

1. Elemi valószínűségszámítás

- 1.1 **(2 pont)** Elgurítunk egy piros dobókockát, és a dobott számot X -szel jelöljük. Ezután elgurítunk X darab zöld dobókockát, és Y -nal jelöljük a zöld kockákkal dobott számok *összegét*. Mennyi Y várható értéke?

Megoldás:

Jelöljük m -mel egyetlen kockadobás eredményének várható értékét, vagyis $m = \frac{7}{2}$. A teljes várható érték tétel szerint

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y &= \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X = k) \mathbb{E}(Y|X = k) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X = k) [km] = \\ &= \left[\sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X = k) \cdot k \right] m = m \cdot m = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4} = 12.25\end{aligned}$$

- 1.2 **(2 pont)** Legyen $\lambda > 0$ rögzített. $n = 1, 2, 3 \dots$ -re legyen $p_n = \frac{\lambda}{n}$, és legyen az X_n valószínűségi változó eloszlása $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$. Rögzített $k \in \mathbb{N}$ -re számoljuk ki a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k)$$

határértéket!

(*Tipp:* $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$.)

Megoldás:

Lényeg, hogy $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Mivel az $n \rightarrow \infty$ eset érdekel, feltéhetjük, hogy $n > k$. Így

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

előre hozzuk, ami
látványosan nem
függ n -től

$$\frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ db}}} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k =$$

Van egy csomó
lényegő, ami
1-hez tart

$$\frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(\frac{n}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{n-2}{n}\right) \dots \left(\frac{n-k+1}{n}\right)}_{\substack{\text{mindegyik 1-hez tart és} \\ \text{(rögzített) sokan vannak}}} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \rightarrow$$

↑ $e^{-\lambda}$

at alap 1-hez tart, a kitevő fix

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{k \text{ db}} e^{-\lambda} 1^k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Hát persze: nagy n -re (és rögzített k -ra) és kicsi p -re a binomiális eloszlás Poissonnal közelíthető

2. Diszkrét idejű Markov láncok

2.1 (5 pont) Jancsi és Juliska randit beszélt meg a Kököjszi utca és a Boborján utca kereszteződéséhez. Azt azonban nem beszélték meg, hogy a négy sarok közül melyiken találkozzanak. Jancsi pontban 11 órakor érkezik az északnyugati sarokhoz, majd keresni kezdi Juliskát. A négy gyalogos-lámpa percenként egyszer, egyszerre vált zöldre. Ilyenkor Jancsi $\frac{1}{4}$ valószínűséggel marad, ahol volt, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel órajárás-irányba megy át a zebrán, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig órajárással ellentétes irányban. Eközben Juliska órát késik, így Jancsi hosszasan bolyong a négy sarok között. Jelölje X_n Jancsi helyét (vagyis hogy melyik sarkon áll) n perc elteltével.

- (a) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és átmenet-valószínűség-mátrixát.
- (b) Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsi két perc elteltével ugyanott van, mint a legelején?
- (c) Egy óra elteltével megközelítőleg mekkora valószínűséggel találjuk Jancsit a délkeleti sarkon?
- (d) A magas házak árnyékot vetnek a délkeleti és a délnyugati sarokra, az északkeleti és az északnyugati sarok viszont napos. Hosszú távon az idő hány százalékát tölti Jancsi napon?

Megoldás:

- (a) Az állapottér legyen $S = 1, 2, 3, 4$, és számozzuk a sarkokat az északnyugatitól kezdve, órajárással ellentétes irányban. Így az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

- (b)

$$(P^2)_{11} = (1/4 \quad 1/2 \quad 0 \quad 1/4) \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16},$$

amit persze úgy is el lehet mondani, hogy $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ valószínűséggel marad végig ahol volt, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ valószínűséggel elmegy órajárási irányba aztán visszajön, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig fordítva.

- (c) Egy óra hosszú idő, közelítsünk a stacionárius eloszlással, vagyis oldjuk meg a $(P^T - I)\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer. **A transzponálás nagyon fontos.** Az egyenletrendszer mátrixos alakban, az áttekinthetőség kedvéért néggyel végigszorozva:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Innentől

- i.) Szabad megsejteni, hogy szimmetria-okból a stacionárius eloszlás az egyenletes, aztán leellenőrizni, hogy a $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{1}{4}$ tényleg kielégíti az egyenletrendszer, *vagy*

- ii.) szabad észrevenni, hogy az eredeti P mátrixnak nem csak a sorösszegei nullák, hanem az oszlopösszegei is, majd hivatkozni az előadásra, miszerint ilyenkor a stacionárius eloszlás egyenletes (ehhez igazából fel se kell írni az egyenletrendszert), *vagy*
- iii.) szabad megoldani az egyenletrendszert.

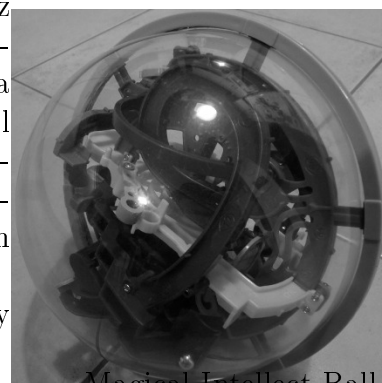
Mindenképpen arra jutunk, hogy $\pi = (\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4})$. A feladat kérdésére a válasz $\pi_3 = \frac{1}{4}$.

- (d) Legyen $f : S \rightarrow \{0; 1\}$ a napon levés indikátorfüggvénye, vagyis

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \text{ vagy } x = 4, \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga hosszú távon $\sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi_1 + \pi_4 = \frac{1}{2}$.

- 2.2 (5 pont) Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a második $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik”, és Móricka kezdheti az egészet előlről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről. Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei 0, 1, 2, 3.



Magical Intellect Ball

- a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát.
- b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal?
- c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbbször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon?

Megoldás:

- a.) Az $S = \{0, 1, 2, 3\}$ állapottérrel

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b.) Keressük a π stacionárius eloszlást, amihez megoldjuk a $(P - I)^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

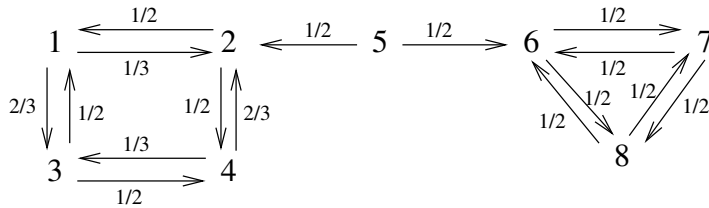
Ennek megoldása az $\sum_{i \in S} \pi_i$ normálási feltételt is figyelembe véve

$$\pi = \left(\frac{4}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{1}{10} \right),$$

vagyis a Markov lánc a 0 állapotban van legtöbbször (hát persze), és pedig az ergodtétel értelmében hosszú távon a lépések $\frac{4}{10}$ -ében. (A lánc irreducibilis és aperiodikus, az ergodtételt az egyes állapotok indikátorfüggvényeire alkalmazhatjuk.)

- c.) A lépések $\frac{4}{10}$ -ében próbálkozik Mórnicka az 1-es akadállyal, ezen belül mindig $\frac{1}{4}$ valószínűséggel bukik el, vagyis a lépések $\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ -ében éppen az 1-es akadályt bukja. Hasonlóan a 2-es és 3-as akadályt is a lépések $\frac{1}{10}$ -ében bukja, vagyis **hosszú távon mindhárom akadályon ugyanannyiszor, az összes bukás $\frac{1}{3}$ -ában bukik.**

2.3 (3 pont) Legyen az X_n diszkrét idejű Markov lánc gráf-reprezentációja a következő:



Adjuk meg közelítőleg az alábbi valószínűségeket. A válaszokat indokoljuk.

- $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 6) \approx ?$
- $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 1) \approx ?$
- $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 6) \approx ?$
- $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 5) \approx ?$

Megoldás: A Markov lánc NEM irreducibilis. Három osztálya közül kettő zárt: a $C_1 := \{1, 2, 3, 4\}$ osztály periódusa 2, a $C_2 := \{6, 7, 8\}$ osztály pedig aperiodikus, mert pl. 6-ból 6-ba vissza lehet jutni 2 és 3 lépésben is. Így

- $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 6) \approx \frac{1}{3}$, mert 6-ból indulva örökre bent maradunk a C_2 osztályban. A Markov lánc ide megszorítva irreducibilis és aperiodikus, így a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével az eloszlás a stacionáriussal közelíthető. A C_2 irreducibilis komponensen a(z egyetlen) π stacionárius eloszlás szimmetria okból az egyenletes, így $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 6) \approx \pi_7 = \frac{1}{3}$.
- $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 1) = 0$, mert 1-ből indulva örökre bent maradunk a C_2 osztályban, ez viszont periodikus 2 periódussal, így páros sok lépésben csak 1-be és 3-ba juthatunk el.
- $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 6) = 0$, mert 6-ból indulva örökre bent maradunk a C_2 osztályban, vagyis 2-be nem lehet eljutni.
- $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 5) \approx \frac{1}{6}$, mert 5-ből indulva $\frac{1}{2}$ valószínűséggel az első lépésben a C_1 osztályba lépünk és ott is ragadunk, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel viszont a C_2 -be, és innen kezdve az a.) pont szerinti $\frac{1}{3}$ az esélyünk hosszú idő alatt 7-be érkezni.

2.4 (5 pont)

Juliska a körmet minden nap más színűre festi. Vörös, narancs és barna között váltogat. Narancs után mindig barna következik, barna után viszont érmedobással dönt arról, hogy vörös vagy narancs következzen-e. Vörös után kockát dob: ha az eredmény 6-os, akkor barna következik, egyébként narancs.

- a.) Írjuk fel Juliska körme színének, mint Markov láncnak az átmenetmátrixát!
- b.) Ha Juliska körme május 1-én vörös, mennyi a valószínűsége, hogy május 5-én is vörös?
- c.) A napok hanyad részében lesz vörös, narancs illetve barna Juliska körme hosszú távon?

Megoldás:

- a.) Jelöljük az állapotokat számokkal, mondjuk 1: vörös; 2: narancs; 3: barna. Így az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- b.) Jelöljük a Markov láncot X_n -nel. Ha mondjuk május 1-e a nulladik nap, akkor május 5-e a negyedik, vagyis a kérdés $\mathbb{P}(X_4 = 1 | X_0 = 1) = ?$ Ez a P^4 mátrix $(1, 1)$ eleme: $\mathbb{P}(X_4 = 1 | X_0 = 1) = P_{11}^4$. Ezt kiszámolhatjuk mondjuk úgy, hogy $P^4 = (P^2)^2$, Ebből persze nem kell minden elemet kiszámolni - ami nem kell, *-gal jelölöm:

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad P^4 = \begin{pmatrix} \frac{7}{144} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Ebből $\mathbb{P}(X_4 = 1 | X_0 = 1) = P_{11}^4 = \frac{7}{144} \approx 0.048611$.

- c.) Az ergodtételt fogjuk használni, ehhez szükség van a Markov lánc stacionárius eloszlására. (Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, pontosan egy stacionárius eloszlása van.) Meg kell oldanunk a $(P^T - I)\pi^T$ homogén lineáris egyenletrendszer. A szokásos mátrix-jelöléssel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{6} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

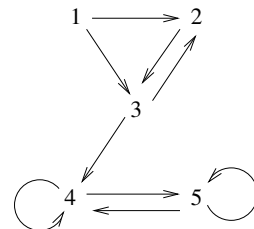
Ennek egy lehetséges megoldása pl. $\tilde{\pi} = (6 \ 11 \ 12)$, egyetlen normált megoldása pedig

$$\pi = \left(\frac{6}{29} \quad \frac{11}{29} \quad \frac{12}{29} \right) \approx (0.20690 \quad 0.37931 \quad 0.41379).$$

Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtételt az egyes állapotok indikátoraira alkalmazva azt kapjuk, hogy az i állapotban hosszú távon az idő π_i hányadát tölti. Vagyis Juliska körme az idő $\pi_1 \approx 20.7\%$ -ában vörös, $\pi_2 \approx 37.9\%$ -ában narancs és $\pi_3 \approx 41.4\%$ -ában barna.

- 2.5 (3 pont) Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egy lépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk meg, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.



Megoldás:

osztály	zárttság	lényegesség	visszatérés	periódus
$\{1\}$	nyílt	lényegtelen	átmeneti	∞ , vagy nincs
$\{2; 3\}$	nyílt	lényegtelen	átmeneti	2
$\{4; 5\}$	zárt	lényeges	visszatérő	1, aperiodikus

Érdemes megjegyezni, hogy az $\{1\}$ egy tisztességes egyelemű osztály: önmagával definíció szerint minden állapot kommunikál, még akkor is, ha pozitív lépésszámban nem lehet oda önmagából (sem) visszajutni. Másképp mondva: az $i \rightsquigarrow j$ reláció („ i kommunikál j -vel”) egy rendes ekvivalencia, és a belőle adódó osztályozásnak az állapottér minden elemét le kell fedni. Az más kérdés, hogy az $\{1\}$ osztály periódusa problémás: az üreshalmaz legnagyobb közös osztója, ami ízlés szerint lehet ∞ , vagy nem definiált.

3. Generátorfüggvény-módszer

- 3.1 (5 pont) Móricka addig dobál egy szabályos dobókockát, amíg kétszer *egymás után* ki nem jön neki a 6-os. Határozzuk meg a szükséges dobások X számának generátorfüggvényét és várható értékét. (Segítség: Nézzünk X -re mint véletlen tagszámú összegre: legyen N az a véletlen szám, hogy hányszor kiált fel Móricka, hogy „Na, egy hatos már megvan!”. Így az X előáll mint N darab véletlen szám összege: az i -edik felkiáltáshoz Y_i darab dobás tartozik. Vigyázat: jól gondolkodjunk el Y_i eloszlásán. Figyelmeztetésül mondom, hogy minden $Y_i \geq 2$, mert dobni kell egy 6-ost, aztán még valamit, hogy eldőljön, vége-e a játéknak.)

1. megoldás, a segítség szerint:

Móricka egy „kísérlete” álljon azokból a dobásokból, amíg sikerül neki egy 6-ost dobni, és még az azt követő dobásból. Ha ez az utolsó dobás 6-os, akkor vége, ha pedig nem 6-os, akkor jön a következő kísérlet. Jelölje Y_i az i -edik kísérlet hosszát. Így

$$X = \sum_{i=1}^N Y_i,$$

Y_i pedig 1-gyel több, mint a hatos megdobásához szükséges dobások száma, vagyis $Y_i = Z_i + 1$, ahol Z_i geometriai eloszlású $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel (hagyományos optimista geometriai eloszlás), és $\{Z_1, Z_2, \dots\}$ függetlenek egymástól és N -től is.

A Z_i -k generátorfüggvénye

$$g_Z(z) = \frac{\frac{1}{6}z}{1 - \frac{5}{6}z} = \frac{z}{6 - 5z},$$

az Y_i -k generátorfüggvénye ennek z -szereése:

$$g_Y(z) = \frac{z^2}{6 - 5z}.$$

Az N maga is geometriai eloszlású $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel, így generátorfüggvénye

$$g_N(z) = g_Z(z) = \frac{z}{6 - 5z}.$$

A véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye

$$g_X(z) = g_N(g_Y(z)) = \frac{\frac{z^2}{6-5z}}{6 - 5\frac{z^2}{6-5z}} = \frac{z^2}{36 - 30z - 5z^2}.$$

A várható értéket számolhatnánk ennek deriválásával, de azt is tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}N\mathbb{E}Y_i = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} + 1 \right) = 6 \cdot 7 = 42.$$

2. megoldás, tök másképp (jobb, általánosítható megoldás):

Legyen g az X generátorfüggvénye, g_1 pedig a hátralévő dobások számának (X_1 -nek) a generátorfüggvénye akkor, ha a legutóbbi dobás 6-os volt, de az azelőtti nem. Ezek között keresünk összefüggéseket a teljes várható érték tétellel.

g -re felírunk egy teljes várható érték tételt aszerint, hogy mi az első dobás eredménye. Ha 6-ost dobunk, akkor még X_1 dobás van hátra, ha pedig mást, akkor kezdődik minden előlről:

$$\mathbb{E}(z^X) = \mathbb{P}(6)\mathbb{E}(z^X | 6) + \mathbb{P}(\text{más})\mathbb{E}(z^X | \text{más}) = \frac{1}{6}\mathbb{E}(z^{1+X_1}) + \frac{5}{6}\mathbb{E}(z^{1+X'}),$$

ahol X' azonos eloszlású X -szel. Így

$$g(z) = \frac{1}{6}zg_1(z) + \frac{5}{6}zg(z). \quad (1)$$

Ugyanígy felírjuk a teljes várható érték tételt g_1 -re is a soron következő dobás eredménye szerint. Ha 6-ost dobunk, akkor vége, ha pedig mást, akkor kezdődik minden előlről:

$$\mathbb{E}(z^{X_1}) = \mathbb{P}(6)\mathbb{E}(z^{X_1} | 6) + \mathbb{P}(\text{más})\mathbb{E}(z^{X_1} | \text{más}) = \frac{1}{6}\mathbb{E}(z^1) + \frac{5}{6}\mathbb{E}(z^{1+X'}),$$

vagyis

$$g_1(z) = \frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zg(z). \quad (2)$$

A (2) egyenletet (1)-be visszaírva

$$g(z) = \frac{1}{6}z \left[\frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zg(z) \right] + \frac{5}{6}zg(z),$$

amit megoldva

$$g(z) = \frac{\frac{1}{36}z^2}{1 - \frac{5}{6}z - \frac{5}{36}z^2} = \frac{z^2}{36 - 30z - 5z^2}.$$

A várható érték ennek deriválásával kapható meg:

$$g'(z) = \frac{72z - 30z^2}{(36 - 30z - 5z^2)^2}, \quad \text{így} \quad \mathbb{E}X = g'(1) = 42.$$

3.2 (2 pont) Az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3, \quad \text{ahol } c \in \mathbb{R}.$$

- (a) Mennyi c értéke?
- (b) Mennyi X várható értéke?
- (c) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 2)$ valószínűség?

Megoldás:

(a) Minden generátorfüggvényre igaz, hogy $g(1) = 1$, ezért

$$g(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1^2 + c \cdot 1^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + c = 1,$$

amiből $c = \frac{1}{8}$. Ebből

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3$$

(b) Mint mindig, $\mathbb{E}X = g'(1)$. Ehhez

$$g'(z) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2z + \frac{1}{8} \cdot 3z^2,$$

amiből

$$\mathbb{E}X = g'(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{11}{8} = 1.375.$$

(c) Mint mindig, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{g''(0)}{2!}$. Esetünkben $g''(0) = \frac{3}{4}$, amiből

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\frac{3}{4}}{2!} = \frac{3}{8}.$$

Alternatív megoldás: A generátorfüggvényből kiolvasható X eloszlása: $p_k := \mathbb{P}(X = k)$ jelöléssel

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3,$$

amiből $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{3}{8}$, $p_3 = c$, és a többi k -ra $p_k = 0$. Így persze

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ miatt $c = \frac{1}{8}$.

(b) $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{8}$.

(c) $\mathbb{P}(X = 2) = p_2 = \frac{3}{8}$.

3.3 (2 pont) Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = c(z + z^2 + z^4 + z^5 + z^8 + z^{11} + z^{13} + z^{15})$.

a.) Mennyi a c konstans értéke?

b.) Mennyi X várható értéke?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 8)$ valószínűség?

Megoldás:

a.) $g(1) = 1$ mindig, vagyis $c = \frac{1}{8}$.

b.) $\mathbb{E}X = g'(1) = \frac{1}{8}(1 + 2z + 4z^3 + 5z^4 + 8z^7 + 11z^{10} + 13z^{12} + 15z^{14})|_{z=1} = \frac{59}{8} = 7.375$.

Avagy: a $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ generátorfüggvényből leolvasható az X eloszlása:

k	1	2	4	5	8	11	13	15
$p_k = \mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

amiből szintén könnyen $\mathbb{E}X = \frac{1+2+4+5+8+11+13+15}{8} = \frac{59}{8} = 7.375$.

c.) $\mathbb{P}(X = 8) = p_8$ a z^8 együtthatója a $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ sorfejtésben, vagyis esetünkben $\mathbb{P}(X = 8) = \frac{1}{8}$.

3.4 (5 pont) Egy szabályos dobókockával addig dobálunk, amíg ki nem jön egy hatos. Jelölje X az *addig* dobott számok *összegét* (az utolsónak dobott hatost nem beleértve). Számoljuk ki

- a.) X generátorfüggvényét,
- b.) X várható értékét,
- c.) X szórását.

Megoldás:

Jelöljük N -nel a dobások számát, az utolsó 6-ost nem beleértve, vagyis $X \sim \text{Geom}(p = \frac{1}{6})$ (pesszimista). Így N generátorfüggvénye $g_N(z) = \frac{p}{1-qz} = \frac{1}{6-5z}$ (a szokásos $q = 1 - p$ jelöléssel).

A keresett Y egy *véletlen tagszámú összeg*, éppen N taggal: $X = \sum_{i=1}^N Y_i$, ahol $Y_1, Y_2, \dots$ függetlenek és azonos eloszlásúak, mégpedig egyenletes eloszlásúak az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon. (*Figyelem:* az Y_i -k tényleg az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon egyenletesek, és *nem* az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ -on, mert az Y_i eloszlása egy kockadobás eredményének *feltételes eloszlása* azon feltétel mellett, hogy az eredmény nem 6-os.)

Ezek szerint az Y_i -k generátorfüggvénye

$$g_Y(z) = \frac{z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5}{5} = \frac{1}{5} \frac{z - z^6}{1 - z},$$

így

- a.) a véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye $g_X = g_N \circ g_Y$, vagyis

$$g_X(z) = g_N(g_Y(z)) = \frac{1}{6 - (z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5)} = \frac{1}{6 - \frac{z - z^6}{1 - z}}.$$

- b.) A várható értéket számolhatnánk a generátorfüggvény deriválásával is, de előadásról azt is tudjuk, hogy a véletlen tagszámú összegre $\mathbb{E}X = \mathbb{E}N\mathbb{E}Y_i$. Esetünkben $\mathbb{E}N = \frac{1}{p} - 1 = 5$, $\mathbb{E}Y_i = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, vagyis $\mathbb{E}X = 5 \cdot 3 = 15$.
- c.) A szórást megintcsak számolhatnánk a generátorfüggvény deriváltjaiból, de előadásról azt is tudjuk, hogy $D^2X = D^2N(\mathbb{E}Y_i)^2 + \mathbb{E}ND^2Y_i$. Esetünkben $\mathbb{E}N = 5$, $\mathbb{E}Y_i = 3$, továbbá az eloszlástáblázat szerint $D^2N = \frac{q}{p^2} = 30$ és $D^2Y_i = \frac{5^2-1}{12} = 2$. Így $D^2X = 30 \cdot 3^2 + 5 \cdot 2 = 280$, $DX = \sqrt{280} \approx 16.73$.

3.5 (5 pont) Legye $N \sim \text{Geom}(p)$ és $X_1, X_2, \dots \sim \text{Geom}(q)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

Megoldás:

N generátorfüggvénye $g_N(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$

Az X_i -k generátorfüggvénye $g_X(z) = \frac{qz}{1-(1-q)z}$

tétel
volt $\Rightarrow \sum_N$ generátorfüggvénye

$$g_{\sum_N}(z) = g_N(g_X(z)) = \frac{p \frac{qz}{1-(1-q)z}}{1-(1-p)\frac{qz}{1-(1-q)z}} \quad \text{bővíttem}$$

$$= \frac{pqz}{1-(1-q)z-(1-p)qz} = \frac{pqz}{1-[1-q+q-pq]z}$$

amiből látjuk, hogy $\boxed{\sum_N \sim \text{Geom}(pq)}$

Hát persze: Mórda hamis dobókockáján a 6-os valószínűsége p , Pistikén pedig q . Addig dobálják a két kockát egyszerre, amíg ki nem jön a 6-os mindkettőn egyszerre.

Legyen N , hogy hányszor kiált fel ~~Mórda~~ Pistike, hogy "Nekem ~~van~~ megvan"! Legyen X_i az i -edik ilyen "rész-sikerhez" szükséges dobások száma. Látjuk, hogy $N \sim \text{Geom}(p)$ és $X_i \sim \text{Geom}(q)$ függetlenül, és a játék teljes hossza $\sum_N$.

3.6 (4 pont)

a.) Legyen $X \sim \text{PesszGeom}(p)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek

deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\text{Var}X$ szórásnégyzetet!

b.) Legyen $Y \equiv 1$. Mennyi $\mathbb{E}Y$? Mennyi $\text{Var}Y$?

c.) Legyen $Z = X + 1$, így $Z \sim \text{Geom}(p)$. Az összeg várható értékére és szórásnégyzetére vonatkozó tételek segítségével számoljuk ki az $\mathbb{E}Z$ várható értéket és a $\text{Var}Z$ szórásnégyzetet!

Megoldás:

$$a.) \quad k=0,1,2,\dots \text{ -re } P(X=k) = (1-p)^k p \stackrel{q:=1-p}{=} q^k p,$$

így X generátorfüggvénye

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p z^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qz)^k \stackrel{\text{mértani sor}}{=}$$

$$= p \frac{1}{1-qz} = \frac{p}{1-qz} = \frac{p}{1-(1-p)z}$$

$$\text{Ebből } g'_X(z) = \left[\frac{p}{1-qz} \right]' = \frac{p}{(1-qz)^2} (-q) = \frac{pq}{(1-qz)^2}$$

$$g''_X(z) = \left[\frac{pq}{(1-qz)^2} \right]' = -2pq(1-qz)^{-3} (-q) = \frac{2pq^2}{(1-qz)^3}$$

$$\Rightarrow g'_X(1) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} = \underline{\underline{\frac{1}{p} - 1}}$$

$$g''_X(1) = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2pq^2}{p^3} = \underline{\underline{\frac{2q^2}{p^2}}}$$

$$\text{Ebből } \boxed{\mathbb{E}X = g'_X(1) = \frac{q}{p} = \frac{1}{p} - 1}$$

$$\boxed{\text{Var} X = g''_X(1) + g'_X(1) - [g'_X(1)]^2} = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{2q^2 + qp - q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q^2 + qp}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \underline{\underline{\frac{q}{p^2}}}$$

b.) $EX=1$, $EX^2=1$, ebből $\text{Var } X=0$, hát persze.

c.) $\boxed{EZ = E(X+Y) = EX + EY = \left(\frac{1}{p} - 1\right) + 1 = \frac{1}{p}}$

$\boxed{\text{Var } Z = \text{Var}(X+Y) = \text{Var } X + \text{Var } Y, \quad \begin{array}{|l} \text{MERT } X \text{ ES } Y \\ \text{FÜGGETLENEK} \end{array}}$

$\boxed{= \frac{q}{p^2} + 0 = \frac{q}{p^2}}$

Hát persze: az $Y \equiv 1$ determinisztikus, így minden val. változótól független.

$\boxed{\text{Megj: Ez így könnyebb, mint } g_Z(z) = \frac{pz}{1-qz} \quad -t}$

$\boxed{\text{kétzer lederiválni.}}$

3.7 (4 pont) Legyen $X \sim \text{Poi}(\lambda)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az EX várható értéket és a $\text{Var } X$ szórásnégyzetet!

Megoldás:

$$P(X=k) = e^{-1} \frac{1^k}{k!} \quad k=0,1,2,\dots \text{re, ezért}$$

X generátorfüggvénye

$$\underline{\underline{g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1} \frac{1^k}{k!} z^k = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1z)^k}{k!} =$$

definíció szerint

$$\underline{\underline{e^{-1} e^{1z} = e^{1(z-1)}}}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\text{Ebből } g_X'(z) = 1 e^{1(z-1)} \Rightarrow g_X'(1) = 1$$

$$g_X''(z) = 1^2 e^{1(z-1)} \Rightarrow g_X''(1) = 1^2$$

$$\text{tehát } \boxed{EX = g_X'(1) = 1}$$

$$\boxed{Var X = g_X''(1) + g_X'(1) - [g_X'(1)]^2 = 1^2 + 1 - 1^2 = 1}$$

$$[\text{Amiből persze a szórási } \sqrt{Var X} = \sqrt{1}]$$

3.8 (4 pont) Legyen X és Y független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Tudjuk, hogy $X \sim Poi(2)$ és $X + Y \sim Poi(5)$. Mi Y eloszlása?

Megoldás:

Legyen $Z = X + Y$, és legyen X, Y, Z generátorfüggvénye
 rendre g_X, g_Y, g_Z .

Ezekről tudjuk, hogy

$$g_X(z) = e^{2(z-1)}, \text{ mert } X \sim \text{Poi}(2)$$

$$g_Z(z) = e^{5(z-1)}, \text{ mert } Z \sim \text{Poi}(5)$$

$$g_Z(z) = g_X(z) g_Y(z), \text{ mert } Z = X + Y \text{ és } X, Y \text{ függetlenek.}$$

$$\text{Ebből } g_Y(z) = \frac{g_Z(z)}{g_X(z)} = \frac{e^{5(z-1)}}{e^{2(z-1)}} = e^{3(z-1)},$$

ami ~~éppen~~ éppen a $\text{Poi}(3)$ eloszlás generátor-

$$\text{függvénye} \Rightarrow \boxed{Y \sim \text{Poi}(3)}$$

3.9 (5 pont) Legyenek $N \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{2})$ és $X_1, X_2, \dots \sim B(\frac{1}{3})$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{k=1}^N X_k$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

Megoldás:

$N \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{2})$, ezért N generátorfüggvénye

$$g_N(z) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)^{10} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)^{10}.$$

$X_1, X_2, \dots \sim B(\frac{1}{3})$, ezért a közös generátorfüggvényük

$$g_X(z) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}z.$$

Ebből a véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye

$$g_{S_N}(z) = g_N(g_X(z)) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}z\right]\right)^{10} = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}z\right)^{10},$$

ami éppen a $\text{Bin}(10, \frac{1}{6})$ eloszlás generátorfüggvénye,

$$\text{tehát } S_N \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{6}).$$

[Hát persze: 10-szor feldobunk egy szabályos érmét.
Amikor az eredmény „fej”, eldobunk egy szabályos
dobbkockát is, és megkérdezzük, hogy sikerül-e páros
számot dobni. $X_i := \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik kockadobás páros} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$

$N :=$ a dobott fejek száma.

[Így S_N a dobott páros számok száma, persze $\sim \text{Bin}(10, \frac{1}{6})$]

- 3.10 (7 pont) Van egy hamis 1-petákosunk, amin a fej valószínűsége p . Van egy hamis 2-petákosunk, amin a fej valószínűsége q . Egyszerre dobjuk fel mindkettőt, és ezt addig ismételgetjük, amíg a 2-petákoson ki nem jön a fej. Jelölje V azt, hogy ez alatt hányszor dobtunk fejet az 1-petákosossal.

- a.) Számoljuk ki V eloszlását! (Tipp: $V = \sum_{i=1}^N \xi_i$, ahol N a dobások száma, ξ_i pedig a i -edik alkalommal az 1-petákoson dobott fejek száma (ami persze 0 vagy 1.)) (Eredmény:

$$\mathbb{P}(V = k) = \begin{cases} A & , \text{ ha } k = 0 \\ (1 - A)L(1 - L)^{k-1} & , \text{ ha } k \geq 1 \end{cases}$$

ahol $A = \frac{q-qp}{p+q-qp}$ és $L = \frac{q}{p+q-qp}$.)

- b.) Számoljuk ki V eloszlásának „farkát”, vagyis a $\mathbb{P}(V \geq k)$ valószínűségeket! (Eredmény:

$$\mathbb{P}(V \geq k) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } k = 0 \\ (1 - A)(1 - L)^{k-1} & , \text{ ha } k \geq 1 \end{cases}.$$

)

Megoldás:

Legyen $N, S_1, S_2, \dots$ a feladat-beli tipp szerint.
 Ekkor persze $N \sim \text{Geom}(q)$, $S_1, S_2, \dots \sim B(p)$ és
 mind teljesen függetlenek, ezért $V = \sum_{i=1}^N S_i$ véletlen
 tagstámu összeg.

$$N \text{ generátorfüggvénye } g_N(z) = \frac{qz}{1 - (1-q)z}$$

$$S_1, S_2, \dots \text{ generátorfüggvénye } g_S(z) = 1 - p + pz$$

amiből V generátorfüggvénye

$$g_V(z) = g_N(g_S(z)) = \frac{q(1-p+pz)}{1 - (1-q)(1-p+pz)}$$

9.) V eloszlásának kiszámolásához $g_V(z)$ -t kell sorbafejteni.

Ehhez könnyebbség, hogy g_V hasonlít egy geometriai eloszlás generátorfüggvényéhez, aminek a sorfejtését deriválás nélkül is tudjuk (hiszen az együttvalók éppen a valószínűségek): írjuk hát $g_V(z) = A + Bz \frac{1}{1-Mz}$ alakba.

~~$$g_V(z) = \frac{q(1-p)}{1 - (1-q)(1-p+pz)} + \frac{qpz}{1 - (1-q)(1-p+pz)}$$~~

Persze $A = g_V(0) = \frac{q(1-p)}{1 - (1-q)(1-p)} = \frac{q - qp}{p + q - qp}$, ezt célzerű kiemelni:

becs, ez standardis leír!!

$$g_V(z) = \frac{q - qp}{p + q - qp} \cdot \frac{1 - \frac{p}{1-p} z}{1 - \frac{p(1-q)}{p + q - qp} z} = \frac{q - qp}{p + q - qp} \left[1 + \frac{\frac{p}{1-p} + \frac{p(1-q)}{p + q - qp}}{1 - \frac{p(1-q)}{p + q - qp} z} z \right]$$

$$= \frac{q - qp}{p + q - qp} + \frac{z}{1 - \frac{p - pq}{p + q - qp}} \cdot \frac{q(1-p)}{p + q - qp} p \left[\frac{1}{1-p} + \frac{1-q}{p + q - qp} \right]$$

$$= \frac{q - qp}{p + q - qp} + \frac{z}{1 - \frac{p - pq}{p + q - qp}} \cdot \frac{pq}{p + q - qp} \left[1 + \frac{(1-p)(1-q)}{p + q - qp} \right]$$

$$\frac{p + q - qp + 1 - p - q + qp}{p + q - qp} = \frac{1}{p + q - qp}$$

$$= \frac{q - qp}{p + q - qp} + \frac{pq}{(p + q - qp)^2} \cdot \frac{z}{1 - \frac{p - pq}{p + q - qp}}$$

Legyen $A = \frac{q - qp}{p + q - qp}$, $M = \frac{p - pq}{p + q - qp}$, $L = 1 - M = \frac{q}{p + q - qp}$,

így $1 - A = \frac{p}{p + q - qp}$, és ezekkel a jelölésekkel

$$g_V(z) = A + (1 - A)L \frac{z}{1 - Mz}$$

Innen a sorfejtés már könnyű:

$$\frac{1}{1 - Mz} = 1 + Mz + (Mz)^2 + (Mz)^3 + \dots$$

$$\Rightarrow g_V(z) = A + (1 - A)Lz + (1 - A)LMz^2 + (1 - A)LM^2z^3 + \dots$$

Vagyis

$$g_V(z) = A + \sum_{k=1}^{\infty} (1-A)L(1-L)^{k-1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} P(V=k) z^k$$

amiből

$$P(V=k) = \begin{cases} A, & \text{ha } k=0 \\ (1-A)L(1-L)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases}$$

$$\left[\text{Még egyszer: } A = \frac{q-qp}{p+q-qp}, \quad L = \frac{q}{p+q-qp} \right]$$

b.) Persze, ha $k=0$, akkor $P(V \geq k) = P(V \geq 0) = 1$.

Ha pedig $k \geq 1$, akkor

$$P(V \geq k) = \sum_{\ell=k}^{\infty} P(V=\ell) = \sum_{\ell=k}^{\infty} (1-A)L(1-L)^{\ell-1} \stackrel{M=1-L}{=}$$

$$= (1-A)L(1-L)^{k-1} \underbrace{\left(1 + M + M^2 + \dots \right)}_{\frac{1}{1-M} = \frac{1}{L}} = (1-A)(1-L)^{k-1}$$

vagyis

$$P(V \geq k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k=0 \\ (1-A)(1-L)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases}$$

3.11 (4 pont) Ha az $X \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó eloszlása $p_k := \mathbb{P}(X = k)$, akkor a generátorfüggvénye $g(z) := p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \dots$, amiből rögtön látszik, hogy $z \in (0, 1)$ -re $g(z)$ második deriváltja nemnegatív (meg persze az összes többi deriváltja is, de ez most nem fontos), vagyis $g(z)$ konvex a $[0, 1]$ intervallumon. Milyen legyen X eloszlása ahhoz, hogy $g(z)$ a $[0, 1]$ intervallumon ne csak konvex, hanem *szigorúan konvex* legyen? (Vagy fordítva: hogyan fordulhat az elő,

hogyan $g(z)$ konvex, de nem szigorúan konvex?)

Megoldás:

$$g(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 + \dots$$

$$g'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 + 4p_4 z^3 + \dots$$

$$g''(z) = 2p_2 + 3 \cdot 2 \cdot p_3 z + 4 \cdot 3 \cdot p_4 z^2 + \dots$$

Mivel $p_2, p_3, p_4, \dots \geq 0$, ezért $z > 0$ esetén $g''(z)$ csak úgy lehet nulla, ha $p_2 = p_3 = p_4 = \dots = 0$.

Vagyis p_0 és p_1 kivételével minden p_k -nek nullának kell lenni, hogy $g''(z) = 0$ lehessen.

~~A~~ Ezek pontosan akkor nullák, ha

X csak 0 vagy 1 lehet, vagyis Bernoulli eloszlás.

Röviden: $g(z)$ szigorúan konvex $[0, 1]$ -en, ha csak nem $X \sim B(p)$ valamilyen $p \in [0, 1]$ -re, mely esetben pontosan $g(z)$ lineáris vagy konstans.

4. Diszkrét idejű sorbanállási modellek

- 4.1 (5 pont) A $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$ várakozási idő evolúciós modell mintájára adjuk meg a D_n késleltetés evolúciós egyenletét ugyanabban a FIFO modellben! (Vagyis ahol az egyes igények érkezése között $T_1, T_2, T_3, \dots$ idők telnek el, az egyes igények kiszolgálása egyesével, érkezési sorrendben történik, a kiszolgálási idők $S_1, S_2, S_3, \dots$)

Megoldás:

Tudjuk, hogy $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$

A készletet $D_n = W_n + S_n$, így

$$D_{n+1} = W_{n+1} + S_{n+1} = \underbrace{(W_n + S_n - T_{n+1})_+}_{D_n} + S_{n+1}$$

Vagyis $D_{n+1} = (D_n - T_{n+1})_+ + S_{n+1}$

- 4.2 (5 pont) Egy könyvelő az asztalán lévő számlakupacból minden délelőtt feldolgoz valahány számlát, és pedig az n -edik nap délelőttjén V_n darabot (de legfeljebb annyit, amennyi van). Az iktatóból minden délután új számlák érkeznek a kupacra: az n -edik nap délutánján Y_n darab.

Jelölje $\hat{X}_n$ a számlakupac méretét az n -edik napon *délben*.

Írjuk fel $\hat{X}_n$ evolúciós egyenletét az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ egyenlet mintájára!

(Figyelem! Emlékezzünk, hogy X_n a számlakupac mérete volt az n -edik napon *éjfélkor*.)

Megoldás:

Az n -edik napon délelben a kupac mérete $\hat{X}_n$.

Ehhez délután jön még Y_n darab, így éjszakra a kupac mérete $\hat{X}_n + Y_n$.

Másnap délelőtt ebből feldolgoz V_{n+1} darabot (ha van annyi – persze a kupac mérete mínuszba nem mehet),

így délre marad ~~X_n~~ $\hat{X}_{n+1} = (\hat{X}_n + Y_n - V_{n+1})_+$

Alternatív megoldás: Tudjuk, hogy $X_n = \hat{X}_n + Y_n$

és $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$, amiből

$$\hat{X}_{n+1} + \cancel{Y_{n+1}} = (\hat{X}_n + Y_n - V_{n+1})_+ + \cancel{Y_{n+1}}$$

4.3 (9 pont) Pistike minden délelőtt tönkretesz egy játékautót a kisautós dobozából (már amikor van benne), amit az apukája azonnal kidob. Az anyukája minden délután érmedobással dönt arról, hogy elmenjen-e a játékboltba, ha pedig elmegy, akkor megint csak érmedobással dönt arról, hogy 1 vagy 2 játékautót vegyen Pistikének, amit még aznap este betesz a kisautós dobozba. (Vagyis minden délután $\frac{1}{4}$ val.séggel 1, $\frac{1}{4}$ val.séggel 2 játékautó érkezik.)

- Az éjszakák mekkora hányadában üres a doboz hosszú távon?
- Hosszú távon az éjszakák mekkora hányadában van a dobozban 2-nél több autó?
- Átlagosan hány éjszakát tölt egy kisautó a dobozban hosszú távon?
- Tegnap este az anyuka betett egy vagy két autót az üres dobozba. Várhatóan (vagyis: várható értékben) hány nap múlva lesz a doboz újra üres?

Megoldás:

Pistike dobazs tulajdonképpen egy kistolgálsi sor:
 a „kistolgálás” az, amikor Pistike lenyullázza a járművet.
 Így ha X_n a dobezban a kisautók száma az n -edik
 napon éjféltkor, akkor ez pont az előadásbeli

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$$

Sorhozst-evolúciós egyenlet szerint fejlődik, ahol
 $V_n \equiv 1$ az n -edik délelőtt tönkretett kisautók száma
 (már ha van ennnyi),

Y_n pedig az n -edik napon érkező kisautók száma.

Ennek eloszlása

k	0	1	2
$P(Y=k)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

Ebből $EV=1$, $EY = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{3}{4}$

$$E(Y^2) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Var } Y = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$$

~~Légyen Π az X_n Markov-lánc egyetlen stacionárius eloszlása~~

Mivel $EY < EV$, és nincs periodicitás, X_n stabil.

Legyen π az X_n Markov-lánc egyetlen stacionárius eloszlása: $X^{\text{stac}} \sim \pi$.

a.) Az ergodtétel miatt hosszú távon a 0 állapot arányában az időből $\pi_0 = P(X^{\text{stac}} = 0)$.

A 7. előadásjegyzet 6. oldal tételle szerint

$$\pi_0 = P(X^{\text{stac}} = 0) = 1 - \frac{EY}{EV} \stackrel{\text{esetünkben}}{=} 1 - \frac{3/4}{1} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

[A tétel alkalmazásához kellett, hogy $V \in \{0, 1\}$.]

c.) A 7. előadás 2. oldal tételle szerint stacionárius állapotban a sorhoz várható értéke

$$E X^{\text{stac}} = \frac{EY(1-EY) + \text{Var } Y}{2(EV-EY)} = \frac{\frac{3}{4}(1-\frac{3}{4}) + \frac{11}{6}}{2(1-\frac{3}{4})} = \frac{7}{4}.$$

A Little formula szerint pedig az átlagos várakozási idő (vagyis átlagosan a dobozban töltött éjszakák száma)

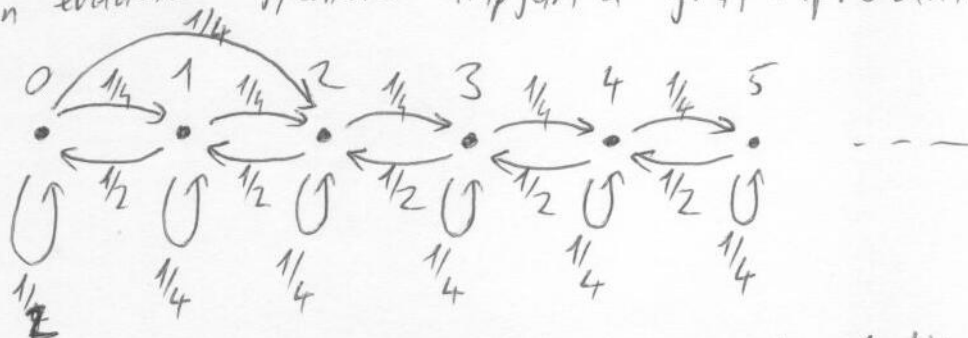
$$\boxed{\bar{D} = \frac{E X^{\text{stac}}}{EY} = \frac{7/4}{3/4} = \frac{7}{3} \text{ ~~22/3~~}}$$

d.) A 7. előadásjegyzet 7. oldal tételle szerint a foglaltsági periódus hosszának várható értéke

$$\boxed{E(\text{foglaltsági periódus hossz}) = \frac{EY}{P(Y \geq 1)(EV-EY)} = \frac{3/4}{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{4})} = \underline{\underline{6}}}$$

b.) Ehhet sajnos ki kell számolni a stacionárius eloszlást.

X_n evolúciós egyenlete alapján a gráf-reprezentáció:



Vegyük észre, hogy X_n majdnem születési-halálozási

folyamat: csak akkor változhat kettővel, ha

$X_n = 0$ (így nincs mit fönökretni), és 2 autó érkezik.

Így a $0 \leftrightarrow 1$ és $1 \leftrightarrow 2$ el kivételével érvényes

a szül-hal folyamatok stac. eloszlására érvényes

gondolatmenet: $\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i}$ ha $i \geq 2$,

$$\text{vagyis } \pi_i \cdot \frac{1}{4} = \pi_{i+1} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \pi_{i+1} = \frac{1}{2} \pi_i \quad (i \geq 2).$$

A maradék 3 ismeretlenre (π_0, π_1, π_2) felírhatjuk a stacionaritást kézzel:

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} = \pi_0 \cdot \frac{1}{4} + \pi_1 \cdot \frac{1}{2} \\ \pi_1 = \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} = \pi_0 \cdot \frac{1}{4} + \pi_1 \cdot \frac{1}{4} + \pi_2 \cdot \frac{1}{2} \\ \pi_2 = \pi_0 P_{02} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \pi_3 P_{32} = \pi_0 \cdot \frac{1}{4} + \pi_1 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \pi_2 \end{cases}$$

Hurra! az nem új
is merthely, $\pi_3 = \frac{1}{2} \pi_2$

Mátrix-alakban

$$(\bar{\pi}_0 \quad \bar{\pi}_1 \quad \bar{\pi}_2) = (\bar{\pi}_0 \quad \bar{\pi}_1 \quad \bar{\pi}_2) \overbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}^A$$

amiből $(A^T - I) \begin{pmatrix} \bar{\pi}_0 \\ \bar{\pi}_1 \\ \bar{\pi}_2 \end{pmatrix} = 0$, vagyis

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & -3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ vagyis } \boxed{\bar{\pi}_0 = \bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2}$$

[Adt perste: a $\otimes$ rendszer első egyenletéből $\bar{\pi}_0 = \bar{\pi}_1$,
a 2. és 3. egyenlet jobboldala pedig ugyanaz, így $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2$]

[Adt perste: Az A mátrix bistochastikus, vagyis nem
csak a sorösszegek 1-ek, hanem az oszlopösszegek
is, így az $(1 \ 1 \ 1)$ baloldali sajátvektora
a $\lambda = 1$ sajátértékhez: $(1 \ 1 \ 1)A = (1 \ 1 \ 1)$]

Igy a stac. eloszlás

$$\pi = \pi_0 \left(1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \dots \right)$$

Normalizálás: $1 = \pi_0 \left(1 + 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots}_{1} \right) = 4\pi_0$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{4},$$

$$\boxed{\pi = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64} \quad \dots \right)}$$

Végre választhatunk a b.) kérdésre:

legyen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \geq 3 \\ 0, & \text{ha } i = 0, 1, 2 \end{cases}$

annak indikátora, hogy a dobozban 2-nél több autó

van: $f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1})$ azt adja meg, hogy

az első n éjszakából hányszor volt 2-nél több autó.

Az ergodicitás szerint ~~ez~~ $f(X_n)$ időátlaga 1 valószínűséggel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(X_0) + \dots + f(X_{n-1})}{n} = \mathbb{E}_{\pi} f = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i f(i),$$

Vagyis a keresett arány

$$\mathbb{E}_{\pi} f = \sum_{i=3}^{\infty} \pi_i = \mathbb{P}(X^{\text{stac}} \geq 3) = 1 - (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

- 4.4 (7 pont) Jancsika minden délelőtt p valószínűséggel autót játszik, már ha éppen van kisautója. Ilyenkor tönkretesz két játékautót a kisautós dobozából (illetve, ha csak egy van, akkor azt az egyet), amit az apukája azonnal kidob. Az anyukája minden délután vesz egy új kisautót, amit

még aznap este betesz a kisautós dobozba.

- a.) Az éjszakák mekkora hányadában üres a doboz hosszú távon?
- b.) Hosszú távon az éjszakák mekkora hányadában van a dobozban 2-nél több autó?
- c.) Átlagosan hány éjszakát tölt egy kisautó a dobozban hosszú távon?

Megoldás:

a.) Q , hiszen a debet állatka soha nem üres:
mindentől elvárjuk, hogy érkezzen egy kisautó.

b.) Pistike doboza egy kistölgyelési sor, kistölgyelés =
kidobás. Legyen X_n a dobozban a kisautók
száma (= sorhossz) az n . napon elfekkor.

Az előadás-beli $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$

Sorhossz evolúciós egyenlet írható,

$Y \equiv 1$ az érkező autók = igények száma $\Rightarrow \boxed{EY = 1}$

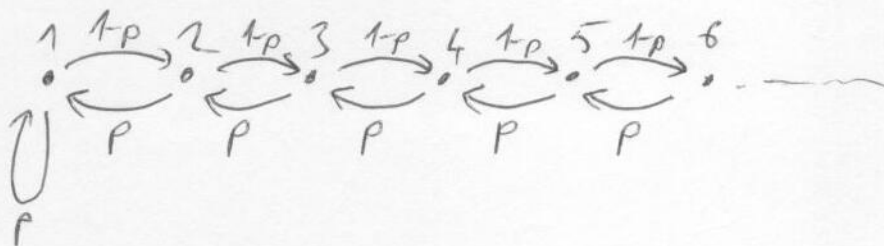
az n -edik napi „kistölgyelési kapacitás” $V_n \sim V$

elosztás

k	0	1	2
$P(V=k)$	$1-p$	p	p

$\Rightarrow \boxed{EV = 2p}$

Ez alapján az X_n gráf-reprezentációja



Ez születési-halálozási folyamat: egyetlen stac. eloszlása az a π , amire $\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i} = \frac{1-p}{p} =: \alpha, i = 1, 2, 3, \dots$

Vagyis $\pi = \pi_0 (1 \quad \alpha \quad \alpha^2 \quad \alpha^3 \quad \dots)$, mely per se h_n
az normalizálható.

Vagyis X_n stabil $\Leftrightarrow \alpha = \frac{1-p}{p} < 1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$.

[Hát persze: a stabilitás feltétele (irreducibilis & aperiódikus esetben $EV > EY$, vagyis $2p > 1$].

A stabil esetben rögtön látszik, hogy

$$X^{\text{stac}} \sim \pi = \text{Geom}(1-\alpha)$$

$$q := 1-p \text{ jelöléssel } 1-\alpha = 1-\frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}$$

Az eredmény miatt a b) kérdésre a válasz

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \underline{\underline{P(X^{\text{stac}} \geq 3)}} &= 1 - (\cancel{\pi_1} + \pi_2) = 1 - (\alpha + \alpha(1-\alpha)) = (1-\alpha)^2 \\ &= \underline{\underline{\left(\frac{1-p}{p}\right)^2}}, \text{ ha } p > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[Hát persze: X^{stac} így generálható, hogy hamis érmevel – amin a fej valószínűsége α – dobálunk az első fejig.
 $X^{\text{stac}} \geq 3$ pont azt jelenti, hogy az első két dobás irás.

c) A Little-formula szerint az átlagos várakozási idő

$$\bar{D} = \frac{EX^{\text{stac}}}{EY} = \frac{E\text{Geom}(\alpha)}{1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{p}{1-p}, \text{ ha } p > \frac{1}{2}$$

Ha $p < \frac{1}{2}$, akkor X_n nem stabil, a kisautók elszaporodnak

=) b) 1 c) ∞

- 4.5 (6 pont) Egy oktátónak az az elve, hogy minden érkező emailre leghamarabb másnap válaszol, aznap érkezett levélre soha. Az általa tartott kurzus 10 hallgatójának mindegyike minden nap, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{20}$ valószínűséggel küld egy emailt az oktátónak. (Egy nap egynél több emailt senki sem küld.) Az oktató minden nap pontosan egy hallgatói levélre válaszol (már ha van a postaládájában olyan, ami nem aznapi). Átlagosan hány éjszakát tölt az oktató postaládájában egy hallgatói levél hosszú távon?

Megoldás:

Oktatónk postaládája egy egyszerű csomagkencent-ráter $M=10$ ~~ak~~ küldővel, akik mindegyike $B(p=\frac{1}{20})$ eloszlású igényt küld időegységenként.

Igy az átlagos várakozási idő

A rendszer stabil, mert $M_p < 1$.

$$\underline{\underline{\bar{D} = \bar{D}_{max} = \frac{1}{2} + \frac{1-p}{2(1-M_p)} = \frac{1}{2} + \frac{19/20}{2(1-\frac{1}{20})} = 1.45}}$$

- 4.6 (6 pont) Móricka vizsgát felügyel, és közben segít a hallgatóknak. A 10 hallgató között jár körbe-körbe, minden hallgatónál pontosan 1 percet tölt, és ezalatt megválaszol pontosan 1 kérdést, amit a hallgató feltesz (már ha a hallgatónak van kérdése). Minden hallgatónak minden percben, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{20}$ valószínűséggel jut eszébe egy kérdés (a maradék $\frac{19}{20}$ valószínűséggel egy se). Átlagosan hány perc múlva kap választ Pistike a kérdéseire hosszú távon? (Az pontosság/egyszerűség kedvéért fel kell tennünk, hogy Pistike minden eszébe jutó kérdéshez az időt Móricka előző látogatásától számítja, így minden kérdés „kiszolgálási ideje” percben mérve 10-nek többszöröse.)

Megoldás:

Móricka az $M=10$ felhatalmú $B(p=\frac{1}{20})$ eloszlással
 érkező igényeit időosztással szolgálja ki.
 így az átlagos várakozási idő

$$\underline{\underline{\bar{D} = \bar{D}_{time} = \frac{M}{2} + \frac{M(1p)}{2(1-Mp)} = \frac{10}{2} + \frac{10 \cdot \frac{19}{20}}{2(1-\frac{1}{20})} = \underline{\underline{14.5}}}}$$

(A rendszer stabil, mert $Mp < 1$.)

- 4.7 (6 pont) Róbert közrendőrnek 10 parancsnoka van, sorrendben 1., 2., ..., 10. számú parancsnok. Minden parancsnok, minden percben, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{20}$ valószínűséggel ad Róbertnek parancsot (mindenki csak 1-et). Ő azonban minden percben csak 1 parancsot tud végrehajtani. Ha több végre nem hajtott parancs is van nála, akkor azt hajtja végre, amelyik a legmagasabb rangú (vagyis legkisebb sorszámú) parancsnoktól jött, a többit halogatja. (Az időt egész percekben mérjük. Tegyük fel, hogy egy parancsot leghamarabb az érkezését követő percben lehet végrehajtani.)
- Hosszú távon átlagosan hány végre nem hajtott parancs van Róbert zsebében az 5. számú parancsnokától?
 - Hosszú távon átlagosan hány perc után hajtja végre Róbert a 5. számú parancsnoktól érkezett parancsokat?

Megoldás:

Róbertnek az $M=10$ parancsok mindegyike alkalmanként $B(p)$ eloszlású véletlen számú igényt küld (az előzményektől függetlenül, ahol $p = \frac{1}{20}$).

Az $M=10$ parancsok igényei = parancsai $M=10$ külön sorban állnak Róbert zsebében, amiket ő egy

egyirányú busz szabálya szerint szolgál ki.

Minket az $i=5$ ~~sor~~ prioritási sor érdekli,

legyen ennek sorhossza $X_{i,n}$ (ahol n az idő),

stacionárius eloszlása $\sim X_i^{stac}$.

a.) Az egyirányú buszra kiszámolt képlet szerint

$$E X_i^{stac} = \frac{p}{2} + \frac{p(1-p)}{2} \frac{1}{(1-ip)(1-(i-1)p)} = \frac{i=5}{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} \frac{19}{20} \frac{1}{(1-\frac{5}{20})(1-\frac{4}{20})}} = \frac{31}{480}$$

Az eredmény miatt ugyanennyi lesz hosszú távon az átlagos sorhossz.

b.) Az egyirányú buszra kiszámolt képlet szerint az átlagos várakozási idő

$$\underline{\underline{\bar{D}_i = \frac{E X_i^{stac}}{E Y_{i,1}} = \frac{E X_i^{stac}}{p} = \frac{\frac{31}{480}}{\frac{1}{20}} = \frac{31}{24}}}$$

4.8 (7 pont) Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe minden időegységben az előzményektől függetlenül p valószínűséggel érkezik egy igény, a maradék $1 - p$ valószínűséggel egy sem. A kiszolgálás érkezési sorrendben történik, a kiszolgálási idő mindig pontosan 2.

- a.) Írjuk fel a várakozási idő evolúciós egyenletét!
- b.) Írjuk fel a várakozási idő átmenetmátrixát!
- c.) Milyen p értékekre lesz a rendszer stabil?

Megoldás:

a.) Legyen W_n az n -edik igény várakozási ideje.

Ere $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$, ahol $\Rightarrow \boxed{W_{n+1} = (W_n + 2 - T_{n+1})_+}$

- $S_n \equiv 2$ minden n -re (a kiszolgálási idő)
- $T_1, T_2, T_3, \dots$ független $\sim \text{Geom}(p)$: ennyi időt kell várni az egyes igények érkezésére.

b.) $T_{n+1} \sim \text{Geom}(p)$, így mindig ≥ 1 ,

így $S_n - T_{n+1} = 2 - T_{n+1} \leq 1$: W_n egy lépésben

legfeljebb 1-gyel nőhet:

$$P_{ij} := P(W_{n+1} = j | W_n = i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \geq i+2 \\ P(T_{n+1} = i+2-j), & \text{ha } 1 \leq j \leq i+1 \\ P(T_{n+1} \geq i+2-j), & \text{ha } j = 0 \end{cases}$$

Mivel $P(T_{n+1} = k) = q^{k-1} p$ ahol $q = 1-p$, ezért

$$P(T_{n+1} = i+2-j) = p q^{i+1-j}, \quad P(T_{n+1} \geq i+2-j) = q^{i+1-j}$$

↑
egy p teljes valószínűséggel érkezővel debálva
az első $(i+1-j)$ dobás irás

$$\Rightarrow P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } j \geq i+2 \\ p q^{i+1-j} & \text{ha } 1 \leq j \leq i+1 \\ q^{i+1} & \text{ha } j = 0 \end{cases}$$

[Az állapotok $\{0, 1, 2, \dots\}$]

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q^2 & p q & p & 0 & \dots \\ q^3 & p q^2 & p q & p & 0 & \dots \\ q^4 & p q^3 & p q^2 & p q & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

c.) A rendszer stabil $\Leftrightarrow ES_n < ET_n \Leftrightarrow 2 < \frac{1}{p}$
vagyis $\boxed{p < \frac{1}{2}}$

4.9 (7 pont) Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe pontosan minden második időegységben érkezik egy igény. Minden időegységben, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel szolgálunk ki egy igényt (ha van), a maradék $1 - p$ valószínűséggel nem.

- a.) Írjuk fel a várakozási idő evolúciós egyenletét!
- b.) Írjuk fel a várakozási idő átmenetmátrixát!
- c.) Milyen p értékekre lesz a rendszer stabil?

Megoldás:

a) Legyen W_n az n -edik igény várakozási ideje.

Erre $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$, ahol

- $S_n \sim \text{Geom}(p)$: ahányadikra egy igényt kistelgálunk, onnantól számítva, hogy megérkezett és már nincs előtte másik
- $T_n \equiv 2$ az érkezési idő az előző érkezéstől

statisztika

vagyis $\boxed{W_{n+1} = (W_n + S_n - 2)_+}$

b.) $S_n \sim \text{Geom}(p) \Rightarrow S_n \geq 1$, ~~a sorhoz~~ $\Rightarrow S_n - 2 \geq -1$:

a várakozási idő 1 lépésben legfeljebb 1-gyel csökkenhet.

$$P_{ij} = P(W_{n+1} = j | W_n = i) = \begin{cases} q, & \text{ha } j \leq i-2 \\ P(S_n - 2 = j - i) = P(S_n = j - i + 2), & \text{ha } j \geq i-1 \text{ és } j \neq 0 \\ \sqrt{h_n} & j=0 \\ \cancel{P(S_n - 2 \leq j - i) = P(S_n \leq 2 - i)}, & h_n \end{cases}$$

$W_{n+1} = 0$ csak úgy lehet, ha $W_n = 0$ vagy $W_n = 1$, ezeket külön kistelgálom:

$$\begin{aligned} P_{00} &= P(W_{n+1} = 0 | W_n = 0) = P((S_n - 2)_+ = 0) = P(S_n - 2 \leq 0) = \\ &= P(S_n \leq 2) = P(S_n = 1) + P(S_n = 2) = p + pq \quad (q = 1-p) \end{aligned}$$

$$P_{10} = P(W_{n+1}=0 | W_n=1) = P((1+S_n-2)_+ = 0) = P(S_n-1 \leq 0) = \\ = P(S_n \leq 1) = P(S_n=1) = p$$

Ezek alapján a mátrix

$$P = \begin{pmatrix} p+pq & pq^2 & pq^3 & pq^4 & \dots \\ p & pq & pq^2 & pq^3 & \dots \\ 0 & p & pq & pq^2 & \dots \\ 0 & 0 & p & pq & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

[97 állapotok $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$]

c.) A rendszer stabil $\Leftrightarrow ES < ET \Leftrightarrow \frac{1}{p} < 2$

Vagyis $\boxed{p > \frac{1}{2}}$

4.10 (5 pont) Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe pontosan minden második időegységben érkezik egy igény. Minden időegységben, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel szolgálunk ki egy igényt (ha van), a maradék $1-p$ valószínűséggel nem. Nézzük a sor hosszát csak minden második időpillanatban, vagyis legyen $\bar{X}_n$ a sor hossza $2n$ idő elteltével. Írjuk fel az $\bar{X}_n$ Markov lánc evolúciós egyenletét és átmenetmátrixát!

Megoldás:

Nevezünk ciklusnak két egymásutániságos időegységet úgy, hogy az új igény mindig a ciklus végén érkezik, és közvetlenül ez után jegyezzük fel a sérbeszt.

$[0, 2]$ az 1. ciklus

$[2, 4]$ a 2. ciklus

stb

Így $\bar{X}_{n+1} = (\bar{X}_n - \bar{V}_{n+1})_+ + \bar{Y}_{n+1}$, ahol

$$\bar{V}_{n+1} \sim \text{Bin}(2, p) \text{ az } (n+1)\text{-edik ciklusban}$$

kiszolgált igények száma

$$\bar{Y}_{n+1} \equiv 1 \text{ az újonnan érkező igények száma}$$

(ez ciklusonként mindig 1)

Vagyis $\bar{X}_{n+1} = (\bar{X}_n - \bar{V}_{n+1})_+ + 1$

Láthatólag $\bar{X}_{n+1} \geq 1$, így az állapotok ~~$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$~~ $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Mivel $V_{n+1} \in \{0, 1, 2\}$, a sérbeszt legfeljebb 1-gyel változhat (ez egy születési-halálatási folyamat).

A sorhossz 1-gyel nő $\Leftrightarrow \bar{V}_{n+1} = 0$, ennek val.sége

$$(1-p)^2 = q^2, \text{ ahol } q := 1-p$$

• Változatlan $\Leftrightarrow \bar{V}_{n+1} = 1$, ennek val.sége $2pq$

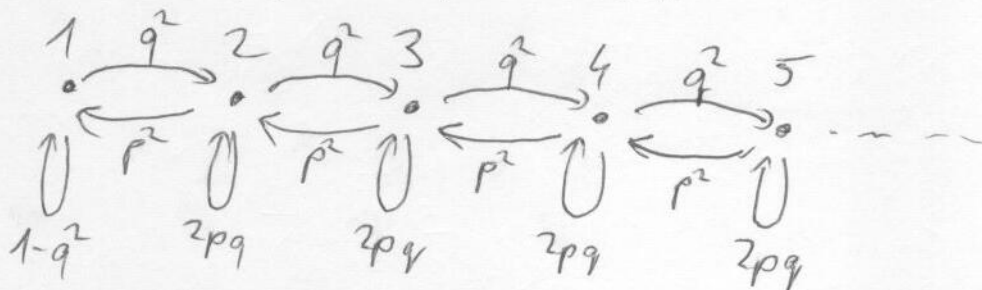
• 1-gyel csökken $\Leftrightarrow \bar{V}_{n+1} = 2$, $\sim p^2$

hacsak nem eleve 1 volt a sorhossz, mert

akkor változatlan $\Leftrightarrow \bar{V}_{n+1} \geq 1$,

ennek val.sége $2pq + p^2 = 1 - q^2$.

Vagyis a gráf-reprezentáció



Az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-q^2 & q^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p^2 & 2pq & q^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & p^2 & 2pq & q^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & p^2 & 2pq & q^2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p^2 & 2pq & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- 4.11 **(7 pont)** Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe minden időegységben az előzményektől függetlenül p valószínűséggel érkezik egy igény, a maradék $1 - p$ valószínűséggel egy sem. A kiszolgálási idő mindig pontosan 2. Nézzük a sor hosszát csak minden második időpillanatban, vagyis legyen $\bar{X}_n$ a sor hossza $2n$ idő elteltével. Írjuk fel az $\bar{X}_n$ Markov lánc evolúciós egyenletét és átmenetmátrixát! Küzben gondoljuk át, hogy $\bar{X}_n$ tényleg Markov-e.

Megoldás:

Álljon egy ciklus két szomszédos időegységből:

$[0, 2]$ az 1. ciklus

$[2, 4]$ a 2. ciklus

$[4, 6]$ a 3. ciklus, stb.

Legyen $\bar{X}_n$ a sor hossza az n -edik ciklus végén,

vagyis $2n$ -kor

$\bar{Y}_n$ az n -edik ciklus alatt érkező új igények

száma. $Ez \sim B(2, p)$ és független az előző-
mennyektől. Ezen igények kiszolgálása akár
azonnal is elkezdődhet, de legkésőbb a kö-
vetkező ciklusban érhet véget.

Észrevétel: Ha $\bar{X}_n \geq 1$, akkor az $(n+1)$ -edik ciklusban,

vagyis $[2n, 2n+2]$ -ben biztosan pontosan 1 igényt

figyelünk ki (bár nem lehet tudni, hogy mikor):

egy igény kiszolgálása már folyik és be is fog feje-
ződni, másire nem lesz idő.

• Ha viszont $\bar{X}_n = 0$, akkor az $(n+1)$ -edik
ciklusban biztosan nem lesz kiszolgálás: Ha jön
is egy igény az elején, az az már nem várunk.

Igy érvényes a Stackes sorhossz-evolúciós egyenlet:

$$\bar{X}_{n+1} = (\bar{X}_n - \bar{V}_{n+1})_+ + \bar{Y}_{n+1},$$

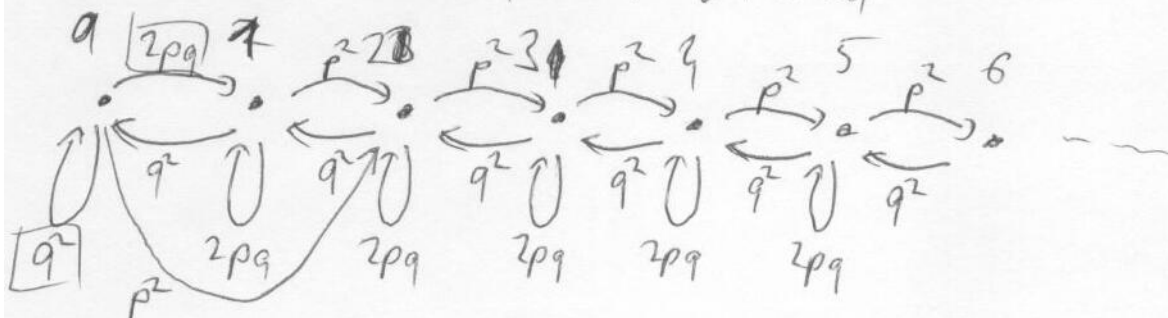
ahol $\bar{V}_{n+1} \equiv 1$ és $\bar{Y}_{n+1} \sim \text{Bin}(2, p)$.

Mivel Y_n független az előzményektől, $\boxed{\bar{X}_n \text{ Markov}}$.

- Ha $\bar{X}_n \geq 1$, akkor $\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + (\bar{Y}_{n+1} - 1)$ és
a változás $(\bar{Y}_{n+1} - 1) \in \{-1, 0, 1\}$, vagyis a
sorhossza legfeljebb 1-gyel változhat: $\bar{X}_n$ markov
születési-halálozási folyamat

- Ha viszont $\bar{X}_n = 0$, akkor $(\bar{X}_n - 1)_+ = (0 - 1)_+ = \cancel{0 - 1}$
 $= 0 = (1 - 1)_+$, vagyis

0-ból az átmenet-valsőségek ugyanazok, mint
az 1-ből: $q := 1 - p$ jelöléssel



Ebből az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} q^2 & 2pq & p^2 & 0 & 0 & \dots \\ q^2 & 2pq & p^2 & 0 & 0 & \\ 0 & q^2 & 2pq & p^2 & 0 & \\ 0 & 0 & q^2 & 2pq & p^2 & \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & 2pq & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

[Vigyázat: az állapotok ~~1, 2, 3, 4, ...~~ 1, 2, 3, 4, ...]

4.12 (7 pont) Jancsi bácsi és Juliska néni együtt él és közös hűtőt használ. Juliska néni nyugdíjas. Minden délelőtt, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel főz egy tejfölös ragulevest, és ehhez elhasznál a hűtőből 1 pohár tejfölt – feltéve persze, hogy van a hűtőben tejföl, mert ha nincs, akkor mást főz.

Jancsi bácsi minden délután, az előzményektől függetlenül, q valószínűséggel hoz egy pohár tejfölt a boltból, és beteszi a hűtőbe. Tegyük fel, hogy $p > q$ (különben a tejfölök elszaporodnak).

- Legyen X_n a tejfölök száma a hűtőben az n -edik nap végén. Rajzoljuk fel az X_n Markov lánc gráf-reprezentációját és számoljuk ki a stacionárius eloszlást!
- Legyen most $\tilde{X}_k$ a tejfölök száma a hűtőben a k -adik tejföl érkezése után! Mi az $\tilde{X}_k$ Markov lánc stacionárius eloszlása? (Tipp: erre volt előadáson egy tétel.)
- Tegyük fel, hogy Juliska néni a tejfölöket érkezési sorrendben használja el. Legyen D_k a k -adik tejföl által a hűtőben töltött éjszakák száma. Mi a D_k Markov lánc stacionárius eloszlása? (Tipp: erre is volt előadáson egy tétel.)

Megoldás:

Futiska néniék hűtője egy diszkrét idejű kistölgélési sor ahol q értékű és q kistölgélés is bináris:

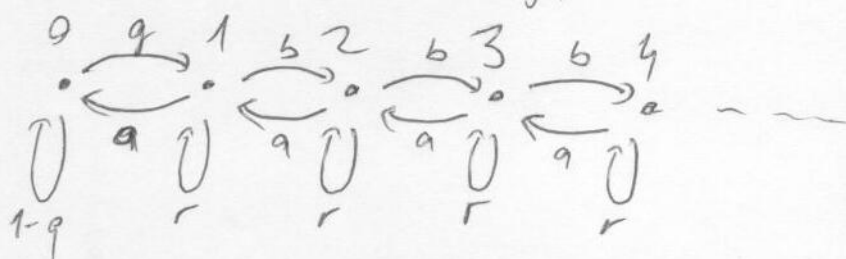
$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}, \text{ ahol}$$

$V_n \sim B(p)$ az n -edik napon tervezett ragulevesek száma
(ami akkor valósul meg, ha van tejföl)

$Y_n \sim B(q)$ az n -edik napon érkező tejfölök száma és mind független az előzményektől.

Igy érdemesek a 11. előadás-jegyzet képletei és tételjei.

a.) X_n gráf-reprezentációja



ahol $a = p(1-q)$, $b = (1-p)q$, $r = 1-a-b$.

X_n születési-halálozási folyamat, ebből a π stacionárius eloszlás

$$\frac{\pi_{k+1}}{\pi_k} = \begin{cases} q/a, & \text{ha } k=0 \\ b/a, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_k = \begin{cases} \pi_0, & \text{ha } k=0 \\ \pi_0 \frac{q}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases}$$

ahol a normáláshoz $\pi_0 = 1 - \frac{q}{p}$ (lásd az előadást a számolásról)

Megj: π_0 a hosszadalmas számolás helyett ennél is tudható, hogy a 8.7. előadás-jegyzet 6. oldal tetele szerint az üresjárat valószínűsége

$$\pi_0 = P(X^{\text{stac}} = 0) = 1 - \frac{EY}{EV} = 1 - \frac{q}{p}$$

b.) A 11. előadás-jegyzet 9. oldal tetele szerint

$$\hat{X}^{\text{stac}} \sim \text{Geom}(\alpha) \quad \text{ahol} \quad \alpha = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{q(1-p)}{p(1-q)}.$$

c.) A 11. előadás-jegyzet 14. oldal legalja:

$$D^{\text{stac}} \sim \text{Geom}(p\alpha) = \text{Geom}\left(\frac{p-q}{1-q}\right)$$

4.13 (10 pont) Jancsi bácsi és Juliska néni együtt él és közös hűtőt használ. Juliska néni nyugdíjas. Minden délelőtt, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel főz egy tejfölös ragulevest, és ehhez elhasznál a hűtőből 1 pohár tejfölt – feltéve persze, hogy van a hűtőben tejföl, mert ha nincs, akkor mást főz.

Jancsi bácsi minden délután, az előzményektől függetlenül, q valószínűséggel hoz egy pohár tejfölt a boltból, és beteszi a hűtőbe. Tegyük fel, hogy $p > q$ (különben a tejfölök elszaporodnak).

Legyen X_n a tejfölök száma a hűtőben az n -edik nap végén. Ennek időfejlődése könnyű, és most nem ezzel foglalkozunk.

Hanem: legyen most $\tilde{X}_k$ a tejfölök száma a hűtőben a k -adik tejföl érkezése után! (Ez persze legalább 1.)

a.) Írjuk fel az $\tilde{X}_k$ Markov lánc átmenetmátrixát! (Nyugodtan feltehetjük, hogy már az általunk „első”-nek számozott tejföl érkezése előtt is voltak tejfölök a hűtőben.)

(Tipp: $\tilde{X}_1 = (\tilde{X}_0 - V)_+ + 1$, ahol V az első tejföl érkezéséig terbe vett ragulevesek száma, ami persze pont az elhasznált tejfölök száma, ha van ennyi tejföl. Pont ennek a V -nek az eloszlását számoltuk ki egy másik feladatban.)

(Megoldás:

$$P_{ij} := \mathbb{P}(\tilde{X}_1 = j | \tilde{X}_0 = i) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } j > i + 1 \\ A & , \text{ ha } j = i + 1 \\ (1 - A)L(1 - L)^{i-j} & , \text{ ha } 2 \leq j \leq i \\ (1 - A)(1 - L)^{i-1} & , \text{ ha } j = 1 \end{cases}$$

ahol $A = \frac{q-qp}{p+q-qp}$ és $L = \frac{q}{p+q-qp}$.)

- b.) Ellenőrizzük le kézzel, hogy $\tilde{X}_k$ stacionárius eloszlása az $\alpha := 1 - \frac{q(1-p)}{p(1-q)}$ paraméterű geometriai eloszlás! Vagyis azt kell ellenőrizni, hogy

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{ij},$$

ahol $\pi_i = \alpha(1 - \alpha)^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$

(Tipp: csodák csodája, $(1 - \alpha)(1 - L) = A$.)

Megoldás:

A tipp szerint $\hat{X}_1 = (\hat{X}_0 - V)_+ + 1$, ahol V az első tejfől érkezéséig térrebe vett rakugyerekek száma. A 3.10-es feladat pont ennek a V -nek az eloszlásáról szól, és tudjuk belőle, hogy

$$P(V=k) = \begin{cases} A, & \text{ha } k=0 \\ (1-A)L(1+L)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases} \quad P(V \geq k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k=0 \\ (1-A)(1+L)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{ahol } A = \frac{q - qp}{p + q - qp} \quad \text{és} \quad L = \frac{q}{p + q - qp}$$

Innan

$$b.) P_{ij} := P(\hat{X}_1 = j | \hat{X}_0 = i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j > i+1 \\ P(V=0) = A, & \text{ha } j = i+1 \\ P(V = \underbrace{i - (j-1)}_{\geq 1}) = (1-A)L(1+L)^{i-j}, & \text{ha } 2 \leq j \leq i \\ P(V \geq i) = (1-A)(1+L)^{i-1}, & \text{ha } j = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Fontos: } \hat{X}_1 = (\dots)_+ + 1 \geq 1, \text{ tehát az állapothat} \\ \quad \quad \quad \{ \cancel{0}, 1, 2, 3, \dots \}. \\ \text{Hát persze: mindig egy tejfől érkezése után néztünk a} \\ \text{hűtőbe} - \text{ilyenkor sose üres.} \end{array} \right]$$

b.) A feladat megoldásai: legyen $\pi_j' = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{ij}$ $j=1,2,3,\dots$

Ekkor $\pi_1' = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{i1} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^{i-1} (1-A)(1-L)^{i-1} =$

$$= \alpha(1-A) \left[1 + [(1-\alpha)(1-L)] + [(1-\alpha)(1-L)]^2 + [(1-\alpha)(1-L)]^3 + \dots \right]$$

$$= \alpha(1-A) \frac{1}{1 - (1-\alpha)(1-L)} \quad \begin{array}{l} \text{Csodák csodája:} \\ (1-\alpha)(1-L) = A \end{array} \quad \alpha(1-A) \frac{1}{1-A}$$

$$= \alpha = \pi_1 \quad \checkmark$$

• $j \geq 2$ -re

$$\pi_j' = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{ij} = \sum_{i=1}^{j-2} \pi_i \cdot 0 + \pi_{j-1} P_{j-1,j} + \sum_{i=j}^{\infty} \pi_i P_{ij} =$$

$$= \alpha(1-\alpha)^{j-2} A + \sum_{i=j}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^{i-1} (1-A)L(1-L)^{i-j} =$$

$$= \alpha(1-\alpha)^{j-2} A + L\alpha(1-\alpha)^{j-1}(1-A) \left[1 + [(1-\alpha)(1-L)] + [(1-\alpha)(1-L)]^2 + \dots \right] =$$

$$= \alpha(1-\alpha)^{j-2} A + L\alpha(1-\alpha)^{j-1} \cancel{(1-A)} \frac{1}{\cancel{1 - (1-\alpha)(1-L)}} \quad \begin{array}{l} A, \text{ még mindig} \end{array}$$

$$= \alpha(1-\alpha)^{j-1} \left[\frac{A}{1-\alpha} + L \right] \xrightarrow[\text{még mindig}]{\frac{A}{1-\alpha} = 1-L} \alpha(1-\alpha)^{j-1} [1-L+L]$$

$$= \alpha(1-\alpha)^{j-1} = \pi_j \quad \checkmark \quad \text{Hurra, hurra, hurra.}$$

4.14 (5 pont) Egy zajos csatornán másodpercenként 10^8 bitet tudunk átküldeni. Minden átküldött bit a többitől függetlenül 10^{-6} valószínűséggel sérül. A csatornán csomagokat küldünk át, amik

N adatbitből és 64 kísérő bitből állnak. A vevő az esetleges hibákat teljes biztonsággal észleli és „negatív nyugtát” küld róluk, ami teljes biztonsággal megérkezik a küldőhöz. Ilyenkor a teljes csomagot újra kell küldeni. Másodpercenként legfeljebb hány bitnyi adatot lehet a csatornán átvinni hosszú távon, ha N -et jól választjuk meg, és

- a.) a csomag elküldése után a nyugta azonnal megérkezik?
- b.) a nyugta a csomag elküldése után pontosan 1 másodperccel érkezik meg, és meg kell várni, mielőtt a következő csomagot küldeni kezdjük?
- c.) a nyugta a csomag elküldése után pontosan 1 másodperccel érkezik meg. Mi addig is küldjük a következő csomagokat, de ha negatív nyugta jön, akkor visszaugrunk a hibás csomagra és onnan folytatjuk, a csomagok sorrendjét továbbra is megtartva? *(Tipp: ebben az esetben az optimalizálás csak numerikusan megy. Nem kell túlzásba vinni: ábrázoljuk a kapacitást N függvényében, és olvassuk le a maximumot.)*

Megoldás:

Ez a „Csomagküldés zajos csatornában” probléma.

A jegyet jelöléseivel

- $t_0 = 10^{-8}$ az egy bit átviteléhez szükséges idő (ami a jegyzetben $1 \mu s$ volt)
- $p_b = 10^{-6}$ a bithiba-valószínűség
- $M = 64$ a küldendő bitek száma

a.) Késleltetésmentes nyugta esete: a jegyzet szerint
 $\alpha := -\ln(1-p_b) = -\ln(1-10^{-6}) \approx 10^{-6}$ jelöléssel az optimális N érték

~~$$N_{opt} = \frac{M^2}{4\alpha} + \frac{M}{\alpha} \approx \frac{64^2}{4 \cdot 10^{-6}} + \frac{64}{10^{-6}} \approx 1024 + 64000 \approx 65024$$~~

- a közelítő képlet szerint $N_{opt} \approx \sqrt{\frac{M}{p_b}} = 8000$, és ekkor

$$r_{opt} \approx 1 - 2\sqrt{Mp_b} \approx \boxed{0.984}$$

- a pontos érték $N_{opt} = -\frac{M}{2} + \sqrt{\frac{M^2}{4} + \frac{M}{\alpha}} \approx 7969.06$

amiből $r = \frac{N(1-p_b)}{M+N}$ miatt

$$N = 7968\text{-re } r = \boxed{0.9840957825}$$

$$N = 7969\text{-re } r = \boxed{0.9840957824}$$

látványlag
mindegy

Vagyis lényeges idővel számolva a kapacitás

$$\boxed{\approx 98,400,000 \frac{\text{bit}}{\text{sec}}} = 9,84 \cdot 10^7 \frac{\text{bit}}{\text{sec}}$$

b.) Stop-and-wait protokoll esete $T = 1 \text{ sec}$ várakozási idővel, vagyis $T = K t_0$ ahol $K = 10^8$.

Az átvitel jegyzet szerint az optimális adatcsomagmérték

$$N_{\text{opt}} = -\frac{M+K}{2} + \sqrt{\frac{(M+K)^2}{4} + \frac{M+K}{\alpha}} \approx 990195,$$

amiből az optimális kapacitás

$$\Gamma_{\text{opt}} = \frac{N_{\text{opt}} (1-p_b)^{M+N}}{M+N_{\text{opt}} + K} \approx 0.00364231,$$

vagyis valós időben ~~az~~ $\approx \boxed{364000 \frac{\text{bit}}{\text{sec}}}$

c.) Go-back-N protokoll esete, továbbra is $K = 10^8$.

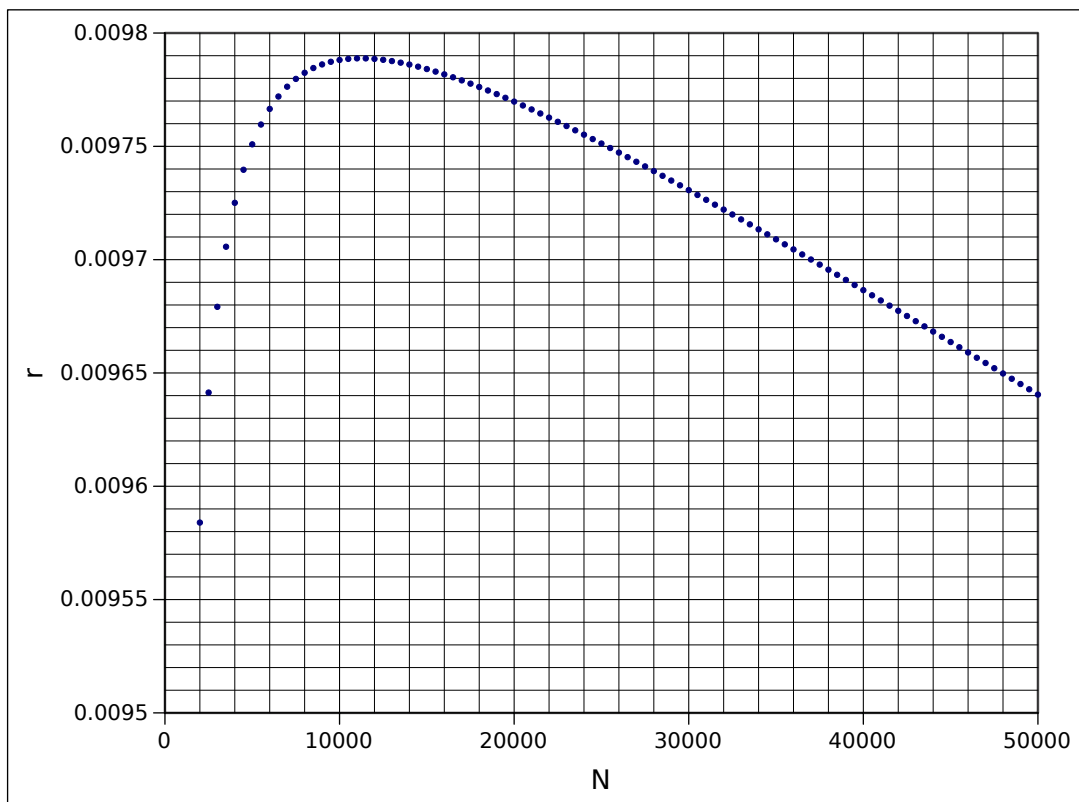
A jegyzet szerint a kapacitás N függvényében

$$\Gamma = \Gamma(N) = \frac{N (1-p_b)^{M+N}}{M+N+K(1-(1-p_b)^{M+N})}.$$

Ezt N függvényében ábrázolva és a maximum környékét kiagyaltva (lásd ábra), látszik, hogy

$$N_{\text{opt}} \approx 11000 \text{ mellett } \Gamma_{\text{opt}} \approx 0.00949,$$

vagyis az elérhető kapacitás $\approx \boxed{949000 \frac{\text{bit}}{\text{sec}}}$.



1. ábra. Kapacitás az adacsomag méretének függvényében, Stop-and-wait eset