Szabályozástechnika összefoglaló

Visontay Péter
(sentinel@sch.bme.hu)
2001. június

Megjegyzés: ez az összefoglaló a Hetthéssy-féle kurzushoz készült, és nem teljesen fedi le a Lantos-féle előadások anyagát.

Alapfogalmak és összefüggések

Impulzusátviteli függvény:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Frekvenciafüggvény: (átviteli karakterisztika)

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

Zárt kör átviteli függvénye: ha egy W_c átviteli függvényű folyamatot visszacsatolunk egy W_f visszacsatoló ággal, akkor az eredő átviteli függvény:

$$\frac{Y}{U} = \frac{\text{előremutató ág}}{1 + \text{felnyitott kör}} = \frac{W_c}{1 + W_c W_f}$$

Hurokátviteli függvény: a felnyitott kör eredő átviteli függvénye:

$$W_o = W_c W_f$$

Merev visszacsatolás: egy rendszer kimenetét egyszerűen visszakötjuk a bemenetre (általában egy kivonó csomóponttal). Ilyenkor a visszacsatoló ág átviteli függvénye $W_f = 1$.

Karakterisztikus egyenlet:

$$1 + W_o(s) = 0$$

Rendszer állapotváltozós leírása:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Állapotegyenletek megoldása:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Időtartománybeli megoldás:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\;\mathrm{d}\tau$$

Gerjesztés nélküli megoldás:

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Itt e^{At} számítása nehéz, de ha A diagonális (p_i sajátértékekkel), akkor

$$e^{At} = \begin{vmatrix} e^{p_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{p_n t} \end{vmatrix}$$

Bode diagramok

Bode diagramok: a Bode diagramok külön ábrázolják a frekvenciafüggvény valós és képzetes részét. A vízszintes tengelyen szerepel a $\log \omega$, a függőlegesen pedig $\log M$ (mértékegysége dB), ill. φ.

Vágási körfrekvencia: Az a frekvencia, ahol az amplitúdódiagram metszi az x tengelyt (itt $M(\omega) = 1$, azaz $\log M(\omega) = 0$). Formálisan:

$$|W_o(j\omega_c)| = 1$$

Fázistartalék: a frekvenciadiagram értéke a vágási körfrekvencián (ez negatív) plusz 180°. Ennek általában 60°-osnak kell lennie az ideális szabályozási tulajdonságokhoz.

$$PM = \varphi(\omega_c) + \pi$$

Erősítési tartalék: jelöljük ω_π-vel azt a frekvenciát, ahol a fázis $-\pi$. Ekkor:

$$ET = \frac{1}{|W_o(j\omega_\pi)|}$$

Az előbbi fogalmak szerepe:
− a rendszer stabil, ha $PM > 0$ és $ET > 1$.
− a rendszer annál gyorsabb, minél nagyobb a vágási körfrekvencia.
− a 10 százaléknál kisebb túllendüléshez $PM \approx 60°$.

Egyszerűsített Bode ábrázolás: mivel komplex függvényt nehéz pontosan ábrázolni kézzel, ezért egyszerűsítve ábrázoljuk azt. Ezen csak egyenes szakaszok vannak, melyek meredeksége $k \cdot 20$dB/dekád, ahol k általában egy -3 és 3 közti egész szám.

Fel/letörés: egy diagram fel- vagy lefelé törik egy adott pontban, ha ott meredeksége 20dB/dekáddal nő, ill. csökken.

Egytárolós tag: $H(s) = \frac{K}{1+sT} \implies H(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega t}$
Bode: $1/T$-ig vízszintes (értéke $\log K$), majd ott lefelé törik.

Integráló tag: $H(s) = \frac{K}{s}$
Bode: végig -20dB/dekád, az x tengelyt K-ban metszi.

Kétszeresen integráló tag: $H(s) = \frac{K}{s^2}$
Bode: végig -40dB/dekád, az x tengelyt $\sqrt{K}$-ban metszi.

Fáziskésleltető/siettető: $H(s) = \frac{1+s\tau}{1+sT}$
Bode: vízszintes egyenes, ami $1/\tau$-ban felfelé, $1/T$-ben pedig lefelé törik.

Nyquist diagramok:

Ezek egy komplex számsíkú diagramon ábrázolják a frekvenciafüggvényt. A Nyquist görbe annyi félsíkon megy keresztül, ahány tároló van a rendszerben. Alapból $+\infty$-ből indul, integráló tagnál $0-\infty j$-ből, kétszeresen integráló tagnál $-\infty$-ből (azaz minden integrátor -90 fokkal téríti el a diagramot). A diagramot a zérusok is módosítják.

Tagok frekvenciafüggvényei

Arányos (tárolós) tagok:

$$H(s) = A; \quad \frac{A}{1+sT_1}; \quad \frac{A(1+s\tau_1)\dots(1+s\tau_m)}{(1+sT_1)\dots(1+sT_n)}e^{-sT_h}$$

Tisztán integráló (arányos) tagok: nevezőjükből s emelhető ki.

$$H(s) = \frac{A}{s}; \quad \frac{A}{s(1+sT_1)}; \quad \frac{A(1+s\tau_1)\dots(1+s\tau_m)}{s(1+sT_1)\dots(1+sT_n)}e^{-sT_h}$$

(Kétszeresen integráló tagnál s^2 emelhető ki.)

Tisztán differenciáló (arányos) tagok: számlálójukból s emelhető ki.

$$H(s) = As; \quad \frac{As}{(1+sT_1)}; \quad \frac{As(1+s\tau_1)\dots(1+s\tau_m)}{(1+sT_1)\dots(1+sT_n)}e^{-sT_h}$$

Kéttárolós arányos lengő tag:

$$\frac{1}{1+2\xi T_0 s + T_0^2 s^2} \quad \text{vagy} \quad \frac{\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$$

Csillapítási tényező: ξ, ennek általában $0.6-0.7$ körüli értékénél lesz optimális a csillapítás.
Sajátfrekvencia: $\omega_0 = \frac{1}{T_0}$
Lengési frekvencia: $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$
Rezonanciafrekvencia: $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$
Vágási körfrekvencia: $\omega_c = \omega_0\sqrt{2(1-2\xi^2)}$
Átmeneti függvény túllendülése: (százalékos túllövés)

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Emelkedési idő: $t_r = \frac{2.5}{\omega_0}$; **Beállási idő:** $t_s = \frac{4}{\xi\omega_0}$; **Csúcsidő:** $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

Vegyes témák

Egyszerű Nyquist-kritérium: ha a nyitott körnek ($W_0(s)$) nincsenek jobboldali pólusai, a zárt rendszer akkor asszimptotikusan stabilis, ha a Nyquist-diagram nem veszi körül a -1 pontot.

Hibajel átviteli függvénye: ha a felnyitott kör átviteli függvénye $W_o(s)$, akkor a hibajel bemenetre vonatkozó átviteli függvénye:

$$\frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+W_o(s)}$$

Végértéktétel és kezdetiértéktétel:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

Gyökhelygörbe:
A zárt rendszer eredő karakterisztikus egyenletének adja meg a gyökeit az egyik paraméter (általában a K erősítés) függvényében. Szabályok:
– A görbe ágainak száma megegyezik a pólusok számával.
– A görbék a pólusokból a zérusokba mennek (vagy ha nincs elég zérus, a végtelenbe).
– A pólusok "taszítják" a görbéket.
– Azokon a helyeken lehet görbe, amelyektől jobbra páratlan számú pólus van.

Állapottranszformáció: az állapotváltozókat többféleképpen választhatjuk meg, és célszerű lehet áttérni egyik kiválasztásról egy másikra. Legyen, T egy $n \times n$-es mátrix, ekkor az új állapotváltozók legyenek $x_T = Tx$. Innen az új állapotváltozós leírás:

$$\dot{x}_T = TAT^{-1}x_T + TBu$$

$$y = CT^{-1}x_T + Du$$

Kanonikus transzformáció: állapottranszformáció segítségével diagonális $A_T = TAT^{-1}$ mátrixot csinálunk.

Állapotirányíthatóság (Kálmán):
Egy rendszer irányítható, ha gerjesztés hatására $x(t_0)$-ból $t_v - t_0$ idő alatt tetszőleges $x(t_v)$ állapotba átvihető. Feltétele, hogy a $C_o = |B|AB|\dots|A^{n-1}B|$ mátrix rangja n legyen.

Ḱimeneti irányíthatóság:
Egy rendszer irányítható, ha gerjesztés hatására $y(t_0)$-ból $t_v - t_0$ idő alatt tetszőleges $y(t_v)$ állapotba átvihető. Feltétele, hogy a $C_o = |CB|CAB|\dots|CA^{n-1}B|$ mátrix rangja k legyen, ahol k a rendszer kimeneteinek száma.

Megfigyehetőség:
Egy rendszer megfigyelhető, ha egy $t_0 < t < t_v$ intervallumban megfigyelt y és u jelekből $X(t_0)$ meghatározható. Feltétele, hogy a $O_b = |C|CA|\dots|CA^{n-1}|^T$ mátrix rangja n legyen.

Diszkretizált állapotmodell:

$$A_d = e^{AT_s} \qquad b_d = \int_{kT_s}^{kT_s+T_s} e^{A(kT_s+T_s-\lambda)}b \, \mathrm{d}\lambda$$

$$c_d = c \qquad d_d = d$$

Mintavételezett jel Laplace transzformáltja:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)e^{-ksT_s} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

Statikus jelátviteli hiba: egységugrás gerjesztésnél a kimenet végtelenben vett eltérése a gerjesztés értékétől, 1-től:

$$e = 1 - y(\infty)$$

Szabályozási körök statikus jelátviteli tulajdonságai:
Az alapjelkövetés, ill. a zavarelhárítás pontosságát a szabályozás típusszáma (ez az integrátorok száma) és a körerősítés határozza meg. A statikus hibák táblázata:

Típusszám	egységugrás	egység sebességugrás	egység gyorsulás
0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K}$

Mátrixinvertálás:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}$$

Szabályozók tervezése

Követelmények: zárt szabályozási körökkel szemben felmerülő követelmények:
− Alapjelkövetés: a kimenet kövesse a bemenetet.
− Zavarelhárítás: a kimenetet ne befolyásolják a fellépő zavarások.
− Robusztusság: a folyamatról rendelkezésre álló információ pontosságára ne legyen érzékeny a zárt kör viselkedése.

Folytonos PI, PD és PID szabályozók

PI szabályozó: lényege, hogy kiejtjük a rendszer legnagyobb időállandóját, és egy integráló hatást hozunk be helyette.

$$K\frac{1+sT_1}{sT_1}$$

PD szabályozó: lényege, hogy kiejtjük a rendszernek azt az időállandóját, ami a −20dB/dekádból −40-et csinál (ez általában a második legnagyobb időállandó), és egy kb. 5−20-szor kisebbet hozunk be helyette (n általában 10):

$$K\frac{1+sT_2}{1+s\frac{T_2}{n}}$$

PID szabályozó: a PI és a PD szabályozók együtt.

$$K\left(1+\frac{1}{sT_1}+\frac{1+sT_2}{1+s\frac{T_2}{n}}\right)$$

Mintavételes szabályozók

Mintavételes zárt szabályozási rendszerek alapvető struktúrája a következőképpen néz ki: az előrecsatoló ágban $C(z)$, D/A konverter és $P(s)$ vannak, a visszacsatoló ágban pedig az A/D konverter. (Ezt a modellt alkalmazzuk a w-transzformációs, a véges beállású szabályozó és a Tuschák-módszer esetében.)

Tartás: D/A konverziónál a kimenő jel alakjának meghatározása.

Nulladrendű tartó (zero order holder): D/A konverter, ami az utolsó értéket tartja a következő mintáig. Átviteli függvénye (T_s a mintavételi idő):

$$H_{zoh}(s) = \frac{1-e^{-sT_s}}{s}$$

Átviteli függvény tartóval: mintavételes szabályozótervezéseknél általában az az első lépés, hogy meghatározzuk a nulladrendű tartó és a folyamat közös átviteli függvényét, $P(z)$-t. Ez a következőképpen történik:

$$P(z) = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-sT_s}}{s}P(s)\right\}\right\}$$

Ennek számítása:

$$P(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT_s}}{s}P(s)\right\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}P(s)\right\}$$

Mintavételes tervezés w-trafóval

Célja, hogy a folytonos rendszerekre alkalmazott módszereket használni tudjuk mintavételes esetben is. Alapja a trapézszabály szerinti numerikus integrálás:

$$\int\limits_{(k-1)T_s}^{kT_s} f(t)\ dt \approx \frac{T_s}{2}[f(kT_s - T_s) + f(kT_s)]$$

Bilineáris (Tustin) transzformáció: Az előbbiek alapján kapott transzformáció (itt w az s egy másik jelölése).

$$w = \frac{2}{T_s}\frac{z+1}{z-1}$$

$$z = \frac{1+\frac{wT_s}{2}}{1-\frac{wT_s}{2}}$$

Tervezés: Először meghatározzuk a D/A tartószerv és $P(s)$ együttes mintavételes alakját ($P(z)$). Ezután $P(z) \rightarrow P(w)$ transzformációt hajtunk végre, $C(z)$ helyére pedig egyszerűen $C(w)$-t írunk. Ez egy folytonos szabályozótervezési feladat, amit egy $C(w) \rightarrow C(z)$ transzformáció követ.

Véges beállású szabályozó tervezése

A véges beállású szabályozó a kimenet hibamentes beállását a mintavételi idő egész számú többszöröse alatt biztosítja. Először megtervezzük az egyetlen mintavételi idő alatt beálló szabályozót (probléma: hatalmas bemenőjelek kellhetnek), majd a beállási időt növeljük (de véges értéken tartva azt). A tervezés végig a z tartományban történik.

Tervezés: Először meghatározzuk a D/A tartószerv és $P(s)$ együttes mintavételes alakját, $P(z)$-t. Ha ez megvan, megtervezzük a $C(z)$ szabályozót, majd ellenőrizzük a zárt kör működését.

Egylépéses szabályozó:

$$\frac{C(z)P(z)}{1+C(z)P(z)} = z^{-1}$$

Többlépéses szabályozó:

$$P(z) := \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$B(z) := B_1(z)B_2(z)$$

Itt $B_2(1) = 1$ és $B_1(z)$ tartalmazza a kompenzálható gyököket.
Innen:

$$\frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} = B_2(z)z^{-k}$$

$$C(z) = \frac{A(z)}{B_1(z)[z^k - B_2(z)]}$$

Mintavételes szabályozó tervezése a kisfrekvenciás közelítés Tuschák-módszere alapján

A mintavételezés és a zérusrendű tartószerv alkalmazása úgy tekinthető, mintha járulékos holtidő lépne fel a rendszerben.

Mintavételes egytárolós tag: egy $\frac{K}{1+sT}$ átviteli függvényű folytonos szakasz nulladrendű tartóval együttesen vett átviteli függvénye:

$$H_T(z) = \frac{1 - e^{-T_s/T_1}}{z - e^{-T_s/T_1}}$$

Mintavételes integrátor:

$$H_I(z) = K\frac{T_s}{z - 1}$$

Tervezés: Célszerű a $P(z)$ átviteli függvénye alapján diszkrét PID szabályozó algoritmust tervezni. A tervezés póluskiejtéses technikán alapul, azaz kiejtjük a rendszer kedvezőtlen pólusait, és megfelelő pólusokat hozunk be helyettük.

A tárolós jellegű szakaszok átviteli függvényeinek nevezője $(z - e^{-T_s/T_1})(z - e^{-T_s/T_2})\ldots$ alakú.

P szabályozó: $C(z) = A$
PI szabályozó: kiejtjük a legnagyobb időállandót.

$$C(z) = A\frac{z - e^{-T_s/T_1}}{z - 1}$$

PD szabályozó: azt a tagot ejtjük ki, ami a -20dB/dekádból -40-et csinál (általában a második legnagyobb T_i).

$$C(z) = A\frac{z - e^{-T_s/T_2}}{z}$$

PID szabályozó: az előző kettő együtt.

$$C(z) = A\frac{(z - e^{-T_s/T_1})(z - e^{-T_s/T_2})}{(z - 1)z}$$

Az előzőekben az A-t úgy kell megválasztani, hogy a fázistöbblet az előírt $60°$ legyen.

Holtidős rendszer szabályozása Smith prediktorral

Smith prediktor: alapötlete, hogy a holtidős rendszert hatásvázlat átalakítással olyan struktúrává alakítjuk, ahol a holtidő a zárt körön kívül jelenik meg.

Tervezés: Ha van egy holtidős, mintavételes $W_p e^{-sT_h}$ folyamatunk, akkor tervezünk a W_p-hez egy W_c mintavételes szabályozót (pl. Tustin-módszerrel), majd ebből a holtidős rendszer szabályozóját a következő összefüggés adja:

$$W_{cSmp} = \frac{W_c}{1 + (1 - e^{sT_h}) W_c W_p}$$

Mintavételezési idő megválasztása: erre egy jó gyakorlati szabály, hogy legyen kisebb (pl. fele, harmada) a legkisebb időállandónál. Célszerű úgy felvenni, hogy a holtidő a mintavételezési idő egész számú többszöröse legyen.

2DF tervezés

2DF rendszer: Két szabályozót tartalmaz (előszűrő és visszacsatolás). A három szabályozási követelmény szétválasztható segítségével, a zavarelhárítás és a robusztusság a visszacsatolással valósítható meg, míg az alapjelkövetés (szervó) az előszűrővel tartható kézben. Először a visszacsatolást kell megtervezni.

Tervezés: mintavételesen szabályozunk, legyen a nulladrendű tartó és a $P(s)$ folyamat együttes átviteli függvénye $P(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, az előszűrő legyen $\frac{T(z)}{R(z)}$, a visszacsatolás pedig $\frac{S(z)}{T(z)}$. Így a szabályozó egyenlete:

$$u[k] = \frac{T(z)r[k] - S(z)y[k]}{R(z)}$$

Feltételi egyenlet: az $\{R(z), S(z), T(z)\}$ polinomhármassal jellemzett szabályozó feltételi egyenlete:

$$\frac{A_m(z)}{B_m(z)} \frac{A_0(z)}{A_0(z)} = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$$

Jelöljük $B(z)$ nem kompenzálandó gyökeit $B^-(z)$-vel. Ekkor a megoldandó diofantoszi ($AX + BY = C$ alakú) egyenlet:

$$A(z)R'(z) + B^-(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)$$

Állapotvisszacsatolásos szabályozó (folytonos)

Elve: Az állapotváltozókat visszacsatoljuk a bemenetre (az $\dot{x} = Ax + Bu$-t csatoljuk vissza az u bemenetre), és így állítjuk be a pólusokat olyanokra, mint amiket soros kompenzációval állítanánk be. Előnye, hogy kézbentartjuk az állapotváltozók időbeli lefolyását. Hátránya, hogy csak gyorsító hatást lehet elérni, integráló hatást nem.

Ábra: először az eredeti átviteli függvényt átrajzoljuk integrátoros alakba (úgy, hogy csak integrátorok és konstans erősítések legyenek az ábrán), és az integrátorok kimeneteit elnevezzűk x_i-nek, a bemeneteiket pedig $\dot{x}_i$-nek, ahol x_i-k az állapotváltozók. Ezután minden integrátor kimenetét visszakapcsoljuk (pozitív visszacsatolással) egy K_i erősítéssel a bemenetre.

Visszacsatoló mátrix: a K_i értékekből alkotott K vektor.

Ackermann formula (folytonos): a K mátrix meghatározása egy adott rendszernél (C_o az irányíthatósági mátrix):

$$K = [0 \ \dots \ 0 \ 1] \cdot C_o^{-1} \cdot \varphi_{closed}(A)$$
$$\varphi_{closed}(s) = \det(sI - (A - BK))$$

Állapotvisszacsatolásos szabályozó (diszkrét)

Állapotegyenletek: zérusrendű tartó alkalmazásával az állapotegyenletek (A_d, B_d, C_d, D_d):

$$x[k+1] = e^{At}x[k] + A^{-1}(e^{At} - I)Bu[k]$$

$$y[k] = Cx[k] + Dx[k]$$

Ackermann formula (diszkrét): a K mátrix meghatározása egy adott rendszernél (C_o az irányíthatósági mátrix):

$$K = [0 \ \dots \ 0 \ 1] \cdot C_o^{-1} \cdot \alpha_{closed}(A_d)$$

$$\alpha_{closed}(z) = \det(zI - (A_d - B_dK)) = (z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_n)$$