Bevezetés a számításelméletbe II.

1. ZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk.

1. Az alábbi ábra egy csatornahálózat vázlatos rajzát mutatja. A vonalak a csatornákat jelképezik, a nyilaktól és a betűktől ill. számoktól tekintsünk el. Minden egyes csomópontban, ahol csatornák találkoznak, egy-egy létra vezet a felszínre. Lehetséges, hogy a terroristák a hálózatot valahol megmérgezték. Ezért fertőtleníteni kell minden egyes csatornát, aminek az a módja, hogy egy speciálisan kiképzett szakember súlyos védőfelszerelésben végigkúszik a csöveken. Mivel a szkafanderre is tapadhat méreg, a már fertőtlenített szakaszra nem szabad ismételten behatolni. Legalább hányszor kell a szakembernek kievickélnie a csatornából ahhoz, hogy a teljes fertőtlenítést elvégezhesse? (A feladatlapot nem lehet a dolgozat részeként beadni.)

   Készítsük el a G gráfot úgy, hogy a csomópontok legyenek G csúcsai, az egyes csatornák pedig az élei. (1 pont)
   Ebben a gráfban a special officer mozgását minden egyes leereszkedés és kimászás között a G egy élsorozata írja le.(1 pont)
   Minden egymást követő kimászásnak és leereszkedésnek megfelelő gráfcsúcs közé húzzunk be egy élt a G gráfban. Legyen a kapott gráf G'. A G' gráfban a fenti élsorozatok és az újonnan behúzott élek egy Euler-sétát határoznak meg. (3 pont)
   Az a cél tehát, hogy minél kevesebb élt húzzunk be G-be úgy, hogy a kapott G' gráfnak legyen Euler-sétája, (2 pont)
   azaz, mivel G eredetileg összefüggő volt, G'-nek legfeljebb két páratlan fokú csúcsa maradjon. (1 pont)
   Mivel G-nek 8 páratlan fokú csúcsa van, ezért három (páratlan fokú csúcsok közti) él behúzásával elérhető a kívánt tulajdonság. (1 pont)
   Eszerint a szakertőnek legalább négyszer kell a felszínre küzdenie magát: háromszor a munkája közben, egyszer pedig a végén. (1 pont)

   (A feladat szövegéből közvetve az is adódik, hogy a munka végén ki kell mászni, ugyanis a *teljes* fertőtlenítés csak úgy képzelhető el, hogy az esetlegesen mérgezett szkafanderben búslakodó munkaerő sem maradhat lenn. Ennek ellenére elfogadjuk a 3 választ is, ha az abból adódik, hogy a szakember végül lenn marad őrködni.)

2. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy összefüggő, nem teljes gráf, akkor $\chi(G) \leq \chi_e(G)$ teljesül G kromatikus és élszínezési számára.

   Tanultuk, hogy $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$, (2 pont)
   hisz a maximális fokú csúcsból induló élek mindegyikére külön színt kell használnunk. (0 pont)
   Brooks tétele szerint ha G összefüggő, G nem páratlan kör és G nem teljes gráf, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$ teljesül. (3 pont)
   Ezek szerint, ha a G gráf nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) \leq \chi_e(G)$ áll, vagyis a feladat állítása igaz. (1 pont)
   Így már azt csak azt kell megmutatni, hogy a feladat állítása tetszőleges páratlan hosszú körre is igaz. (1 pont)
   Ha tehát G egy páratlan kör, akkor tanultuk, hogy G csúcsai nem színezhetők ki két színnel, de három szín elég erre, azaz $\chi(G) = 3$. (1 pont)
   Két színnel színezve ugyanis felváltva következnének a színek a kör mentén, de a végén bajban lennénk, amit megúszunk, ha előkaphatunk egy harmadik színt is. (0 pont)
   Ugyanígy látható, hogy G éleinek kiszínezéséhez nem elég két szín, de hárommal ez megtehető, tehát $\chi_e(G) = 3$. (1 pont)
   Tehát páratlan körre megegyezik a két kromatikus szám, ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk. (1 pont)

3. Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges perfekt gráf, és legyen X a G csúcsainak egy részhalmaza. Jelölje E_1 mindazon E-beli élek halmazát, amiknek mindkét végpontja X-ben van, álljon E_2 a G gráf X-beli végponttal nem rendelkező éleiből, és legyen az X és $V \setminus X$ között futó G-beli élek halmaza E_3. Bizonyítsuk be, hogy a $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ és $G_3 = (V, E_3)$ gráfok mindegyike perfekt.

   Mivel E_1 az X által feszített élek halmaza, ezért $G_1 - (V \setminus X)$ a G feszített részgráfja, (3 pont)
   ezért definíció szerint perfekt. (2 pont)
   A G_1 gráfot úgy kapjuk, hogy további izolált pontokat veszünk hozzá, ami nem rontja el a perfektséget. (0 pont)
   Hasonlóan, E_2-t a $V \setminus X$ halmaz feszíti, (1 pont)
   tehát $G_2 - X$ is perfekt. (1 pont)
   Így az X-beli csúcsok izolált pontokként való hozzávétele után kapott G_2 gráf is perfket. (0 pont)
   A G_3 gráf páros, hisz élei kizárólag az X és $V \setminus X$ színosztályok között futnak. (1 pont)
   A páros gráfokról tanultuk, hogy perfektek, (1 pont)
   ezért G_3 is perfekt. (1 pont)

4. Igaz-e, hogy a fenti ábrához tartozó (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyamnagyság (folyamérték) pontosan 19? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik. A feladatlapot nem lehet a dolgozat részeként beadni.)

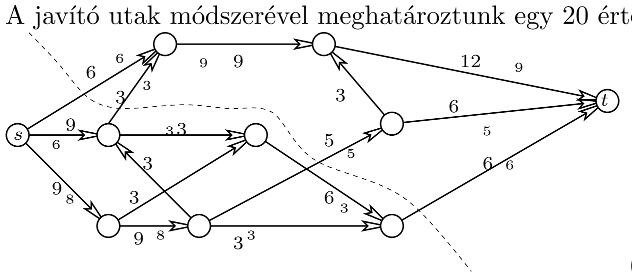
   A feladatsorról hiányzott egy él 6-os kapacitása, de ezt a dolgozatírás közben kihirdettük.

   A maximális folyamnagyság megegyezik a minimális st-vágás értékével. (3 pont)
   Ha az 5 kapacitású él nincs benne egy minimális st-vágásban, akkor e vágásban csak 3-mal osztható kapacitású élek

szerepelnek, azaz a vágásérték 3-mal osztható. (3 pont)
Ha az 5 kapacitású él benne van egy minimális vágásban, akkor (mivel minden más kapacitás 3 többszöröse) a vágás értéke 3-mal osztva 2 maradékot ad. (3 pont)
A 19-et 3-mal osztva 1 maradékot kapunk, ezért a minimális vágáskapacitás nem lehet 19, tehát a maximális folyamnagyság sem lehet ennyi. (1 pont)

Meg lehet oldani persze a feladatot a maximális folyam meghatározásával is.

A javító utak módszerével meghatároztunk egy 20 értékű folyamot az ábrán látható módon.



(a kis számok a folyam által felvett értékeket jelentik.) (8 pont)
Tehát a maximális folyamnagyság legalább 20, vagyis *nem* 19. (2 pont)
(Mellesleg a maximális folyamnagyság pontosan 20, mégpedig a jelzett 20 kapacitású st-vágás miatt.) (0 pont)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $k \geq 1$ és G egy tetszőleges k-élösszefüggő páros gráf, akkor G-be egy újabb élt behúzva a kapott G' gráf vagy páros lesz, vagy G' legalább k páratlan kört tartalmaz.

Tegyük fel, hogy az u és v csúcsok közé húztuk be az új élt. Ha ettől nem jön létre páratlan kör, akkor G'-ben egyáltalán nem lesz páratlan kör (hisz G-ben sem volt), így G' páros lesz. (2 pont)
Ha ellenben az uv él behúzása után lesz G'-ben páratlan kör, akkor G' nem páros gráf, így u és v a G azonos színosztályához tartoznak. (1 pont)
Ezért G páros volta miatt tetszőleges uv út páros sok élt tartalmaz. (2 pont)
Mivel a G gráf k-élösszefüggő, ezért G tartalmaz k páronként éldiszjunkt uv utat. (2 pont)
Ezen uv utak mindgyike a behúzott uv éllel együtt egy páratlan kört alkot. (2 pont)
Ezért ha G' tartalmaz páratlan kört, akkor mindjárt legalább k páratlan köre van, és ez épp a feladat állítása. (1 pont)

6. Tegyük fel, hogy a $2n$ pontú G páros gráf mindkét színosztályában n csúcs van, és G minden egyes csúcsának foka több, mint $\frac{n}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van teljes párosítása.

Fel kellett volna tenni, hogy G egyszerű, mert amúgy nem igaz az állítás. Reményeink szerint ez elhangzott a feladatok kiosztása után.

Mivel a színosztályok méretei megegyeznek, ezért Frobenius tételének erre vonatkozó feltétele teljesül. (1 pont)
Azt kell csupán megmutatni, hogy teljesül a Frobenius tételben (is) megfogalmazott Hall-feltétel, azaz, az egyik színosztály (mondjuk A) tetszőleges X részhalmazának $N(X)$ szomszédságában legalább $|X|$ csúcs található. (1 pont)
Ha $1 \leq |X| \leq \frac{n}{2}$, akkor ez világos, hiszen X bármely csúcsának már önmagában több, mint $\frac{n}{2}$ szomszédja van (1 pont)
ezért X-nek sem lehet $\frac{n}{2}$-nél kevesebb szomszédja. (1 pont)
Másrészt, ha $|X| > \frac{n}{2}$, akkor a B színosztály minden csúcsából fut X-be él. (1 pont)
Ugyanis az A színosztálynak kevesebb, mint $\frac{n}{2}$ X-en kívüli pontja van, (1 pont)
márpedig minden B-beli csúcsnak legalább $\frac{n}{2}$ A-beli szomszédja van. (1 pont)
Ebben az esetben tehát $N(X) = B$, (1 pont)
teljseülnek a Frobenius tétel feltételei, (1 pont)
G-nek csakugyan létezik teljes párosítása. (1 pont)

Használható épp a Kőnig tétel is:

A Kőnig tétel szerint ha G páros, akkor $\nu(G) = \tau(G)$, (2 pont)
ezért azt kell igazolni, hogy $\tau(G) = n$, (1 pont)
más szóval n-nél kevesebb csúcs nem alkothat lefogó ponthalmazt G-ben. (1 pont)
Tegyük fel indirekt, hogy egy n-nél kevesebb csúcsú U ponthalmaz lefogja G-t. (1 pont)
Ekkor valamelyik (mondjuk az A) színosztályból U legfeljebb $\frac{n}{2}$ pontot tartalmaz. (1 pont)
Világos, hogy a B színosztály nem lehet teljes egészében U-ban, ezért létezik B-ben egy U-n kívüli b csúcs. (1 pont)
Mivel b-ből több, mint $\frac{n}{2}$ él indul, és U legfeljebb $\frac{n}{2}$ pontot tartalmaz, ezért b-ből fut él U-n kívülre is. (1 pont)
Ez ellentmond az U halmaz lefogó tulajdonságának. (1 pont)
A kapott ellentmondás a G gráf teljes párosításának létezését bizonyítja. (1 pont)

Vagy itt van mindjárt a Dirac tétel:

Tanultuk, hogy ha egy egyszerű G gráf minden csúcsának fokszáma legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-nek van Hamilton köre.(Jaj. 0 pont)
Mivel ez teljesül a mi G gráfunkra, ezért G-nek van Hamilton köre. (Hajaj: 0 pont)
E Hamilton kör minden második élét kiválasztva éppen a G gráf egy teljes párosítását kapjuk. (0 pont)