Számításelmélet II. félév I. ZH tételei

Binzberger Viktor

1999. április 21.

Euler- és Hamilton-körök

DEFINÍCIÓ *G-ben* **Euler-kör** *egy olyan zárt séta, amely minden élen pontosan egyszer halad át. G-ben* **Euler-út** *egy olyan nem zárt séta, ami minden élen pontosan egyszer halad át.*

TÉTEL *Egy G gráfban akkor és csak akkor van Euler-kör, ha G minden pontjának fokszáma páros.*

TÉTEL *Egy G gráfban akkor és csak akkor van Euler-út, ha két fokszám páratlan, a többi páros.*

DEFINÍCIÓ *Egy G gráfban* **Hamilton-körnek** *nevezünk egy kört, ha G minden pontját pontosan egyszer tartalmazza. Egy utat* **Hamilton-útnak** *nevezünk, ha G minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.*

.1 Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére

TÉTEL *Egy G gráfban csak akkor létezik Hamilton-kör, ha G-ből tetszőleges k db csúcsot elhagyva a megmaradó gráf komponenseinek a száma* $\leq k$.

.2 Elégséges feltételek Hamilton-kör létezésére

TÉTEL (DIRAC) *Ha egy n csúcsú G gráfnak minden csqucsának a fokszáma* $\geq n/2$, *akkor G-ben van Hamilton-kör.*

TÉTEL (ORE) *Ha G-ben minden olyan x,y* $\in V(G)$ *amire x,y* $\notin E(G)$ *igaz az, hogy d(x)+d(y)* $\geq n$ *akkor G-ben van Hamilton-kör.*

TÉTEL (PÓSA) *Ha G fokszámai* $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, *és* $\forall k < n/2$*-re teljesül* $d_k \geq k+1$, *akkor G-ben van Hamilton-kör.*

TÉTEL (CHVÁTAL) *Ha G fokszámai* $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, *és minden k-ra - amelyre* $d_k \leq k < n/2$ *- teljesül, hogy* $d_{n-k} \geq n-k$, *akkor G-ben van Hamilton-kör.*

Párosítások

Definíció *G* **páros gráf**, *ha pontjainak V(G) halmaza felosztható A és B diszjunkt halmazokra úgy, hogy G minden élének egyik végpontja A-ban, másik végpontja B-ben van. Jele: G=(A,B)*

Tétel *Egy G gráf akkor és csak akkor páros gráf, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.*

Definíció *(Részleges)* **párosításnak** *nevezünk egy M élhalmazt, ha semelyik élnek sincs közös pontja.*

Egy párosítast **teljes párosításnak** *nevezünk, ha a gráf minden pontját lefedi*

Jelölés *N(X)-szel jelöljük egy X* $\subseteq$ *V(G) ponthalmaz szomszédainak halmazát*

Tétel (Hall-feltétel) *Egy G=(A,B) páros gráfban akkor és csak akkor van A-t lefedő párositas, ha minden* $X \subseteq A$ *részhalmazra* $\mid N(X) \mid \geq \mid X \mid$

Tétel (Frobenius) *Egy G=(A,B) páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha* $\mid A \mid = \mid B \mid$ *és* $\mid N(X) \mid \geq \mid X \mid$.

Jelölés *:*
$\alpha(G)$ *- független pontok maximális száma*
$\tau(G)$ *- lefogó pontok minimális száma*
$\mu(G)$ *- független élek maximális száma*
$\rho(G)$ *- lefogó élek minimális száma*

Tétel (Gallai) $\tau(G) + \alpha(G) = \mid V(G) \mid$ *minden hurokmentes G gráfra.*

Tétel (Gallai) $\mu(G) + \rho(G) = \mid V(G) \mid$ *minden G gráfra, amelyben nincs izolált pont.*

Tétel (König) *Páros gráfban* $\tau(G) = \mu(G)$, *azaz a lefogó pontok minimális száma egyenlő a függetlenélek maximális számával. Ha G-ben nincs izolált pont, akkor* $\alpha(G) = \rho(G)$ *is teljesül.*

Gráfok színezése

.1 Alsó és felső korlátok

Definíció *Egy gráf kromatikus száma az a legkisebb szám, ahány színnel a gráf pontjai kiszínezhetők úgy, hogy minden két szomszédos pont színe különböző. Jele:* $\chi(G)$

Definíció *Egy gráf klikkszáma a benne lévő legnagyobb teljes részgráf csúcsainak a száma. Jele:* $\omega(G)$

Tétel $\chi(G) \geq \omega(G)$

TÉTEL (MYCIELSKY KONSTRUKCIÓJA) *Minden* $k \geq 2$*-re létezik olyan G gráf, hogy* $\omega(G) = 2$ *és* $\chi(G) \geq k$

JELÖLÉS $\Delta(G)$ *a G legnagyobb fokszáma*

TÉTEL *Minden gráfra* $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

TÉTEL (BROOKS) *Ha G összefüggő egyszerű gráf és nem* K_n *vagy páratlan hosszú kör, akkor* $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

TÉTEL (NÉGYSZÍNTÉTEL) *Minden síkgráfra* $\chi(G) \leq 4$

DEFINÍCIÓ *Egy gráf kromatikus indexe az a legkisebb szám, ahány színnel a gráf élei kiszínezhetők úgy, hogy minden két csatlakozó él színe különböző. Jele:* $\chi'(G)$

TÉTEL *Minden gráfra* $\chi'(G) \geq \Delta(G)$

TÉTEL (VIZING) *Minden egyszerű gráfra* $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Perfekt gráfok

DEFINÍCIÓ *G(V,E) gráfnak* **feszített részgráfja** *G'(V',E'), ha* $V' \subseteq V$, *és* $E' \subseteq E$ *az összes olyan élet tartalmazza, aminek mindkét végpontja V'-ben van.*

DEFINÍCIÓ *G gráf perfekt, ha minden G' feszített részgráfjára* $\chi(G) = \omega(G)$

TÉTEL (LOVÁSZ) *G akkor és csak akkor perfekt, ha* $\bar{G}$ *is az.*

TÉTEL (LOVÁSZ) *G akkor és csak akkor perfekt, ha minden G' feszített részgráfjára* $\alpha(G')\omega(G') \geq | V(G) |$

Hálózati folyamok

DEFINÍCIÓ **Hálózat:** *N=(G,s,t,c)* $s, t \in V(G) c : E(G) \rightarrow \mathbf{R}_+$
G - irányított grf́
s - forrás
t - nyelő
c - élekhez kapacitást rendelő függvény

DEFINÍCIÓ **Megengedett folyam** *egy olyan, élekhez folyamértékeket rendelő f függvény, amire a kapacitáskorlát és a csomóponti törvény teljesül, azaz*

$f : E(G) \rightarrow \mathbf{R}_{0,+}$
$\forall e \in E(G) : f(e) \leq c(e)$
$\forall v \in V(G) \backslash \{s, t\} \sum f(e)_{e=(.,v)} = \sum f(e)_{e=(v,.)}$

DEFINÍCIÓ *Az f folyam értéke a forrásból kifutó (nyelőbe befutó) élek folyamértékeinek összege.*

Definíció *Egy (G,s,t,c) hálozat (s,t) vágása egy olyan tartalmazásra nézve minimális élhalmaz (ennél kisebb már nem rendelkezik a tulajdonsággal), amelyhez tartozó éleket elhagyva G-ből G két komponensre esik, továbbá s és t a két különböző komponensbe kerül.*

Tétel (Ford-Fulkerson) *Egy hálózatban a maximális folyamérték egyenlő a minimális (s,t) vágásával*