//

Valószínűségszámítás

Elméleti összefoglaló

2009. - 2010.

(később mat. stat)

Tétel:

- $A \cdot B = B \cdot A$, $A + B = B + A$
- $(A \cdot B) C = A (B \cdot C)$, $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $(A + B) \cdot C = A C + B \cdot C$, $(A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C)$
- $\overline{\overline{A}} = A$, $\Omega = \overline{\emptyset}$, $\overline{\Omega} = \emptyset$
- $(\overline{A + B}) = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $(\overline{A \cdot B}) = \overline{A} + \overline{B}$
- $A \cdot \overline{A} = \emptyset$, $A + \overline{A} = \Omega$, $A + \emptyset = A$, $A \cdot \emptyset = \emptyset$, $A + \Omega = \Omega$, $A \cdot \Omega = A$

Axiómák:

1° $P(\Omega) = 1$

2° $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$, ha $\forall A_i \in \mathcal{F}$ és $A_i \cdot A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$

Tétel:

a) $P(\emptyset) = 0$

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

c) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

d) Ha $A \subseteq B \rightarrow P(A) \subseteq P(B)$ /A valószínűség monoton./

Tétel: (Poincaré - tétel)

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)$$

Tétel: (Boole - egyenlőtlenség)

a) $P(A_1 + \dots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ /Páronként kizáró események esetén = /

b) $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$ /Ha mindegyik esemény biztos esemény, akkor = /

Tétel: (Folytonossági tétel)

a.) Ha $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \ldots$, akkor $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

b.) Ha $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \supseteq B_n \supseteq B_{n+1} \supseteq \ldots$, akkor $P(B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_n \ldots) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$

Axiómák: (Felt. valószínűség)

1° $P_B(B) = 1$

2° Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$, $A_i \cdot A_j = \emptyset \rightarrow P_B(\sum A_i) = \sum P_B(A_i)$

Definíció: Az A esemény független a B-től, ha $P_B(A) = P(A)$.

Ha $P(A), P(B) > 0$, A független B-től $\Rightarrow P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow$

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = P_A(B) = P(B) \Rightarrow$ azaz B is független A-tól.

Definíció: Az $A, B \in \mathcal{F}$ függetlenek, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Tétel:

a.) Ha A, B függetlenek, akkor $\bar{A}, B$ és $A, \bar{B}$ és $\bar{A}, \bar{B}$ is függetlenek!

b.) Ha $P(A) = \{0, 1\}$, akkor A $\forall B \in \mathcal{F}$-től független (még önmagától is!)

Definíció: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ páronként függetlenek, ha $P(A_i A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$ $(i \neq j)$

Definíció: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ teljesen függetlenek, ha $2 \le k \le n$ esetén

$\forall$ $1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k \le n$-re:

$$P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

Tétel: teljes függetlenség $\Longrightarrow$ páronkénti függetlenség $(\not\Leftarrow)$

Tétel: Ha $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ teljesen függetlenek, akkor közülük akárhányat a komplementer eseményre cserélve az új eseményrendszer is független lesz.

Definíció: Az $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszert alkotnak, ha $A_i \cdot A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$,

$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$.

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A_1, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer, $P(A_i) > 0$, $B \in \mathcal{F}$ tetszőleges.
Akkor $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$.

Tétel: (Bayes-tétel)

Ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer, $P(A_i) > 0$, $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$.
Akkor $P(A_i|B) = \dfrac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)} = \dfrac{P(A_i \cdot B)}{P(B)}$

Tétel (Szorzási szabály)

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) > 0$, akkor

$$P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

Definíció: Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény valószínűségi változó, ha $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén $\{\omega : X(\omega) < t\} \in \mathcal{F}$.

Definíció: $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvény X eloszlásfüggvénye, ha $F_X(t) = P(\{\omega : X(\omega) < t\}) =$
$= P(X < t)$.

Tétel: (F_X tulajdonságai)

1° monoton nem csökken, azaz $t_1 < t_2 \Rightarrow F_X(t_1) \leq F_X(t_2)$
2° $\forall$ pontban balról folytonos, azaz $\lim_{t \to x_0} F_X(t) = F_X(x_0)$
3° $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

Tétel: (Az intervallumba esés valószínűsége)

- $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b+0) - F_X(a)$
- $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a+0)$
- $P(a < X \leq b) = F_X(b+0) - F_X(a+0)$

Definíció: Az X vv. diszkrét, ha R_X megszámlálható halmaz (véges vagy végtelen)

$R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n(, \dots)\}$, $P(X = x_i) = F_X(x_i + 0) - F_X(x_i) = p_i$,

$\{p_1, p_2, \dots, p_n(, \dots)\}$ az X eloszlása, $0 < p_i < 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

(teljes eseményrendszert alkot)

Tétel: Ha $X \in B(n,p) \Rightarrow k^* = [np] + 1$, $P(X = k^*) \geq P(X = i)$, $\forall i \in R_X$

(eloszlások külön lapon!)

Tétel: Ha $X \in G(p)$, akkor X örökifjú, azaz $P(X = n+k \mid X > n) = P(X = k)$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$-re.

(Megfordítható. Az állítás visszafelé is igaz)

Definíció: Az X vv. folytonos, ha $\exists f_X(u)$ sűrűségfüggvény, mellyel

$$P(X < t) = F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\, du.$$

Tétel: (f_X tulajdonságai)

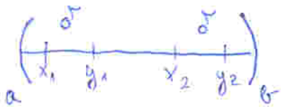
a.) $f_X(u) \geq 0$

b.) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)\, du = 1$

Tétel: $P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) =$

$$= \int_a^b f_X(u)\, du = F_X(b) - F_X(a)$$

Tétel: $X \in U(a,b)$, $x_1<y_1$, $x_2<y_1$, $x_1,y_1,x_2,y_2 \in (a,b)$, $y_1-x_1=y_2-x_2$,



, akkor $P(x_1<X<y_1)=P(x_2<X<y_2)=F_X(y_1)-F_X(x_1)=\frac{\delta}{b-a}$

Tétel: Ha $X \in E(\lambda) \iff P(X<t+s \mid X>t)=P(X<s)$, $\forall s,t>0$

(Azaz az exponenciális eloszlású vv. örökifjú)

Tétel Ha $X \in N(m,\sigma)$, akkor $F_X(t)=\Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right) \Rightarrow f_X(t)=\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)$

Tétel: (φ tulajdonságai)

a) $\varphi(-x)=\varphi(x)$ /páros/

b) $\varphi(0)\geq\varphi(x)$, $\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ /0 helyen van a maximuma/

c) $\varphi'(x)=-x\cdot\varphi(x)$, $\varphi''(x)=(x^2-1)\cdot\varphi(x) \Rightarrow x=\pm 1$ /inflexiós helyek/

Tétel: (Φ tulajdonságai)

a) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

b) $P(-a<X<a)=\Phi(a)-\Phi(-a)=2\Phi(a)-1$

c) Φ McLaurin-sora a 0-ban megadható

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{2i+1}}{2^i(2i+1)\cdot i!}\cdot(-1)^{i+1}\right), \quad x>0$$

(eloszlások külön lapon!)

Definíció: X vv. F_X eloszlásfüggvénnyel, $Y=f(X)$, $F_Y(t)=?$

X,Y diszkrét, $R_X=\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$, $P(X=x_i)=p_i$

$f: X\to Y$ $\quad y_l=f(x_i)$, $i\in\{k_1,k_2,\dots\}$, $P(Y=y_l)=\sum_{\forall i\in\{\dots\}} P(X=x_i)$

Definíció: / X vv. F_X eloszlásfüggvénnyel, $Y=g(X)$, $F_Y(t)=?$ /

X, Y folytonos $\Rightarrow$ $\exists f_X(t)$ sűrűségfüggvény, $Y=g(X)$, tfh. g szig. mon. fv. $\Downarrow$ $\exists g^{-1}$

tft, hogy g differenciálható

$\boxed{A}$ g szig. mon. nő $\Rightarrow$ g^{-1} szig. mon. nő

- $F_Y(t)=P(Y<t)=P(g(X)<t)=P\big(g^{-1}(\underbrace{g(X)}_{X})<g^{-1}(t)\big)=P(X<g^{-1}(t))=F_X(g^{-1}(t))$
- $f_Y(t)=F_Y'(t)=f_X(g^{-1}(t))\cdot(g^{-1}(t))'=f_X(g^{-1}(t))\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(t))}$

$\boxed{B}$ g szig. mon. csökkenő $\Rightarrow$ g^{-1} szig. mon. csökkenő

- $F_Y(t)=P(g^{-1}(g(X))>g^{-1}(t))=P(X>g^{-1}(t))=1-P(X\le g^{-1}(t))=1-F_X(g^{-1}(t))$
- $f_Y(t)=F_Y'(t)=-f_X(g^{-1}(t))\cdot(g^{-1}(t))'=f_X(g^{-1}(t))\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(t))}$

$\boxed{A+B}$

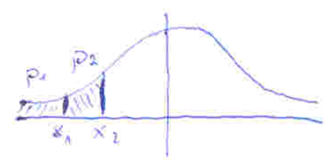
- $f_Y(t)=f_X(g^{-1}(t))\cdot\left|(g^{-1}(t))'\right|$

Tétel: $X\in U(0,1)$, tfh Y eloszlásfv-e szig. mon. nő $\Rightarrow$ $\exists F_Y^{-1}$, $F_X(t)=P(X<t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t\le 1\\ 1 & t>1\end{cases}$

Akkor $Z=F_Y^{-1}(X)$ vv. eloszlásfv-e éppen F_Y lesz!

Tétel. Ha az Y vv. eloszlásfüggvénye $F_Y(t)$ szig. mon. nő $(\Rightarrow \exists F_Y^{-1}(t))$, akkor az $X=F_Y(Y)$ vv. $U(0,1)$ lesz!

Definíció: (Diszkretizálás)



X folytonos vv., $f_X(t)$

Y diszkrét vv., $R_Y=\{y_1,\dots,y_n,\dots\}$, $P(Y=y_i)=p_i$

$\exists x_1\ (-\infty,x_1)$ $\quad p_1=\int_{-\infty}^{x_1} f_X(t)\,dt$

$\exists x_2\ (x_1,x_2)$ $\quad p_2=\int_{x_1}^{x_2} f_X(t)\,dt$

$g(t)=y_i$, ha $t\in(x_{i-1},x_i)$

$Z=g(X)$ vv. eloszlása megegyezik Y-nal!

Definíció: X diszkrét vv., $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$, $p_i = P(X = x_i)$

tfh. $\sum_{\forall i} |x_i| \cdot p_i < \infty$. Akkor $EX = \sum_{\forall i} x_i \cdot p_i$ -t az X vv. várható értékének nevezzük.

Definíció: X folytonos vv., $f_X(t)$ sűrűségfüggvénnyel

tfh. $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x)\,dx < \infty$, Akkor $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$ az X vv. várható értékének nevezzük.

Tétel:

$$E(g(x)) = \begin{cases} \sum_{\forall i} g(x_i) \cdot p_i \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx \end{cases}$$

Tétel: $E(aX + b) = a \cdot EX + b$

Tétel: $E(X-a)^2 \geq E(X-EX)^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$

Definíció: Az X vv. n-edik momentumán az $Y = X^n$ vv. várható értékét értjük, amennyiben létezik.

$$\mu_n(X) = E(X^n)$$

Tétel: $\exists \mu_n(X) \overset{\text{következik}}{\Longrightarrow} \exists \mu_i(X)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ is!

Definíció: Az X vv. szórásnégyzetén az $Y = (X - EX)^2$ vv. várható értékét értjük:

$$E(X-EX)^2 = \sigma^2 X$$

Definíció: $\sigma^2 X = E(X-EX)^2$ létezik, az X szórásnégyzete (variancia)

$\sigma X = \pm\sqrt{\sigma^2 X}$ az X szórása

Tétel: $\sigma^2 X = E(X^2) - (EX)^2 = \mu_2 - (\mu_1)^2$

$\mu_2 = \sigma^2 X + (EX)^2$

Tétel: $\sigma^2(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \sigma^2 X$, $\sigma(\alpha X + \beta) = |\alpha| \cdot \sigma X$

$\sigma^2 X = 0 \Longleftrightarrow P(X = c) = 1$

Tétel: (Markov-egyenlőtlenség)

Ha $X \geq 0$, $\exists EX (\geq 0)$, akkor $\forall \lambda > 0$ esetén $P(X \geq \lambda) \leq \frac{EX}{\lambda}$

$\boxed{\text{Á:}}$ $\lambda = \delta \cdot EX \Rightarrow P(X \geq \delta \cdot EX) \leq \frac{1}{\delta}$, $\forall \delta > 0$-ra.

Tétel: (Csebisev - egyenlőtlenség)

tfh. $\exists \sigma X$ ($\Rightarrow \exists EX$) $\forall \mu > 0$ esetén

$$P(|X-EX| \geq \mu) \leq \frac{\sigma^2 X}{\mu^2}$$

$\boxed{A}$: $\mu = \sigma X \cdot \delta \Rightarrow P(|X-EX| \geq \delta \cdot \sigma X) \leq \frac{1}{\delta^2}$, $\forall \delta > 0$-ra.

Tétel: (Steiner - tétel)

$$\sigma^2 X = E(X-a)^2 - [E(X-a)]^2 \quad , \forall a \in \mathbb{R}$$

Definíció: $\exists \mathcal{A}, \Omega, \underline{X}, \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$, fv. $\underline{X}$ vektor vv., ha $\forall t \in \mathbb{R}^p$ esetén

$$A_{\underline{t}} = \{\omega, \omega \in \Omega : X_1(\omega) < t_1, \dots, X_p(\omega) < t_p\} \in \mathcal{F}$$

Tétel: $\underline{X}$ vvv. $\Leftrightarrow \forall X_i$ vv.

Definíció: $F_{\underline{X}}(\underline{t}) = P(A_{\underline{t}}) = P(X_1 < t_1, X_2 < t_2, \dots, X_p < t_p)$ az $\underline{X}$ vvv. eloszlásfv-e, vagy az $X_1, X_2, \dots, X_p$ vv-k együttes eloszlásfv-e.

Tétel: ($F_{\underline{X}}$ tulajdonságai)

a) $F_{\underline{X}}$ $\forall$ változójában monoton nem csökkenő fv., azaz pl. $x < y \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{\underline{X}}(x, t_2, \dots, t_p) \leq F_{\underline{X}}(y, t_2, \dots, t_p)$, $\forall t_2, \dots, t_p \in \mathbb{R}$

b) $F_{\underline{X}}$ $\forall$ változójában balról folytonos, azaz pl.

$$\lim_{x \to x_0} F_{\underline{X}}(x, t_2, \dots, t_p) = F_{\underline{X}}(x_0, t_2, \dots, t_p)$$

c) $\lim_{\forall t_i \to -\infty} F_{\underline{X}}(\underline{t}) = 0$, $\lim_{\forall t_i \to \infty} F_{\underline{X}}(\underline{t}) = 1$

d) $\forall [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_p, b_p)$ / p-dimenziós tégla / esetén

$$\sum_{\forall \underline{\varepsilon}} (-1)^{\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i} \cdot F_{\underline{X}}(\varepsilon_1 \cdot a_1 + (1-\varepsilon_1) \cdot b_1, \varepsilon_2 \cdot a_2 + (1-\varepsilon_2) \cdot b_2, \dots, \varepsilon_p \cdot a_p + (1-\varepsilon_p) b_p) \geq 0$$

$$\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)^T \quad , \varepsilon_i \in \{0, 1\}$$

...fináció: Az $F_{X,Y}(u,v)$ együttes eloszlásfüggvény peremeloszlásfv-ei az $F_X(u)$ és $F_Y(v)$ eloszlásfüggvények.

Definíció: Az $F_{\underline{X}}(\underline{t})$ p-változós eloszlásfv. k-dimenziós $(k<p)$ vetülete eloszlásfüggvényei $1 \le m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_k \le p$ (k elemből álló indexkombináció)

$$F_{X_{m_1},X_{m_2},X_{m_3},\ldots,X_{m_k}}(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_k)$$

Tétel: $F_{\underline{X}}(t)$ $\forall$ vetületi eloszlásfüggvényét meghatározza! (a megfordítás nem igaz)

Definíció: Diszkrét vv. együttes eloszlása (2) $R_x=\{x_1,x_2,\ldots\}$, $R_y=\{y_1,y_2,\ldots\}$
$\forall x_i \in R_x$, $\forall y_j \in R_y$: $P(X=x_i, Y=y_j)=r_{ij}$ az (X,Y) vv-ók együttes eloszlása. $0<r_{ij}<1$, $\sum_{\forall x_i,y_j} r_{ij}=1$, $P(X=x_i)=\sum_{\forall y_j} r_{ij}$, $P(Y=y_j)=\sum_{\forall x_i} r_{ij}$

Definíció: Folytonos vv. együttes eloszlása, együttes sűrűségfüggvény, perem sűrűségfv-ek.

Az $\underline{X}$ vvv folytonos, ha létezik együttes sűrűségfv., mellyel

$$F_{\underline{X}}(\underline{t})=\int_{-\infty}^{t_n}\int_{-\infty}^{t_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{t_1} f_{\underline{X}}(\underline{u})\,du_1\,du_2\ldots du_n$$

Tétel: ($f_{\underline{X}}(t)$ tulajdonságai)

a) $f_{\underline{X}}(\underline{t}) \ge 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(\underline{u})\,du_1\ldots du_n=1$

Definíció: Az $F_{\underline{X}}(\underline{t})$ egy k-dimenziós vetületi eloszlásfüggvényének sűrűségfv-e az $f_{\underline{X}}(t)$ egy k-dimenziós sűrűségfüggvénye lesz.

Tétel: $$f_{X_{i_1},X_{i_2},X_{i_3},\ldots X_{i_k}}(t_{i_1},\ldots,t_{i_k})=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n-k} f_{\underline{X}}(\underline{t})\,dt_{j_1}\,dt_{j_2}\ldots dt_{j_{(n-k)}}$$

$j_\ell \notin \{i_1,\ldots,i_k\}$

Definíció: Az X vv. független Y vv-tól, ha az X-hez tartozó tetszőleges n'vódesemény független tetszőleges az Y-hoz tartozó n'vódeseménytől.

$\forall u, v \in R \quad A_u = \{\omega, X(\omega) < u\}$ és $B_v = \{\omega, Y(\omega) < v\}$ független

$$P(A_u \cdot B_v) = P(X<u, Y<v) = F_{X,Y}(u,v) = P(A_u) \cdot P(B_v) = F_X(u) \cdot F_Y(v)$$

$\forall u, v$-re

Definíció: $F_{X,Y}(u,v) = F_X(u) \; F_Y(v)$

$$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j) \quad , \forall x_i, y_j$$

Definíció: $f_{X,Y}(u,v) = f_X(u) \cdot f_Y(v)$

Definíció: Az $X_1, \dots, X_n$ vv. teljesen függetlenek, ha tetszőleges dim. vetületi eloszlásfv. a megfelelő 1D-s eloszlásfv-ek szorzataként áll elő.

$$F_{X_{i_1}, \dots, X_{i_k}}(t_{i_1} \dots t_{i_k}) = F_{X_{i_1}}(t_{i_1}) \cdot \ldots \cdot F_{X_{i_k}}(t_{i_k})$$

Definíció: (Diszkrét feltételes eloszlás)

X, $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$, $P(X=x_i) = p_i$, $A \in \mathcal{A}$ esg esemény

$$P(X=x_i \mid A) = \frac{P(X=x_i, A)}{P(A)} = P_A(X=x_i)$$

$$\sum_{\forall x_i} P_A(X=x_i) = \sum_{\forall x_i} P(X=x_i \mid A) = \sum_{\forall x_i} \frac{P(X=x_i, A)}{P(A)} = \frac{1}{P(A)} \cdot \sum_{\forall x_i} P(X=x_i, A) = \frac{1}{P(A)} \cdot \underbrace{P(\Sigma(X=x_i), A)}_{A} = 1$$

Y, $R_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$; $P(Y=y_j) = q_j$

$P(X=x_i, Y=y_j) = r_{ij}$, Tudjuk, hogy $Y=y_j$ bekövetkezett!, $A = \{\omega, Y(\omega) = y_j\}$

$$P(X=x_i \mid Y=y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{r_{ij}}{q_j} \quad \forall i,j\text{-re}$$

$\hookrightarrow$ X vv. Y-ra vonatkoztatott feltételes eloszlása

Motiváció: (Folytonos feltételes eloszlás)

$$P(X<u \mid Y=v) \qquad /0\text{-val kellene osztani}/$$

$$P(X<u \mid v \le Y < v+dv) = \frac{P(X<u,\ v \le Y < v+dv)}{P(v \le Y < v+dv)} = \frac{F_{X,Y}(u,v+dv) - F_{X,Y}(u,v)}{F_Y(v+dv) - F_Y(v)} =$$

$$= \frac{\dfrac{F_{X,Y}(u,v+dv) - F_{X,Y}(u,v)}{dv}}{\dfrac{F_Y(v+dv) - F_Y(v)}{dv}} = \frac{\dfrac{\partial F_{X,Y}(u,v)}{\partial v}}{f_Y(v)}$$

Definíció: X-nek az Y-ra vett feltételes eloszlásfüggvénye:

$$F_{X|Y}(u|v) = \frac{\dfrac{\partial F_{X,Y}(u,v)}{\partial v}}{f_Y(v)}$$

Definíció:

$$\frac{\partial F_{X|Y}(u|v)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\dfrac{\partial F_{X,Y}(u,v)}{\partial v}}{f_Y(v)} = \frac{\dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(u,v)}{\partial v \partial u}}{f_Y(v)} = \frac{f_{X,Y}(u,v)}{f_Y(v)} = f_{X|Y}(u|v)$$

X-nek az Y-ra vett feltételes sűrűségfüggvénye.

Tétel:

a.) $f_{X|Y}(u|v) \ge 0$

b.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(u|v)\,du = 1 \quad \forall v\text{-re}$

Tétel:

$$EY = Eg(\underline{X}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\forall \underline{t} \in R_{\underline{X}}} g(\underline{t}) \cdot P(\underline{X} = \underline{t}) \\ \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} g(\underline{t}) \cdot f_{\underline{X}}(\underline{t})\, d\underline{t} \end{cases}$$

Speciális esetek:

a.) $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} EX_i \qquad /\text{folytonos esetben } \Sigma \to \int/$

b.) $g(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \Rightarrow E(\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n) = \alpha_1 EX_1 + \dots + \alpha_n EX_n$

c.) $n=2$, X_1, X_2 függetlenek $\Rightarrow E(X_1 X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$

d) $X_1, \dots, X_n$ teljesen függetlenek

$$E(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n) = EX_1 \cdot \ldots \cdot EX_n$$

Definíció: Ha X, Y függetlenek $\Rightarrow X+Y$ az X, Y vv. konvolúciója

$\boxed{\text{Diszkrét:}}$ X, Y diszkrét, ftlen vváltozók

$R_X, R_Y \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, $Z = X+Y$

$$P(Z=k) = \sum_{j=0}^{k} \underbrace{P(X=j) \cdot P(Y=k-j)}_{P(X=j \,\cdot\, Y=k-j)}$$

$\boxed{\text{Folytonos:}}$ X, Y folytonos, ftlen vváltozók

- $f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v) \cdot f_Y(u-v)\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-v) f_Y(v)\, dv$
- $F_{X+Y}(u) = P(X+Y<u) = \int_{-\infty}^{u} f_{X+Y}(t)\, dt = \iint_{Y<u-X} f_{X,Y}(s,r)\, dr\, ds =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{u-s} f_{X,Y}(s,r)\, dr\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) \int_{-\infty}^{u-s} f_Y(r)\, dr\, ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\, F_Y(u-s)\, ds$$

- $F'_{X+Y}(u) = f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\, F'_Y(u-s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) \cdot f_Y(u-s)\, ds$

Definíció: Az X, Y vv.-k kovarianciáján az $(X-EX)(Y-EY)$ vv. várható értékét értjük. Azaz $\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)]$

$\boxed{\text{D:}}$ $\mathrm{cov}(X,Y) = \sum_{\forall x_i} \sum_{\forall y_j} (x_i - EX)(y_j - EY) \cdot P(X=x_i, Y=y_j)$

$\boxed{\text{F:}}$ $\mathrm{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-EX)(y-EY) \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$

Tétel: Ha X, Y függetlenek $\Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

Definíció: X, Y korrelálatlanok, ha $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$

Tétel: (Kovariancia tulajdonságok)

a) $cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - EXEY$

b) $\sigma^2(X\pm Y) = \sigma^2 X + \sigma^2 Y \pm 2\cdot cov(X,Y)$

c) $|cov(X,Y)| \le \sigma X \cdot \sigma Y$

d) $cov(X,Y) = cov(Y,X)$

$cov(X,X) = \sigma^2 X$

e) $cov(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \cdot cov(X,Z) + \beta \cdot cov(Y,Z)$

Tétel: $R(X,Y) \in \{-1,1\} \iff \exists a,b \in \mathbb{R}$, $P(Y = aX + b) = 1$ és

$\operatorname{sign} R(X,Y) = \operatorname{sign} a$

Definíció: $\underline{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$, $\underline{\underline{\Sigma}} = (\sigma_{ij})$, $\sigma_{ij} = cov(X_i X_j)$ $_{i=1,\dots,p,\ j=1,\dots,p}$

$\sigma_{ii} = \sigma^2 X_i$

$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^T$ kovarianciamátrix

$\underline{a}^T \underline{\underline{\Sigma}}\, \underline{a} \ge 0$, $\forall \underline{a} \in \mathbb{R}^p \Rightarrow \underline{\underline{\Sigma}}$ pozitív szemidefinit

$\Downarrow$

determináns ≥ 0

Tétel: Ha $X, Y \in N_2$, akkor X, Y függetlenek $\iff \varrho = 0$

(azaz korrelálatlanok)

Tétel: $X \in N(m_1, \sigma_1)$, $Y \in N(m_2, \sigma_2)$, függetlenek

$\Rightarrow (X+Y) \in N\left(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$

Lemma: $X_1, X_2 \in E(\lambda)$ függetlenek $\Rightarrow f_{X_1+X_2}(t) = \lambda^2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

Lemma: $f_{\sum_{i=1}^{k} X_i} = \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda t}$

Definíció: Az $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ vv-k Markov-láncot alkotnak, ha a (közös értékkészlet) $R_X \subseteq \mathbb{Z}$ és $\forall i, j_0, j_1, \dots, j_{n-1} \in R_X$ és $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1}$ időpontra $(t_j \in \mathbb{N})$

$$P(X_{t_n} = i \mid X_{t_0} = j_0, X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}) = P(X_{t_n} = i \mid X_{t_{n-1}} = j_{n-1})$$

Definíció, Legyen $\{X_n, n \geq 0\}$ Markov-lánc, $P(X_n = i \mid X_0 = j) = p_{ji}^{(n)}$

↳ az n-lépéses átmenetvalószínűség

- $p_{ji}^{(1)} = p_{ji} = P(X_1 = i \mid X_0 = j)$ egylépéses átmenetvalószínűség
- $P(X_0 = i) = q_i^{(0)}$ kezdeti eloszlás
- $P(X_n = i) = q_i^{(n)}$ az n-edik pillanathoz tartozó abszolút eloszlás
- $\lim_{n \to \infty} q_i^{(n)} = q_i^{(\infty)}$ stacionárius eloszlás

Tétel:

$$\underline{\underline{\Pi}} = (p_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots \\ j=1,2,\dots}}, \quad \underline{q}^{(0)} = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots), \quad \underline{\underline{\Pi}}^{(n)} = ((p_{ij})^{(n)}) = \underline{\underline{\Pi}}^{(n)} \dots)$$

$$q_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(n)} \cdot p_k^{(n)} \Leftarrow \underline{q}^{(n)} = \underline{q}^{(0)} \cdot \underline{\underline{\Pi}}^{(n)}$$

↳ $P(X_0 = k) \cdot P(X_n = i \mid X_0 = k)$

Definíció: Az Y X-re vett regressziója az $E(Y \mid X) = r(X)$ diszkrét vv.

$$R_{E(Y|X)} = \{E(Y \mid X = x_i), x_i \in R_X\}$$

$$P(E(Y \mid X) = E(Y \mid X = x_i)) = P(X = x_i), \quad x_i \in R_X$$

Tétel: ($E(Y \mid X)$ tulajdonságai)

a) $E(E(Y \mid X)) = E(r(X)) = EY$

b) X, Y függetlenek $\Rightarrow E(Y \mid X) = EY$

c) $E(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \mid X) = \alpha_1 E(Y_1 \mid X) + \alpha_2 \cdot E(Y_2 \mid X)$

d.) $E(Y \cdot f(X) | X) = f(X) \cdot E(Y|X)$

e) $E(Y - E(Y|X))^2 \leq E(Y - f(X))^2 \quad \forall f$-re

Definíció: $E(Y - (aX+b))^2 \longrightarrow \min_{\forall a,b} = E(Y - (a^*X + b^*))^2$

$\ell(X) = a^*X + b^*$ Y-nak az X-re vett lineáris regressziója

Tétel: $a^* = R(X,Y)\dfrac{\sigma Y}{\sigma X}$; $b^* = EY - a^*EX$

$\dfrac{cov(X,Y)}{\sigma^2 X}$

Tétel. (Csebisev NSZT)

Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, $\exists \sigma^2 X_i$, $Y_1 = X_1$, $Y_2 = \dfrac{X_1+X_2}{2}$, ..., $Y_n = \dfrac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i, \dots$,

X_i-k azonos eloszlásúak, $cov(X_i, Y_j) = 0$ $(i \neq j)$, $\sigma^2 X_i = D^2$, akkor

$P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $m = EX_i$, $\forall \varepsilon > 0$.

Tétel (Bernoulli-féle változat)

K, $A \in \mathcal{F}$, $p = P(A)$, $X_i = \begin{cases} 1 & \text{, ha } A \text{ bekövetkezett az } i \text{ végrehajtás során} \\ 0 & \text{, ha } \bar{A} \quad \text{— " —} \end{cases}$

X_i-k függetlenek, azonos eloszlásúak, véges szórásúak

$\sigma^2 X_i = p(1-p)$, $EX_i = p$, $Y_n = \dfrac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i = r_n(A)$ /relatív gyakoriság/

Akkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén $P(|r(A) - P(A)| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Tétel: (Kolgomorov-féle erős tétel)

Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, $\exists EX_i = m$, $\exists \sigma^2 X_i = D_i^2$, $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{D_i^2}{i^2} < \infty$,

X_i-k teljesen függetlenek, $Y_1 = X_1$, $Y_2 = \dfrac{X_1+X_2}{2}$, ..., $Y_n = \dfrac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i$, ..., akkor

$P(\lim_{n\to\infty} Y_n = m) = 1$

Tétel: (Borel)

$$P\left(\lim r_n(A) = P(A)\right) = 1$$

Tétel: (Centrális határeloszlás tétele)

Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ azonos eloszlású, teljesen függetlenek, $\exists\, \sigma^2 X_i = D^2$,

$\exists\, EX_i = m$, $Y_1 = X_1$, $Y_2 = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$, $\dots$, $Y_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\tilde{Y}_n = \dfrac{Y_n - EY_n}{\sigma Y_n} = \dfrac{Y_n - m}{D} \cdot \sqrt{n}$,

akkor $F_{\tilde{Y}_n}(t) = P\left(\tilde{Y}_n < t\right) \longrightarrow \Phi(t)$, $n \to \infty$, $\forall t$-re

Tétel: (Moivre - Laplace - Gauss tétel)

K, $A \in \mathcal{F}$, $p = P(A)$, végrehajtunk egy végtelen Bernoulli - kísérletsorozatot,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{, ha } A \text{ bekövetkezik az } i\text{-edikre} \\ 0 & \text{, ha } \bar{A} \quad \text{— " —} \end{cases}, \quad X_i \in B(1,p),\ EX_i = p,\ \sigma^2 X_i = p(1-p)$$

$$\tilde{Y}_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p}{p(1-p)} \sqrt{n} = \frac{r_n(A) - P(A)}{P(A)\left(1 - P(A)\right)} \cdot \sqrt{n},$$

akkor $F_{\tilde{Y}_n}(t) = P\left(\dfrac{r_n(A) - P(A)}{\sqrt{P(A)\left(1-P(A)\right)}} \cdot \sqrt{n} < t\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$, $\forall t$-re

$n \cdot Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \in B(n,p)$, $\quad P\left(\dfrac{Y_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{n} < t\right) = P\left(Y_n < \sqrt{p(1-p)} \cdot t \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}} + p\right) =$

$$= P\Big(\underbrace{n \cdot Y_n}_{B(n,p)} < \sqrt{n \cdot p(1-p)} \cdot t + n \cdot p\Big) = \sum_{i < \sqrt{npq}\cdot t + np} P\left(B(n,p) = i\right) = \sum_{\frac{i-np}{\sqrt{npq}} < t} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i} \xrightarrow[\infty]{n} \Phi(t)$$

Valószínűségszámítás | 2009.-2010

Eloszlások össz.

Diszkrét esetek:

(1.) Binomiális - eloszlás

$$P(X=i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \quad , \quad i=0,1,\dots,n \quad , \quad EX = n\cdot p \; , \; \sigma X = \sqrt{n\cdot p\cdot q}$$

(2.) Poisson - eloszlás

$$P(X=i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \quad , \quad i \in R_x \quad , \quad EX = \lambda \; , \; \sigma X = \sqrt{\lambda}$$

(3.) Geometriai - eloszlás

$$P(X=i) = P(\underbrace{\bar{A} \dots \bar{A}}_{i-1} \cdot A) = (1-p)^{i-1} \cdot p \quad , \quad i = \cancel{0}, 1, 2, \dots \quad , \quad EX = \frac{1}{p} \; , \; \sigma X = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

(4.) Polinomiális - eloszlás

$$P(X_1 = l_1, X_2 = l_2, \dots, X_k = l_k) = \frac{n!}{l_1!\, l_2! \dots l_k!} \cdot p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_k^{l_k} \quad , \quad 0 \le l_i \le n \; , \; \sum_{\forall i} l_i = n$$

Folytonos esetek:

(1.) Egyenletes eloszlás

$$f_X(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , u \in (a,b) \\ 0 & , u \notin (a,b) \end{cases} \quad , \quad F_X(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & , t \in [a,b] \\ 1 & , t > b \end{cases} \quad , \quad EX = \frac{a+b}{2} \; , \; \sigma X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

(2.) Exponenciális - eloszlás

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & , t > 0 \\ 0 & , t \le 0 \end{cases} \quad , \quad F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & , t > 0 \\ 0 & , t \le 0 \end{cases} \quad , \quad EX = \frac{1}{\lambda} \; , \; \sigma X = \frac{1}{\lambda}$$

3. Normális - eloszlás

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \quad , t \in \mathbb{R}$$

$$F_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right) du = \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^{u} \varphi(x)\, dx$$

$$EX = m$$
$$\sigma X = \sigma$$

4. 2D-s normális - eloszlás

$$f_{X_1 X_2}(u, v) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)} \cdot \left(\frac{(u-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho \cdot \frac{(u-m_1)(v-m_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(v-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)$$

$u, v \in \mathbb{R}$

$$\varrho = R(X_1, X_2)$$