A számítástudomány alapjai

1. ppZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. A Cayley egyetem kombinatorika-kertészet szakának első 3 félévében összesen 18 tárgyat kell elvégezni, minden félévben hatot. Az előtanulmányi rend szerint a *Fák* tárgyat a *Feszítőfák* tárgynál előbb kell felvenni, más megkötés nincs. Hányféleképp lehet felvenni a tárgyakat az egyes félévekben, feltéve, hogy minden felvett tárgyat már az adott félévben sikeresen teljesítenek a hallgatók?

   Ha tudjuk, hogy a „Fák” ill. a „Feszítőfák” tárgyat melyik két félévben veszi fel egy hallgató, akkor a nyilván az korábbi félévben kell felvennie az előbbi, a későbbiben pedig az utóbbi tárgyat. (1 pont)
   E két félévet $\binom{3}{2} = 3$-féleképp választhatjuk. (2 pont)
   Ha már tudjuk, hogy melyik két félévről van szó, akkor a maradék 16 tárgyat kell a 3 félévre beosztani, úgy hogy arra a félévre, amikorra a fenti tárgyak egyikét sem vette fel, 6 tárgy jusson, a „Fák”-at hallgatott félévre 5, a „Feszítőfák”-at tartalmazóra pedig szintén további 5 tárgy kerüljön. (3 pont)
   A 6 tárgy felvételére $\binom{16}{6}$ lehetőség van, a maradék tárgyakból az 5-öt $\binom{10}{5}$-féleképp lehet kiválasztani, a megmaradó 5 tárgy pedig a feszítőfákkal együtt szerepel. (3 pont)
   A választásaink függetlenek, ezért a válasz $3 \cdot \binom{16}{6}\binom{10}{5} = 3 \cdot \frac{16!}{10! \cdot 6!} \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 3 \cdot \frac{16!}{6! \cdot 5!^2}$. (1 pont)

2. Mutassuk meg, hogy bármely véges G gráfnak legalább $|V(G)| - |E(G)|$ komponense van.

   Tegyük fel, hogy a G gráfnak k komponense van, rendre $n_1, n_2, \ldots, n_k$ csúccsal. (2 pont)
   Mindegyik komponens tartalmaz egy-egy feszítőfát, (2 pont)
   és minden feszítőfának eggyel kevesebb éle van, mint az adott komponens mérete. (2 pont)
   Ezek szerint G éleinek számára azt kapjuk, hogy $|E(G)| \geq n_1 - 1 + n_2 - 1 + \ldots + n_k - 1 = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k = |V(G)| - k$. (3 pont)
   Innen a feladat állítása közvetlenül adódik. (1 pont)

   Persze másképp is érvelhetünk.

   Ha G-nek egy élét elhagyjuk, attól legfeljebb eggyel nő a gráf komponenseinek száma. (3 pont)
   Ha G minden élét elhagyjuk, akkor a komponensek száma az eredeti k-ról $|V(G)|$-re növekszik, hiszen minden pont izolált lesz. (3 pont)
   Ezek szerint $k + |E(G)| \geq |V(G)|$, (3 pont)
   és ebből átrendezéssel a feladat állítását kapjuk: $k \geq |V(G) - |E(G)|$. (1 pont)

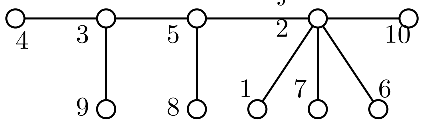
3. A G gráfot úgy kapjuk, hogy az $1, 2, \ldots$ csúcscímkékkel ellátott teljes gráfban párhuzamos élekként megkettőzzük a $(2, 3, 2, 2, 5, 3, 5, 2)$ Prüfer-kódú F feszítőfa éleit. Van-e G-nek Euler-körsétája?

   A G gráfot úgy kapjuk, hogy egy teljes (így öf) gráfba további éleket húzunk be, így G mindenféleképp öf lesz. (1 pont)
   Az órán tanult tétel szerint tehát G-nek pontosan akkor van Euler-körsétája, ha minden csúcsának páros a fokszáma. (3 pont)
   Mivel a Prüfer-kód hossza 8, ezért G-nek 10 csúcsa van. (1 pont)
   A K_{10} gráfban minden pont foka 9, ezért G-ben pontosan akkor lesz minden pont foka páros, ha F minden csúcsának a foka páratlan. (2 pont)
   Tanultuk, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, a fokszámánál, (1 pont)
   márpedig a konkrét Prüfer-kódban minden csúcs ps sokszor szerepel (a 0 is ps szám). (1 pont)
   Tehát F-ben minden fok ptn, így G-ben minden fok ps, vagyis van Euler-körséta G-ben. (1 pont)

   Lehet persze favágással is.

Az órán tanultak szerint megkonstruáljuk a kérdéses F fát a Prüfer-kódjából. F-nek 10 pontja van, hisz a kód hossza 8. A táblázat felső sora a letörölt leveleket mutatja:

1	4	6	7	8	9	3	5	2
2	3	2	2	5	3	5	2	10



(5 pont)

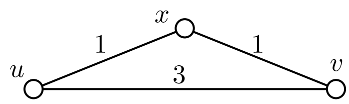
Ha F csúcsaira még egy teljes gráfot illesztünk, akkor az így kapott gráf öf marad, (1 pont)
és minden csúcsának a foka ps lesz, hisz F-ben is és K_{10}-ben is minden csúcs foka páratlan. (1 pont)
Az órán tanult tétel szerint tehát G-nek van Euler-körsétája. (3 pont)

4. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 20 csúcsa van és G 10-szeresen élösszefüggő. Mutassuk meg, hogy G-nek van Hamilton köre.

   Ha G 10-élöf, akkor minden csúcsának legalább 10 a foka, hiszen ellenkező esetben a minimális fokú csúcsból induló legfeljebb 9 él elhagyásától G szétesne. (4 pont)
   A Dirac tétel szerint ha egy n csúcsú gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-ben van Hamilton kör. (4 pont)
   Ez a tulajdonság fennáll a feladatbeli G gráfra $n = 20$-ra, tehát a Dirac tétel szerint annak van Hamilton köre, és nekünk pontosan ezt kellett bizonyítanunk. (2 pont)

5. Adott egy G gráf, az e él hosszát jelölje $l(e)$. Minden él hosszát növeljük meg 2-vel, azaz legyen $l'(e) = l(e) + 2$ minden élre. Tegyük fel, hogy u és v között P egy legrövidebb út az l' élhosszokkal. Igaz-e, hogy P biztosan egy legrövidebb út u és v között az l élhosszokra nézve is?

   A válasz az, hogy általában nem igaz, hogy minden élhosszt egyformán növelve bármely legrövidebb uv út legrövidebb marad az új hosszokkal is. (1 pont)
   Ennek igazolására elegendő egy ellenpéldát mutatni, azaz egy olyan élhosszokkal ellátott gráfot és abban egy legrövidebb uv utat, ami nem lesz legrövidebb az élhossznövelések után. (3 pont)
   Az ábrán látható gráf ilyen: eredetileg az uxv út hossza 2, a közvetlen uv él hossza pedig 3, tehát uxv az egyedüli legrövidebb uv út. Az élhosszok növelése után az uxv hossza 6 lesz, míg az uv élé 5, tehát uxv nem marad legrövidebb út. (6 pont)



6. Határozzuk meg a mellékelt hálózatban a maximális st-folyam nagyságát, és igazoljuk is, hogy ennél nagyobb st-folyam nem létezik.

   A javító utak módszerével meghatároztunk egy 15 nagyságú folyamot az ábrán látható módon. (a kisebben szedett számok a folyam által felvett értékeket jelentik az adott élen.) (6 pont)
   Az X-szel jelölt ponthalmaz által meghatározott st-vágás kapacitása is éppen 15, tehát ennél nagyobb st-folyam nem lehetséges. (4 pont)