boldsymbol{a}}_{ML}-E(\widehat{\boldsymbol{a}}_{ML})\right)\left(\widehat{\boldsymbol{a}}_{ML}-E(\widehat{\boldsymbol{a}}_{ML})\right)^T\right]=$$

$$=E\{[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})\}\{[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})\}^T=$$

$$[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}E\{(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})^T\}\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}$$

ahol felhasználtuk, hogy $E(\widehat{\boldsymbol{a}}_{ML})=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{Ua}$, valamint, hogy definíciója szerint

$$\boldsymbol{E}\{(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})^T\}=\boldsymbol{C}_w$$

A numerikus értékek meghatározásához:

$$\boldsymbol{U}^T=\begin{bmatrix}1 & cos\frac{2\pi}{N} & \cdots & cos\frac{2\pi}{N}(N-1)\\ 1 & cos\frac{4\pi}{N} & \cdots & cos\frac{4\pi}{N}(N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -0.5 & -0.5\\ 1 & -0.5 & -0.5\end{bmatrix}$$

ahol most $N=3$.

$C_w=\sigma_w^2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\rho\\0&\rho&1\end{bmatrix}$ inverze: $\boldsymbol{C}_w^{-1}=\frac{1}{\sigma_w^2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{1-\rho^2}&-\frac{\rho}{1-\rho^2}\\0&-\frac{\rho}{1-\rho^2}&\frac{1}{1-\rho^2}\end{bmatrix}=\frac{100}{V^2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4/3&-2/3\\0&-2/3&4/3\end{bmatrix}$

$$[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]=\frac{100}{V^2}\begin{bmatrix}1&-0.5&-0.5\\1&-0.5&-0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4/3&-2/3\\0&-2/3&4/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-0.5&-0.5\\-0.5&-0.5\end{bmatrix}=\frac{400}{3V^2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

Ezt a mátrixot most itt invertálni kellene, de ez szinguláris! Hogyan lehetséges ez? Ennek oka, hogy a méréstervezés hibás, és ennek következtében a $\boldsymbol{U}$ mátrix két oszlopa egymással megegyezik. A hiba ott van, hogy a $Bcos\left(\frac{4\pi}{N}n\right)$ komponensre $N=3$ esetén nem teljesül a mintavételi tétel, és ezért nem kapunk megfelelő információt erről a komponensről, úgy tűnik, mintha az is $cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ hullámformájú komponens lenne. Így aztán értelmezhetetlen a mért jelet két paraméterrel jellemezni.

4. A vizsgált környezetről feltételezzük, hogy jellemezhető $y(t)=a_1u(t)+a_2u^2(t)+w(t)$ időfüggvénnyel. Elvégzünk N mérést. Határozza meg az időfüggvény paramétereinek legkisebb négyzetes hibájú $\hat{a}_{LS}$ becslőjét (max. 3 pont)! Határozza meg a becslő közelítő számértékét arra az esetre, amikor adott $E\{u^2(t)\}=1$, $E\{u^3(t)\}=2$, $E\{u^4(t)\}=5$, $E\{u^2(t)y(t)\}=3$, $E\{u(t)y(t)\}=1$ (max. 2 pont)!

Megoldás:

$$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}y_0\\y_1\\\vdots\\y_{N-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_0&u_0^2\\u_1&u_1^2\\\vdots&\vdots\\u_{N-1}&u_{N-1}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w_0\\w_1\\\vdots\\w_{N-1}\end{bmatrix},\ \widehat{\boldsymbol{a}}_{LS}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z},$$

$$[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]=\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2 & \sum_{n=0}^{N-1}u_n^3\\ \sum_{n=0}^{N-1}u_n^3 & \sum_{n=0}^{N-1}u_n^4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{N-1}u_ny_n\\ \sum_{n=0}^{N-1}u_n^2y_n\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{a}_0\\ \hat{a}_1\end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^4\right)-\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^3\right)^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^4 & -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^3\\ -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^3 & \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n y_n\\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2 y_n\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}\hat{a}_0\\ \hat{a}_1\end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^4\right)-\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^3\right)^2}\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^4\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n y_n\right)-\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^3\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2 y_n\right)\\ -\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^3\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n y_n\right)+\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2 y_n\right)\end{bmatrix} =$$

$$\cong \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

5. Mutassa be, hogy mire szolgál a Cramer-Rao alsó korlát (CRLB): skalár paraméter esetére adja meg (1) alkalmazásának feltételeit (max. 2 pont); (2) számításának módját (max. 2 pont); (3) az alsó korlát elérésének feltételét (max. 2 pont)! Vezesse le a CRLB számítás explicit összefüggését arra az esetre, amikor a megfigyeléseink a becsülendő a paramétertől függő jel zajos mintái, és a zajról feltételezhetjük, hogy Gauss eloszlású fehér zaj σ_w^2 varianciával (max. 3 pont)!

Megoldás:

Cramer-Rao alsó korlát (Cramer-Rao Lower Bound: CRLB, skalár paraméter esete a jegyzet alapján)

Bármely torzítatlan becslő esetében a becslés varianciájára alsó korlátot ad:

$$var(\hat{a}) \geq CRLB(a) \qquad (1)$$

A CRLB *a* függvénye. Megmondja mi az elérhető legkisebb variancia. Ha egy becslővel elérjük ezt a varianciát, akkor a becslőt hatásosnak nevezzük. Maga a CRLB elvezethet az MVU becslőhöz. A CRLB-re vonatkozó állítás:

Tételezzük fel, hogy a mérési adatok valószínűség sűrűségfüggvényére teljesül minden *a* esetében:

$$E\left[\frac{\partial lnf(z;a)}{\partial a}\right] = 0 \qquad (2)$$

Ez az ún. regularitási feltétel, amihez az integrálás és a deriválás felcserélhetősége kötődik. Képezve ugyanis a várható értéket, majd az integrálást és a deriválást felcserélve:

$$E\left[\frac{\partial lnf(z;a)}{\partial a}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial lnf(z;a)}{\partial a}f(z;a)dz = \frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\infty}f(z;a)dz = \frac{\partial}{\partial a}1 = 0 \qquad (3)$$

Ha tehát (83) fennáll, akkor bármely torzítatlan becslőre igaz (bizonyítás később), hogy:

$$var(\hat{a}) \geq \left[-E\left(\frac{\partial^2 lnf(z;a)}{\partial a^2}\right)\right]^{-1} \qquad (4)$$

Egy olyan torzítatlan becslő, amelyik eléri a Cramer-Rao alsó korlátot akkor és csak akkor található, ha:

$$\frac{\partial lnf(z;a)}{\partial a} = I(a)(g(z)-a) \qquad (5)$$

struktúrájú, ahol $g(z)$ és $I(a)$ alkalmas függvények. Ilyenkor a becslő $\hat{a} = g(z)$, és a variancia minimum $\frac{1}{I(a)}$.

Ismeretlen a jelparaméter varianciájának alsó korlátja:

A megfigyelt értékek egy a-tól függő jel zajos mintái:

$x_k = s(k;a) + w_k = s_k(a) + w_k, k = 0,1,\dots,N-1$; $\{w_k\}$ Gauss eloszlású, fehér zaj ismert σ_w^2 varianciával.

$$f(z;a)=\frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k-s_k(a))^2} \tag{6}$$

Az első derivált:

$$\frac{\partial lnf(z;a)}{\partial a}=\frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k-s_k(a)\right)\frac{\partial s_k(a)}{\partial a} \tag{7}$$

A második derivált:

$$\frac{\partial^2 lnf(z;a)}{\partial a^2}=\frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\left(x_k-s_k(a)\right)\frac{\partial^2 s_k(a)}{\partial a^2}-\left[\frac{\partial s_k(a)}{\partial a}\right]^2\right] \tag{8}$$

Képezve a várható értéket:

$$I(a)=-E\left[\frac{\partial^2 lnf(z;a)}{\partial a^2}\right]=\frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{\partial s_n(a)}{\partial a}\right]^2 \tag{9}$$

Ezzel a becsült paraméter varianciájának alsó korlátja:

$$var(\hat{a})\geq\frac{\sigma_w^2}{\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{\partial s_n(a)}{\partial a}\right]^2} \tag{10}$$

6. Távolságot mérünk radarral: $R=\tau\frac{c}{2}$, ahol τ a reflektálódott elektromágneses hullám terjedési ideje, c a fénysebesség. A terjedési idő megfigyelésére van lehetőségünk, összesen négy megfigyelést végzünk. A megfigyelési egyenlet: $z_k=\tau_k+w_k$, ahol w_k nulla várható értékű, $C_w=\sigma_w^2 I$ kovariancia mátrixú, Gauss eloszlású zaj. Válasszon olyan mérési módszert, amely minimális varianciájú, torzítatlan becslést eredményez! Vezesse le a becslés varianciájának CRLB értékét, és fejezze ki a becslőt és annak szórását (max. 4 pont)! Adja meg a numerikus értékeket is, ha $z_0=95\mu s, z_1=105\mu s, z_2=97\mu s, z_3=103\mu s,\ \sigma_w=4\mu s$ (max. 1 pont)! Ezt követően határozza meg a távolság értékét és szórását ($c=3\cdot 10^5\frac{km}{s}$) (max. 1 pont)!

Megoldás:

Az együttes sűrűségfüggvény logaritmusának a τ paramétertől függő része:

$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)$$

Ennek deriváltja τ szerint:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)\right]=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau),$$

ahonnan

$$\hat{\tau}_{ML}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z},$$

illetve

$$\frac{\partial lnf(z,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)\right]=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}([\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z}-\tau)=$$

$$=I(\tau)(g(z)-\tau)$$

azaz a becslő varianciája:

$$var(\hat{\tau}_{ML})=I^{-1}(\tau)=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}$$

A numerikus értékek érdekében:

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U} = \frac{1}{\sigma_w^2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{4}{\sigma_w^2},$$

vagyis:

$$var(\hat{\tau}_{ML}) = I^{-1}(\tau) = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1} = \frac{\sigma_w^2}{4}, \hat{\tau}_{ML} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z} = \frac{z_0 + z_1 + z_3 + z_4}{4}$$

Tehát:

$$\hat{\tau}_{ML} = 100\mu s, \sqrt{var(\hat{\tau}_{ML})} = \sqrt{4} = 2\mu s$$

A távolság értéke és szórása:

$$\hat{R}_{ML} = \hat{\tau}_{ML}\frac{c}{2} = 10^{-4}\frac{3\cdot 10^5}{2}km = 15km, \quad \sqrt{var(\hat{R}_{ML})} = \frac{c}{2}\sqrt{var(\hat{\tau}_{ML})} = \frac{3\cdot 10^5}{2}2\cdot 10^{-6} \approx 300m$$

7.*A $z(n) = Asin\left(2\pi\frac{f_0}{f_m}n + \varphi\right) + w(n)$ összefüggéssel leírható megfigyelési modellt alkalmazunk, ahol $w(n)$ Gauss eloszlású, fehér zaj, f_m pedig a mintavételi frekvencia. A mért jelből 125 mintát veszünk. A jel/zaj viszony: $\frac{A^2}{2\sigma_w^2} = 10$. Vezesse le a frekvenciabecslés varianciájának Cramer-Rao alsó korlátját megadó összefüggést, és számítsa ki numerikus értékét, ha $\frac{f_0}{f_m} = 0.02$ (max. 5 pont)!

A megoldás során a jegyzet mellékletében bemutatott eljárást kell követni annak figyelembevételével, hogy a 125 minta nem egészszámú periódusból származik.