

(P2) $(1+x)y' + y^2 = 0$
 $x = t \cdot e^t$
 $y = e^{-t}$
 $t < -1$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-e^{-t}}{e^t + t \cdot e^t}$$

$$(1 + t \cdot e^t \cdot e^{-t}) \cdot \frac{-e^{-t}}{e^t + t \cdot e^t} + e^{-2t} = 0$$

$$-e^{-2t} + e^{-2t} = 0 \quad \checkmark$$

(P2) $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$
 $y \neq 0$
 $\frac{y'}{y^4} + \frac{y}{x y^4} = x^2$
 $(\frac{1}{y^3})' = -\frac{3}{y^4}$
 $-\frac{1}{3} (\frac{1}{y^3})' + \frac{1}{x y^3} = x^2$

$$-\frac{1}{3} u' + \frac{u}{x} = x^2$$

Rejt:

Numerikus sorok

(P2) a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+5} \right)^{n^2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+5} \right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+5} \right)^{n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{e^{-2}}{e^5} = e^{-7} \neq 0 \Rightarrow \text{a sor divergens}$$

Gyökteszt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-7} < 1$
 $\Downarrow$
 konv.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2-2}{n^2+5} \right)^{n^2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$
 $\Downarrow$ nem elegendő
 $b_n \rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow$ a sor divergens

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n^2} + (\frac{1}{2})^n}{(2n)! + 3n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 9 \cdot 3^n + 3^n}{(2n)!} = 11 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$

Hányados krit: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1 \Rightarrow$ konv.
 az eredeti is konv.

Rekurzív sorozatok

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2}$$

generátor f: $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

$$g(x) = a_0 + a_1 x + C_1 x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + C_2 x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$g(x) = a_0 + a_1 x + C_1 x (g(x) - a_0) + C_2 x^2 g(x)$$

$$g(x) (1 - C_1 x - C_2 x^2) = A + Bx$$

$$g(x) = \frac{A+Bx}{1-C_1 x - C_2 x^2} = \frac{M}{1-Kx} + \frac{N}{1-Lx} = M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} K^n x^n + N \cdot \sum_{n=0}^{\infty} L^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (M K^n + N L^n) x^n$$

$\Downarrow$
 $a_n = M K^n + N L^n$

(P2) $f(n) = 4f(n-1) - 3f(n-2)$

a) Adja meg a lin. rekurált kielégítő közös redukciósat

$$f(n) = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot \frac{1}{n}$$

b) Adja meg az $f(0)=2$ $f(1)=6$ -es a sor-t.

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 6 = 3C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 2 \quad C_2 = 0$$

c) Írja fel az közös $O(1)$ típusú megoldást.

$$f(n) = 2^n$$

$$2^n = 4 \cdot 2^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-2} \quad / : 2^{n-2} \quad 2 \neq 0$$

$$2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 0$$

$$2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 0$$

c) $f(n) = O(1)$ jelentése: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$
 I. levezetés: $|f(n)| \leq K \cdot 1 \Rightarrow f(n)$ -nek korlátosnak kell lennie.
 $C_1 = 0, C_2 \in \mathbb{R}$

10) $f(n+1) = \frac{5}{2} f(n) - f(n-1)$ -et rekurzív önmagában számolva.

b) Van-e $f(n) = O(1)$ tulajdonságú megoldás?

c) Adja meg az $f(0)=1$ $f(1)=5$ -höz a megoldást.

$f(n) = 2^n$

$2^{n+1} = \frac{5}{2} 2^n - 2^{n-1} \quad / : 2^{n-1}$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$
 $2^{n+2} = \frac{5 \pm 3}{4} \cdot 2^n \Rightarrow g_1 = 2$
 $g_2 = \frac{1}{2}$

$2g^2 - 5g + 2 = 0$

$f(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f(n) = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Van-e konstans megoldás?

$C_1 = 0$
 $C_2 \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 5 = 2C_1 + \frac{1}{2}C_2 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 10 = 4C_1 + C_2 \end{cases}$

$C_1 = 3 \quad C_2 = -2$

Függvények

11) Egyenletesen konvergencia a $(-\infty, \infty)$ intervallumon az alábbi függvények?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^4 x^2 + 1)}{n^3 + 2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n^5 x^3)}{n\sqrt{n} + 5}$

Weierstrass - kritérium:

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

$|f_n(x)| \leq a_n$ és $\sum a_n$ konvergens $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ egyenletesen konvergens

a) $|f_n(x)| = \left| \frac{\cos(n^4 x^2 + 1)}{n^3 + 2} \right| \leq \frac{1}{n^3}$

$\sum \frac{1}{n^3}$ konv. ($\alpha=3$) $\Rightarrow$ a f. egy. konv.

b) $|f_n(x)| = \left| \frac{\arctg(n^5 x^3)}{n\sqrt{n} + 5} \right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n\sqrt{n}}$

$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ konv. $\Rightarrow$ a f. egy. konv.

Hatványsorok

12) Állapítsa meg az alábbi sor konv. tart. dt. (K.T.)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} (x-1)^n$

$\sum a_n \cdot (x-x_0)^n \sim \sum q^n (x-x_0)^n = \sum (q(x-x_0))^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2 \quad a_n \sim 2^n \quad \text{konvergens ha } |q(x-x_0)| < 1$

$|x-x_0| = R$ esetet külön kell vizsgálni.

$|x-x_0| < \frac{1}{2}$

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

1 középpontú 2 sugarú
 1 dimenziós gömb.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot 2 = 2$

$|x-x_0| = 2 \Rightarrow x_1 = -1$
 $x_2 = 3$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \cdot (-2)^n = \sum \frac{1}{n}$ div

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \cdot 2^n = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ konv. (Leibniz sor)

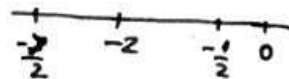
K.T: $(-1, 3]$

Hatványsorok

(P) Állapítsa meg az alábbiakon konvergenciaátmenetét

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+4)^n}{n^2 \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \cdot n^2} (n+2)^n$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n \cdot 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot \sqrt[n]{3}} = \frac{1}{2}$$



$$x = -\frac{3}{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 \cdot 3^n} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ Konv, mert Leibniz-sor.}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 \cdot 3^n} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ Konv, mert } \sum \frac{1}{n^2} \text{ Konv, ha } \alpha > 1 \quad \alpha = 2$$

K.T. $\left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$

(P) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot x^{3n} = \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{2}{2^2} \cdot x^6 + \frac{3}{2^3} \cdot x^9 \quad R = ?$

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } 3 \nmid n \\ \frac{n}{2^{n/3}}, & \text{ha } 3 \mid n \end{cases}$$

Törődési pontjai: $0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0, & \text{ha } 3 \nmid n \\ \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[3]{2}}, & \text{ha } 3 \mid n \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \sqrt[3]{2}$$

Vagy: $x^3 = y$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot y^n$ konvergens, ha

$$\frac{1}{R_y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow R_y = 2 \Rightarrow A \text{ sor konvergens, ha}$$

(H.F.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n} \cdot (x-2)^{2n} \quad R = ? \quad (-1, 5)$

$$|y| \leq 2 \\ |x^3| < 2 \\ |x| < \sqrt[3]{2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{2}$$

Hatványsorok összegfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x^0 + x^{0+1} + x^{0+2} + \dots = x^0 (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^0}{1-x} \quad |x| < 1$$

(P) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

$$x f(x) = \int_0^x \left(\frac{d}{dt} f(t) \right) dt = \left(x f(x) - \frac{0 \cdot f(0)}{0} \right)$$

$$x f(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = \int_0^x \frac{t-1+1}{1-t} dt = \int_0^x -1 + \frac{1}{1-t} dt = -t - \ln|1-t| \Big|_0^x = -x - \ln(1-x) - [0 - 0] = -x - \ln(1-x)$$

$$(x f(x))' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad x \in (-2, 2)$$

Ha $x \neq 0$ $f(x) = -x - \ln(1-x)$
Ha $x=0$ $f(x)=0$

Ábrák

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \frac{\ln(1-x)}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - \ln(1-x)}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \frac{1}{1-x}}{1} = 0$$

(H7) Igaz-e, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$?

(P) Írja fel az alábbi függvény összegfüggvényét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+1}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{x}{1-x} + f(x)$$

(P) Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+3) x^n$$

$$x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+3) x^{n+2} = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (n+3) x^{n+2} = \dots = \left(\frac{x^4}{1-x} \right)' = \dots$$

Taylor-polinom

a) Definálja az n -edrendű Taylor-polinomot.

b) Írja fel a def. segítségével az

$$f(x) = x^3 - 3 + \cos 3x$$

fü $x_0 = 0$ pontbeli negyedrendű Taylor-polinomját és a Lagrange-féle maradvagyot

c.) Legfeljebb mekkora hibát követhet el, ha $f(0.1)$ értéket $T(0.1)$ értékkel közelítjük?

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots$$

$$\text{Hiba: } f(x) - T_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot (x-x_0)^{k+1} \quad \xi \in (x, x_0) \text{ vagy } \xi \in (x_0, x)$$

$$x_0 = 0: f(x) = x^3 - 3 + \cos 3x$$

$$f(0) = 0 - 3 + 1 = -2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3\sin 3x$$

$$f''(x) = 6x - 9\cos 3x$$

$$f'''(x) = 6 + 27\sin 3x$$

$$f^{(4)}(x) = 81\cos 3x$$

$$f^{(5)}(x) = -243\sin 3x$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -9$$

$$f'''(0) = 6$$

$$f^{(4)}(0) = 81$$

$$f^{(5)}(0) = 0$$

$$T_4(x) = -2 - \frac{9}{2} x^2 + \frac{6}{6} x^3 + \frac{81}{24} x^4$$

$$H = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{-243 \cdot \sin 3\xi}{120} x^5$$

$$c.) x = 0.1$$

$$|H| \leq \frac{243 \cdot \sin 3\xi}{120} \cdot 0.1^5 \leq \frac{729}{120} \cdot 0.1^6$$

$$\xi \in [0; 0.1]$$

$$\sin 3\xi < 3\xi$$

Taylor-sor

2) Adja meg az alábbi f-v-ek $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését és annak k-t-át.

$$f(x) = \frac{1}{x+7} \quad g(x) = \frac{x+2}{x+7} \quad h(x) = \frac{3x^4}{x+7}$$

$$f(x) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{7}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x}{7})} = \frac{1}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{7}\right)^n = \frac{1}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^n} x^n$$

$$\left|\frac{x}{7}\right| < 1$$

$$KT: |x| < 7$$

OTF:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \Big|_{x=0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin 0 = 0 \\ \cos 0 = 1 \\ -\sin 0 = 0 \\ -\cos 0 = -1 \\ \sin 0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{ha } n = 2k+1 \text{ alakú} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

$$g(x) = \frac{x+7-5}{x+7} = 1 + \frac{-5}{x+7} = 1 - \frac{5}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^n} x^n$$

$$KT: |x| < 7$$

$$h(x) = 3x^4 f(x) = \frac{3}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^n} x^{n+4}$$

$$KT: |x| < 7$$

Taylor sorok

1) Írja fel az f függvény x_0 pont körüli Taylor sorát és adja meg a sor KT-t.

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

a) $x_0 = 2$

b) $x = -5$

$$\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$$

$$\frac{1}{1-q} = \sum q^n$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x-2)+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x-2}{4}\right)+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-2}{4}\right)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{4}\right)^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} (x-2)^n$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x-(-5))+3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x+5}{3}\right)} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+5}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3^{n+1}} (x+5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x+5)^n$$

$$\left| -\frac{x-2}{4} \right| < 1 \quad \left| \frac{x+5}{3} \right| < 1$$

$$|x-2| < 4 \quad R=4$$

$$|x+5| < 3 \quad R=3$$

$$-2 < x < 6$$

$$-8 < x < -2$$

2) a) Írja fel az $f_1(x) = \frac{1}{x+3}$ függvény $x_0 = 0$ bázisponti Taylor-sorfejtését $R_1 = ?$

b) f_1 sorfejtésére támaszkodva írja fel $f_2(x) = \ln(x+3)$ $R_2 = ?$ és $f_3(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$ $R_3 = ?$ sorfejtését.

$$f_1(x) = \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{x}{3}+1} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n \quad R_1 = 3$$

$$\left| \frac{x}{3} \right| < 1$$

$$f_2'(x) = f_1(x)$$

$$|x| < 3 \rightarrow R$$

$$\int_0^x f_1(x) = f_2(x) - f_2(0) = f_2(x) - \ln 3$$

$$f_2(x) = \ln 3 + \int_0^x f_1(t) dt = \ln 3 + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n dt = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \int_0^x t^n dt =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+1)} x^{n+1} \quad [0, x] \in (-3, 3)$$

$$f_3(x) = \frac{1}{(x+3)^3} \quad f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot f_1''(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n \right)'' = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x^n)'' =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} n(n-1) x^{n-2} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{k+2}}{3^{k+3}} (k+2)(k+1) x^k \quad R_3 = 3$$

3) Tudjuk, hogy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad R=1$$

a) Írja fel az $f(x) = \ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right)$ függvény $x_0 = 0$ bázisponti Taylor-sorát. $R = ?$

b) Az a)-beli sorfejtést használva adja meg az $\int \ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right) dx$ integrál értékét az f függvény megfelelő Taylor-polinomjával felhasználásával, és becsülje meg a hibat.

$$\ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right) = \left(\frac{x^2}{3}\right) - \frac{\left(\frac{x^2}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x^2}{3}\right)^3}{3} - \dots$$

$$\ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{x^2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n} x^{2n} \quad \left| \frac{x^2}{3} \right| < 1$$

$$[0, 1] \subset (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \quad \int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{2 \cdot 3^2} + \frac{x^6}{3 \cdot 3^3} - \dots \right) dx = \frac{x^3}{3 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 2 \cdot 3^2} + \frac{x^7}{7 \cdot 3 \cdot 3^3} - \dots$$

$$\approx \frac{1}{3 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 3^2}$$

$$\text{Leibnitz-típusú sor: } |x| < \int_0^1 \frac{x^k}{3^{k/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$R = \infty \quad K.T. = \mathbb{R}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{Re}(e^{ix})$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{ix})$$

(P2) Írja fel az alábbi f-ek x_0 pontbeli Taylor-sorát, és adja meg a KT-t.

a.) $f_1(x) = \sin 3x^2 \quad x_0 = 0$

c.) $f_3(x) = \sinh 2x^4 \quad x_0 = 0$

b.) $f_2(x) = e^{4x} \quad x_0 = 0 \quad x_0 = 3$

d.) $f_4(x) = e^{-3x} \cdot \cosh 5x \quad x_0 = 0$

a.) $\sin u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} u^{2k+1} \Big|_{u=3x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot 3^{2k+1} \cdot x^{4k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 3 \cdot 9^k}{(2k+1)!} \cdot x^{4k+2}$
 $x \in \mathbb{R}$

b.) $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \Big|_{u=4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} x^n \quad x \in \mathbb{R}$

$e^{4x} = e^{4(x-3)+12} = e^{12} \cdot e^{4(x-3)} = e^{12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} (x-3)^n$

c.) $\sinh 2x^4$

$\sinh u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} \Big|_{u=2x^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1} \cdot x^{8k+4}}{(2k+1)!} \quad x \in \mathbb{R}$

d.) $e^{-3x} \cdot \cosh 5x = e^{-3x} \cdot \frac{e^{5x} + e^{-5x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (e^{2x} + e^{-8x}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 8^n \cdot x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n + (-1)^n \cdot 8^n}{n!} \cdot x^n$

HF: Határozza meg a kör. szögfüggvények pontos értékeit:

a.) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!}$

b.) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!}$

c.) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$

d.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Binomiális sorfejtés:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$$

12) Írja fel az $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{32-2x^2}}$ $R=1$ $x_0=0$ közeponti Taylor-sorát és a sor konvergencia-sugarát.

$$a_8 = ? \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f^{(26)}(0) = ? \quad f^{(25)}(0) = ?$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{32-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32}} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{x^2}{16}}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(-\frac{x^2}{16}\right)\right)^{-1/5} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/5}{k} \left(-\frac{x^2}{16}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \binom{-1/5}{k} \frac{(-1)^k}{16^k} x^{2k}$$

$$-\frac{x^2}{16} = u$$

$$\left| -\frac{x^2}{16} \right| < 1 \Rightarrow |x| < 4 \Rightarrow R=4$$

$a_8 = x^8$ együtthatója

$$2k=8 \Rightarrow k=4$$

$$a_8 = \frac{1}{2} \cdot \binom{-1/5}{4} \cdot \frac{(-1)^4}{16^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1/5)(-6/5)(-11/5)(-16/5)}{4!} \cdot \frac{1}{16^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow f^{(26)}(0) = 26! \cdot a_{26} = \frac{1}{2} \binom{-1/5}{13} \frac{(-1)^{13}}{16^{13}} \cdot 26$$

$$\frac{26!}{16^{13}}$$

$$f^{(25)}(0) = 25! \cdot a_{25} = 0$$

, mert x^{25} együtthatója 0 (csak páros elemek vannak benne)

13) Írja fel a $g(x) = \frac{2x^3}{\sqrt[5]{32-2x^2}}$ $x_0=0$ közeponti Taylor-sorát és a konv. sug.

$$g^{(102)}(0) = ?$$

$$g^{(103)}(0) = ?$$

$$g(x) = 2x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{32-2x^2}} = 2x^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \binom{-1/5}{k} \frac{(-1)^k}{16^k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/5}{k} \frac{(-1)^k}{16^k} x^{2k+3}$$

$$\sum a_n x^n = \sum \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \quad g^{(n)} = a_n \cdot n!$$

$$g^{(102)}(0) = 102! \cdot a_{102} = 0$$

$$a_{102} = 0, \text{ mert } x^{102} \text{ együtthatója } 0. \quad (2k+3=2k \text{ sz})$$

$$g^{(103)}(0) = 103! \cdot a_{103} = \binom{-1/5}{50} \frac{(-1)^{50}}{16^{50}} \cdot 103!$$

$$a_{103} = \binom{-1/5}{50} \frac{(-1)^{50}}{16^{50}}$$

⑧ $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx \approx ?$ Az integrandusz 8-adfokú Taylor-polinomjával közelít és becsülje meg a hibát.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^{4n} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 - \frac{5}{16}x^{12} + \dots$$

bin.raf. $|x^4| < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow R=1$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx = \left[x - \frac{1}{2 \cdot 5} x^5 + \frac{3}{8 \cdot 8} x^9 - \frac{5}{16 \cdot 13} x^{13} + \dots \right] \Big|_{x=0}^{1/2} =$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{3}{72} \cdot \frac{1}{2^9}$$

$$|H| \leq \frac{5}{16 \cdot 13 \cdot 2^{13}}$$

Leibniz-típusú

22 $f(x,y) = (2x-y)^4 + 4x^3 - 8y^2$

Kérdések: kedd 14-16

a) $f'_x(x,y) = ?$ $f'_y(x,y) = ?$

b) Hál deriválható totálisan függvény?

c) Számítsa ki a másodrendű deriváltakat

a) $f'_x = 4 \cdot (2x-y)^3 \cdot 2 + 12x^2 = 0$

$f'_y = 4 \cdot (2x-y)^3 \cdot (-1) + 0 - 16y$

b) mindenütt totálisan deriválható, mert a parciális deriváltak mindenütt léteznek és folytonosak.

c) $f''_{xx} = 24 \cdot (2x-y)^2 \cdot 2 = 24x$

$f''_{xy} = f''_{yx} = 24 \cdot (2x-y)^2 \cdot (-1)$

$f''_{yy} = -12 \cdot (2x-y)^2 \cdot (-1) - 16$

22 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-2)y^2}{x^2+y^2} + 6x+3y, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) $f'_x(x,y) = ?$ $f'_y(x,y) = ?$

b) Hál deriválható f differenciálható f?

$(x,y) \neq (0,0)$ $f'_x = \frac{y^2 \cdot (x^2+y^2) - (x-2)y^2(2x)}{(x^2+y^2)^2} + 6$

$f'_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0^2}{h^2} + 6h - 0 = 6$

$(x,y) \neq (0,0)$ $f'_y = \frac{(x-2)2y(x^2+y^2) - (x-2)2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} + 3$

$f'_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{2h^2}{h^2} + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{2}{h} + 3 = \frac{0}{0}$

b) $f(0,0)$ -ben nem diffható, mert $f'_y(0,0)$ -ben nem létezik.

Mindenütt másutt diffható.

⑧ $f(x,y,z) = x^3 + y^4 + x^2 y e^{2z}$

a) $\text{grad } f(-1, 1, 0) = ?$ Milyen létezik?

b) $f'''_{xxz} = ?$ $f'''_{xzx} = ?$

$\text{grad } f(-1, 1, 0) = f'_x(-1, 1, 0) \underline{i} + f'_y(-1, 1, 0) \underline{j} + f'_z(-1, 1, 0) \underline{k}$
 $= [f'_x(-1, 1, 0), f'_y(-1, 1, 0), f'_z(-1, 1, 0)]$

a) $f'_x = 3x^2 + 2xy e^{2z}$

$f'_y = 4y^3 + x^2 \cdot e^{2z}$

$f'_z = x^2 y \cdot e^{2z} \cdot 2$

$\text{grad } f(-1, 1, 0) = (3 + (-2)) \underline{i} + (4 + 1) \underline{j} + (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2) \underline{k}$
 $= \underline{i} + 5 \underline{j} + 2 \underline{k}$

$\text{grad } f(-1, 1, 0) \exists$, mert a parciális deriváltak léteznek és folytonosak.

⑨ b.) $f'''_{xxz} = 2y e^{2z} \cdot 2 = 4y e^{2z}$

$f'''_{xzx} = 6x + 2y e^{2z}$

$f''_{xz} = 4xy e^{2z}$

$f'''_{xzx} = 4y e^{2z}$ ugyanaz.

Érintő, differenciál, irány menti derivált.

⑩ $f(x,y) = 3y + e^{xy^2} - 2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ $P_0(x,y)$

a) $f'_x(x,y) = ?$ $f'_y(x,y) = ?$ $y \neq 0$

b) Írja fel a fu P_0 pontjában érintő egyenletét

c) $df(P_0, (h,k)) = ?$

d) $\frac{df}{d\underline{e}} \Big|_{P_0}$ $\underline{e} \parallel \underline{z} = \underline{z}$

e) $\max_{\underline{e}} \frac{df}{d\underline{e}} \Big|_{P_0} = ?$ $\min_{\underline{e}} \frac{df}{d\underline{e}} \Big|_{P_0} = ?$ és adja meg a min/max irányt

a) $f'_x = e^{xy^2} \cdot y^2 - \frac{2}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2y$

$f'_y = 3 + e^{xy^2} \cdot x - 2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - 2y \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$

b) $[1, 2, f'_x] \times [0, 1, f'_y] = \underline{m} = [f'_x, f'_y, -1]$

$m_1(x-x_0) + m_2(y-y_0) + m_3(z-z_0) = 0$

$z_0 = f(P_0)$

$f(0,1) = 3 + 1 = 4$

$f'_x(0,1) = 1 - 2 = -1$

$f'_y = 3$

$(-1) \cdot (x-0) + 3(y-1) - 1(z-4) = 0$

$-x + 3(y-1) = z-4$
 $\uparrow$ érintő m.é.

$f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0) = z-z_0$

"Ha megjegyezzük, hogy folytonos, és nem az, akkor tükör nyúl." Lőrinc

Ábrák: 5+1111111

c) $df(P_0, (h, k)) = h f'_x(0, 1) + k f'_y(0, 1) = (h, k) \cdot (f'_x, f'_y) =$
 $= -h + 3k$ A (h, k) -matti differenciálja az függvénynek.

d.) $\frac{df}{de} \Big|_{P_0} = \underline{e} \parallel 2i - 7j$
 $\underline{e} = e_1 f'_x(0, 1) + e_2 f'_y(0, 1) = \frac{2}{\sqrt{53}} \cdot (-1) - \frac{7}{\sqrt{53}} \cdot 3 = \frac{-23}{\sqrt{53}}$
 $\|\underline{e}\| = 1 \quad \underline{e} = \frac{2}{\sqrt{53}} i - \frac{7}{\sqrt{53}} j$
 $\|2i - 7j\| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$

e.) $\max_{\underline{e}} \frac{df}{de} \Big|_{P_0} = \langle \underline{e}, (f'_x(0, 1), f'_y(0, 1)) \rangle = |\underline{e}| \cdot |(f'_x(0, 1), f'_y(0, 1))| \cdot \cos \alpha$
 ↑
 Fővektor meg.

max: $\alpha = 0 \quad \cos \alpha = 1$

min: $\alpha = \pi \quad \cos \alpha = -1$

max irány: grad $f(0, 1) = (-1, 3)$

min. irány: -grad $f(0, 1) = (1, -3)$

19. $f \in C^2_{\mathbb{R}} \quad (f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ kétszer folytonosan differenciálható fr.})$

$g(x, y) = f(x^2 - y^3)$

Hat. meg g másodikrendű parciális deriváltjait.

$g(x, y) = f(t) \Big|_{t=x^2-y^3}$

$g'_x = f'(t) \Big|_{t=x^2-y^3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^3) = f'(x^2 - y^3) \cdot 2x$

$g'_y = f'(t) \Big|_{t=x^2-y^3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^3) = f'(x^2 - y^3) \cdot (-3y^2)$

$g''_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f'(x^2 - y^3) \right) 2x + f'(x^2 - y^3) \cdot \frac{\partial}{\partial x} 2x = (f''(x^2 - y^3) \cdot 2x) \cdot 2x + f'(x^2 - y^3) \cdot 2$

Ch. két fr. h. szorzata és az folyt. diff. ált. minéliszer szabvány szerint.

$g''_{xy} = g''_{yx} = 2x f''(x^2 - y^3) \cdot (-3y^2)$

$g''_{yy} = f''(x^2 - y^3) \cdot 9y^4 + -6y f'(x^2 - y^3)$

20. Tfr $g_1, g_2 \in C^2_{\mathbb{R}}$ ~~fr.~~ Biz. be, hogy a

$h(x, y) = x \cdot g_1(y - x) + y g_2(x - y)$ a

~~fr.~~ $h''_{xx} + 2h''_{xy} + h''_{yy} = 0$ parciális d.e-t.

$$h'_x(x,y) = g_1(y-x) + x g'_{1x}(y-x) (-1) + y g_2(x-y)$$

$$h''_{xx}(x,y) = g'_{1x}(y-x) \cdot (-1) + x g''_{1xx}(y-x) (-1)(-1) + g'_{1x}(y-x) (-1) + y \cdot g_2(x-y)$$

$$h''_{xy}(x,y) = g'_{1y}(y-x) \cdot (-1) + x g''_{1xy}(y-x) + y g'_{2y}(x-y) (-1) + g_2(x-y)$$

$$h'_y(x,y) = x \cdot g'_1(y-x) + y g'_2(x-y) \cdot (-1) + g_2(x-y)$$

$$h''_{yy}(x,y) = x \cdot g''_{1y}(y-x) + y \cdot g''_{2yy}(x-y) (-1)(-1) + g'_{2y}(x-y) (-1) + g'_{2y}(x-y) (-1)$$

Általános

10) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16+4x^2}}$

$x_0 = 0$ Taylor-sor. $R = ?$

$f^{(6)}(0) = ?$ $f^{(13)}(0) = ?$

Harmonikus sorfejtés: $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ $R=1$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{16+4x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+\frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^k} \cdot x^{2k}$

$\left|\frac{x^2}{4}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow R=2$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

$a_6 = \frac{f^{(6)}(0)}{6!}$
↳ x_0 együtthatója

$\binom{-1/4}{3} \frac{1}{2 \cdot 4^3} = \frac{f^{(6)}(0)}{6!}$

$2k = 6 \Rightarrow k = 3$

$f^{(6)}(0) = \frac{-\frac{1}{4} \cdot (-\frac{5}{4}) \cdot (-\frac{9}{4})}{3!} \cdot \frac{6!}{128}$

$f^{(3)}(0) = 0$, mert $a_3 = 0$ (x^2 együtthatója 0)

12)

$f(x) = x^3 e^{-2x}$

$x_0 = 0$

$g(x) = e^{-2x}$

$x_0 = 4$

$\int_0^{0.1} f(x) dx = ?$ $T_3(x)$ - mel közel.

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots$

$f(x) = x^3 \cdot \left(1 + (-2x) + \frac{(-2x)^2}{2!} + \frac{(-2x)^3}{3!} + \dots\right) = x^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2x)^k}{k!} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{k!} x^{k+3}$ $R = \infty$

$g(x) = e^{-2x} = e^{-2(x-4)+8} = e^8 \cdot e^{-2(x-4)} = e^8 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2(x-4))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^8 \cdot (-1)^k \cdot 2^k}{k!} \cdot (x-4)^k$

$\int_0^{0.1} f(x) dx = \int_0^{0.1} \left(\underbrace{\frac{(-1)^0 \cdot 2^0 \cdot x^3}{0!}}_{T_3(x) = x^3} + \underbrace{\frac{(-1)^1 \cdot 2^1 \cdot x^4}{1!}}_{\frac{x^5}{5}} + \dots \right) dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^{0.1} - \left. \frac{2x^5}{5} \right|_0^{0.1} + \dots \approx \frac{0.1^4}{4}$

deibnis-típusú

$|H| < \left| \frac{2x^5}{5} \right|_0^{0.1} = \frac{2 \cdot 0.1^5}{5}$

Extrémérték számítás

(P) $f(x,y) = (x-3y+3)^2 + (x-y-1)^2$

Keressük meg az f lok. szé. helyeit.

$$f'_x = 2(x-3y+3) + 2(x-y-1) = 0$$

$$4x - 8y + 4 = 0 \Rightarrow x = 2y + 1$$

$$f'_y = -3 \cdot 2(x-3y+3) + (-1) \cdot 2 \cdot (x-y-1) = 0$$

$$-8x + 20y - 16 = 0$$

$$x = \frac{5}{2}y - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 2y+1 = \frac{5}{2}y+2 \\ 4y+2 = 5y-4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2y+1 = \frac{5}{2}y+2 \\ 4y+2 = 5y-4 \end{array} \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2 \quad x = 3$$

$P(3,2)$ -ben lok. szé. hely. (min)

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2 & -8 \\ -8 & 20 \end{vmatrix} \leftarrow \Delta = 80 - 64 = 16 > 0$$

" $\Rightarrow$ lok. szé."

Az első főminor pozitív $\Rightarrow$ pozitív definit (az összes sajátérték pozitív)

$f''_{xx} = 4 \Rightarrow$ a sajátértékek pozitívak $\Rightarrow$ minimum van.

(P) $f(x,y) = (x-y+1)^2 - (x^2-2)^2$

"A kvantitatív számítás nem mond el semmit a határozatlansági elvről, csak furcsaságok."

lok. szé.?

$$f'_x = 2(x-y+1) - 2(x^2-2) \cdot 2x = 0$$

$$f'_y = 0 = 2(x-y+1) \cdot (-1) \Rightarrow x-y+1 = 0 \quad y = x+1$$

$$f'_y = \frac{2(x-(x+1)+1)}{0} - 2(x^2-2) \cdot 2x = 0$$

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0 & x_2 = \sqrt{2} & x_3 = -\sqrt{2} \\ y_1 = 1 & y_2 = 1+\sqrt{2} & y_3 = 1-\sqrt{2} \end{array}$$

$$f''_{xx} = 2 - (2(x^2-2) \cdot 2 + 2x \cdot 2 \cdot 2x) = -12x^2 + 10$$

$$f''_{xy} = -2 = f''_{yx}$$

$$f''_{yy} = +2$$

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 10-12x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 4x^2$$

$$\Delta(0,1) = 16 > 0$$

$$\Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}+1) = 16 - 48 < 0$$

$(0,1)$ helyen van lok. m.c.-e.

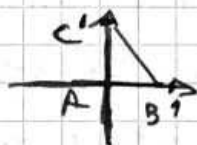
$$f''_{xx}(0,1) = 10 > 0 \Rightarrow \text{minimum van.}$$

(P) $f(x,y) = x^3 y^5$

a) Keressük meg az f fr abszolút szélsőértékét az $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ pontokkal kijelölt Δ alakú zárt halmazon.

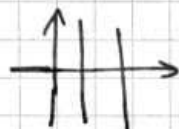
b) Kérdés: lehet-e f -nek, ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= 3x^2 y^5 = 0 \\ f'_y &= 5x^3 y^4 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x=0 \text{ vagy } y=0$$



Tehát $(x,0)$ és $(0,y)$ pontokban lehet lokális szélsőérték.

$$\left. \begin{aligned} f(x,y) &> 0 \text{ a tartomány belsejében.} \\ f(x,y) &= 0 \text{ a tengelyeken.} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \min_{x \in T} f = 0$$



↑ nem ilyen

Weierstrass II. t. $\Rightarrow f$ felveszi maximumát is (mivel T tart. korlátos és zárt)

A fr monoton (2D-ban) $\Rightarrow$ a maximuma csak a tart. élén veheti fel.

De a tengelyeken minimum van. $\Rightarrow$ márcsak $y = 1-x$ jöhet szóba.

$$g(x) = f(x, 1-x) = x^3(1-x)^5$$

$$g(0) = g(1) = 0 \Rightarrow \text{nem lehet maximum ott.}$$

$$x \in [0,1]$$

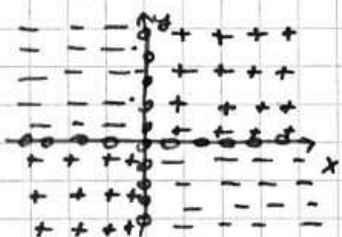
$$g'(x) = 3x^2(1-x)^5 + x^3(1-x)^4 \cdot 5 \cdot (-1) = (1-x)^4 x^2 [3(1-x) - 5x] = 0$$

$$\text{A keresett max. érték: } f\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3^5 \cdot 5^3}{8^5}$$

$$3-8x=0 \Rightarrow x=\frac{3}{8} \quad y=\frac{5}{8}$$

b) Csak a tengelyeken lehet lokális szélsőérték. ($f'_x=0$ vagy $f'_y=0$ csak ott teljesül)

$$\Delta(x,0) = \Delta(0,y) = 0 \quad (\text{innen nem tudjuk megmondani.})$$



Száll nem lehet lokális szélsőérték.

A tengelyek bármely pontjának tetszőleges környezetében a fr felvesz pozitív és neg. értéket is $\Rightarrow \nexists$ lok. szélsőérték.

Fourier-sor

1. f 2π szerint periodikus és $f \in \mathbb{R}[0, 2\pi]$, akkor f Fourier sora $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k=1, 2, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos lx \, dx = \delta_{k,l}$$

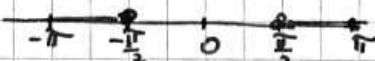
$\downarrow$
1, ha $k=l$
0, ha $k \neq l$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin lx \, dx = \delta_{k,l}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos lx \, dx = 0$$

itt aludtam, mert az első, hogy
hiszen azonnal valahányszor
szingulárisok!

$$a = -\pi$$



Így fel a 2 első négy rész nem 0 tagját.

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & \text{ha } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 0x \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = 0, \text{ mert a sin fr integrálja}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 5 = 5$$

$\cos(0x) \equiv 1$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 1x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \cos kx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 \cdot \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left[5 \cdot \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot 5 \cdot \frac{\sin k \cdot \frac{\pi}{2}}{k}$$

$$\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k=2l \\ 1, & \text{ha } k=4l+1 \\ -1, & \text{ha } k=4l+3 \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi} \left(\frac{1}{1} \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + \dots \right)$$

2. $f(x)$ ha $ax \leq 2\pi$

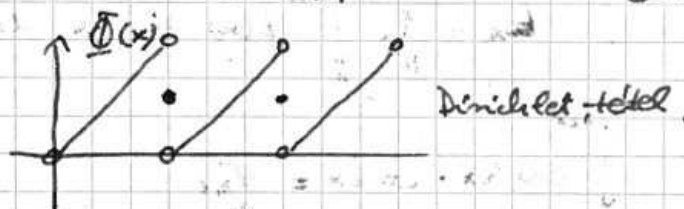
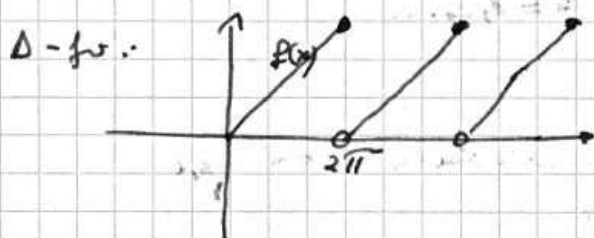
$$f(x+2\pi) = f(x) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

a) Hat. meg f Fourier-sorát. Jelölje a sor összegfüggvényét $\Phi(x)$

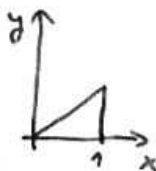
$$f(x) = \Phi(x) \text{ milyen } x\text{-ekre igaz?}$$

Egyenletesen konv.-e a Fourier-sor?

b) A Fourier-sor regitragénél hat meg a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ numerikus sor összegét



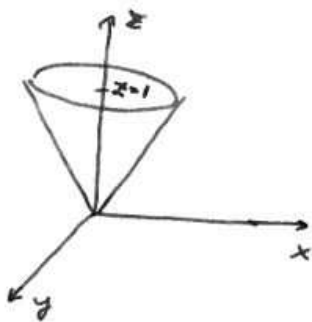
② $I = \int_V xy^2z^3 dV = ?$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ y=0 \\ y=x \end{array} \right\} \text{ side}$$


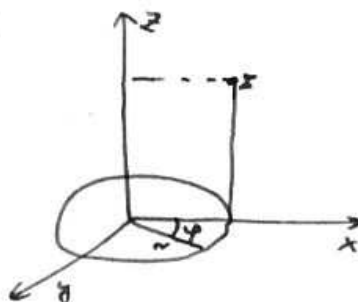
$$I = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^{xy} xy^2 z^3 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^x \left[\frac{z^4}{4} xy^2 \right]_{z=0}^{xy} dy \, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^x x^5 y^6 dy \, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left[\frac{x^5 y^7}{7} \right]_0^x dx = \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{28} \left[\frac{x^{13}}{13} \right]_0^1 = \frac{1}{364}$$

Q2) $\int \sqrt{x^2 + y^2} dV = ?$

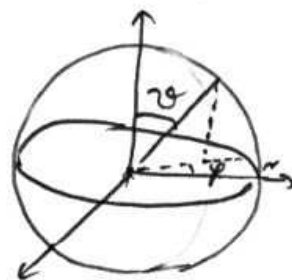
$V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (Lip)
 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



henger kaard,



Gömb szand:



henger. k. r.:

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos \varphi \\y &= r \cdot \sin \varphi \\z &= z\end{aligned}$$

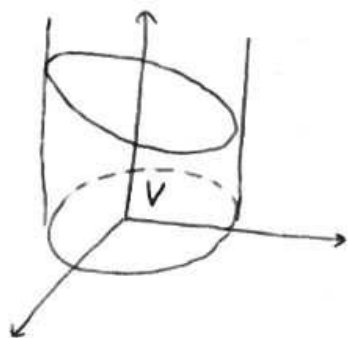
$$|J| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = |r| = r$$

$$I = \int_V \sqrt{x^2 + y^2} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 r \cdot \frac{1}{r} \cdot dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dz dr d\varphi = 2\pi \int_0^1 \int_0^1 r^2 dz dr = 2\pi \int_0^1 \left[r^2 z \right]_{z=0}^{z=1} dr = 2\pi \int_0^1 r^2 dr = 2\pi \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Azongja: ~~||||~~ |||| ||)

10. $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű henger, $z=0$, $z=2-x-y$ egyenletű sík által határolt térfogat.



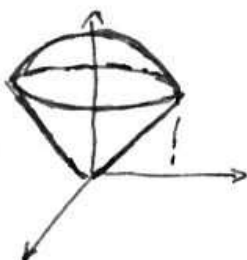
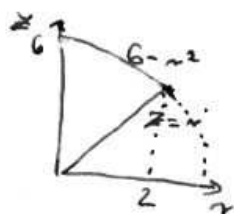
$$\left(\iint_V 1 - x - y \, dV \right)$$

$$\begin{aligned} \int_V 1 \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2-r\cos\varphi-r\sin\varphi} 1 \cdot |J| \, dz \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [rz]_0^{2-r\cos\varphi-r\sin\varphi} \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r - r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi) \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\varphi - \frac{r^3}{3}\sin\varphi \right]_{r=0}^1 \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{3}\cos\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi \right) \, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \\ &= 2\pi - \frac{1}{3} \left[\sin\varphi \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{3} \left[\cos\varphi \right]_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

Henger koordinát:

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq 2 - r\cos\varphi - r\sin\varphi \\ 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

11. Számolja ki a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és $z = 6 - x^2 - y^2$ sík... térfogatát.



$$\begin{aligned} r &\leq z \leq 6 - r^2 \\ 0 &\leq r \leq 2 \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 - r^2 &= r \\ r &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^{6-r^2} 1 \cdot |J| \, dz \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^2 \int_r^{6-r^2} r \, dz \, dr = 2\pi \int_0^2 \left[rz \right]_r^{6-r^2} \, dr = \\ &= 2\pi \int_0^2 (6r - r^3) \, dr = 2\pi \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi \left(12 - 4 \right) = \frac{32\pi}{1} \end{aligned}$$

12. $I = \int_V xyz \, dV = ?$ $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Gömbi koordináták:

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta \\ y &= r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \\ z &= r \cdot \cos\vartheta \end{aligned}$$

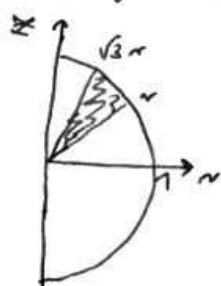
$$|J| = r^2 \sin\vartheta$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \cdot r \cdot \sin\vartheta \sin\varphi \cdot r \cdot \cos\vartheta \cdot r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^5 \cos\vartheta \cdot \sin^3\vartheta \cos\varphi \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin^3\vartheta \, d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \int_0^1 r^5 \, dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

7. V: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2}$ } na valahol ezt kiegészítve $V = ?$



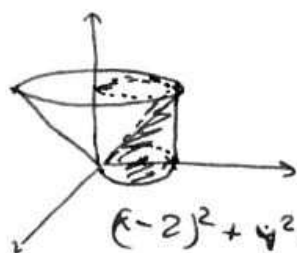
$0 \leq r \leq 1$
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
 $\frac{\pi}{6} \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}$

$$\int_V 1 dV = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/6} \int_0^1 1 \cdot \underbrace{r^2 \sin \psi}_{|J|} dr d\psi d\varphi =$$

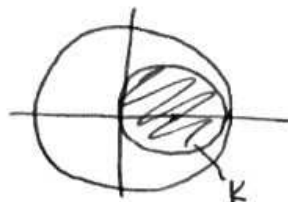
$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/6} r^2 \sin \psi dr d\psi = 2\pi \int_0^{\pi/4} r^2 dr \cdot \int_0^{\pi/6} \sin \psi d\psi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

8.



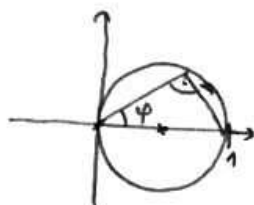
$(x-2)^2 + y^2 = 2$



$V = \iint_K \sqrt{x^2 + y^2} dK = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \varphi} r \cdot |J| dr d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\cos \varphi} d\varphi =$

$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi (1 + \sin^2 \varphi) d\varphi =$

$= \frac{1}{2} \left[\sin \varphi + \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$



$r(\varphi) = \cos \varphi$
 Thalész-tételből
 valószínűleg

Cauchy - Riemann egyenletek, differenciálhatóság, reguláris, harmonikus t.p.s

12) $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$
 $v(x,y) = cx^2 + 2xy - 4y^2 + 3$

a) Adja meg a c pm. ~~forrás~~ értéket úgy, hogy $v(x,y)$ egy egész-komplex
 síminálton reguláris $f(z)$ komplex változó f komplex része legyen.

b) $f'(1-2j) = ?$

a) $\Delta u = 0$

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$u'_x = v'_y$$

$$\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = 0$$

$$u'_y = -v'_x$$

$$u'_x = 2cx + 2y$$

$$v''_{xx} = 2c$$

$$v'_y = 2x - 8y$$

$$v''_{yy} = -8$$

$$\Delta v = 0 \Rightarrow 2c - 8 = 0 \Rightarrow \underline{c=4}$$

b) $f'(z_0) = f'(x_0 + jy_0) = u'_x(x_0, y_0) + j v'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) + j u'_y(x_0, y_0) =$
 $= v'_y(1, -2) + j v'_x(1, -2) = 18 + j \cdot 4$

13) Hol diff.-ható és hol reguláris?

$$f(z) = z^2 \cdot \operatorname{Re} z$$

$$f(z) = z^2 \cdot \operatorname{Re} z \Rightarrow f(x+jy) = (x+jy)^2 \cdot x = (x^2 + 2jxy - y^2)x = \overbrace{(x^3 - xy^2)}^{u(x,y)} + j \overbrace{2x^2y}^{v(x,y)}$$

$$u'_x = 3x^2 - y^2$$

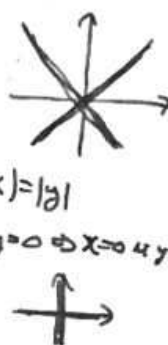
$$v'_x = 4xy$$

$$u'_y = -2xy$$

$$v'_y = 2x^2$$

CR: $u'_x = v'_y \Rightarrow 3x^2 - y^2 = 2x^2 \Rightarrow |x| = |y|$
 $u'_y = -v'_x \Rightarrow -2xy = -4xy \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$

Teljesen csak az origóban a 2 egyenlet egyszerre $\Rightarrow$ csak ott differ.tható
 Széles nem reguláris



14) $u(x,y) = 6x^3 - 6xy^2 + 5x - 2y$ Ig, hogy $u(x,y)$ az egész $\mathbb{R}^2$ -síkban harmonikus
 Keresse meg $v(x,y)$ harmonikus t.p.s-fu-ét, amellyel együtt $f(x+jy) = u(x,y) + jv(x,y)$
 az egész komplex síminálton reguláris.

$$u'_x = 18x^2 - 6y^2 + 5$$

$$u'_x = v'_y$$

$$u'_y = -12xy - 2$$

$$u'_y = -v'_x$$

$$v = \int (6x^2 - 6y^2 + 5) dy = 6x^2y - 2y^3 + 5y + C(x)$$

$$v'_x = \int (12xy - 2) dx =$$

$$-(12xy + C'(x)) = -12xy - 2$$

$$\Delta u \stackrel{!}{=} 0$$

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 12x - 12x = 0$$

$$v(x,y) = 6x^2y - 2y^3 + 5y + 2x + C$$

$u(x,y)$ harmonikus t.p.s

u az egész komplex síminálton reguláris $\sqrt{-1}$

Azonosítás

Pl $z = e^{2-3j}$ $\text{Re } z = ?$ $\text{Im } z = ?$ $|z| = ?$ $\text{arc } z = ?$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$e^{2-3j} = e^2 (\cos(-3) + j \sin(-3)) = e^2 \cos 3 - j e^2 \sin 3$$

$$\text{Re } z = e^2 \cos 3$$

$$\text{Im } z = -e^2 \sin 3$$

$$|z| = e^2$$

$$\text{arc } z = -3$$

$$\bar{z} = e^2 \cos 3 + j e^2 \sin 3$$

Pl a) $\ln(-\sqrt{3}+j) = ?$ b) $\ln(-3j)$ c) $\ln(-3j)$ d) $\ln(e)$ e) $\ln(\sqrt{2}-j\sqrt{2}) = ?$

$$\ln z = \ln|z| + j \text{arc } z$$

$$\ln(\sqrt{3}+j) = \ln 2 + j \cdot \frac{5\pi}{6}$$

$$\ln(-3j) = \ln 3 + j \cdot \frac{3\pi}{2}$$

$$\ln(-3j) = \ln 3 + j \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right)$$

$$\ln(-e) = \ln e = 1 + j \cdot (-\pi)$$

$$(\sqrt{2}-j\sqrt{2})^j = e^{j \ln(\sqrt{2}-j\sqrt{2})} = e^{j \cdot (\ln 2 - j \frac{\pi}{4})} = e^{\frac{\pi}{4} + j \ln 2}$$

$$= e^{\frac{\pi}{4}} \cdot (\cos(\ln 2) + j \sin(\ln 2))$$

Pl a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right) = ?$ b) $\cos(1+2j) = ?$ c) $\text{sh}(1+2j) = ?$

$$a) \sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos j\pi + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin j\pi = \cos \pi$$

$$b) \cos(1+2j) = \cos 1 \cdot \cos 2j - \sin 1 \cdot \sin 2j = \cos 1 \cdot \text{ch } 2 - j \sin 1 \cdot \text{sh } 2$$

$$c) \text{sh}(1+6j) = \text{sh } 1 \cdot \text{ch } 6j + \text{ch } 1 \cdot \text{sh } 6j = \text{sh } 1 \cdot \cos 6 + j \text{ch } 1 \cdot \sin 6$$

$$\sin jx = j \text{sh } x$$

$$\cos jx = \text{ch } x$$

$$\text{sh } jx = j \sin x$$

$$\text{ch } jx = \cos x$$

Pl $e^{j\pi+5} = 0$ $z = ?$
 $e^{j\pi} = -5$

$$j\bar{z} = \ln(-5) = \ln 5 + j \cdot (-\pi + 2k\pi) \quad / \cdot (-j)$$

$$\bar{z} = -\pi + 2k\pi - j \ln 5 \Rightarrow z = -\pi + 2k\pi + j \ln 5$$

Pl $f(z) = \frac{1}{\sin(2z) + 3j}$ $\text{izdatl singuláris pontjai?}$

Aktívál a kereső minimumt reguláris, a singuláris pontok a kereső zérushelyei.

$$\sin 2z + 3j = 0 \Rightarrow \frac{e^{j \cdot 2z} - e^{-2jz}}{2j} + 3j = 0$$

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

$$\frac{e^{j \cdot 2z} - e^{-2jz}}{2j} = 0$$

$$a - \frac{1}{a} - 6 = 0$$

$$a^2 - 6a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = 3 \pm \sqrt{8}$$

$$e^{j \cdot 2z_1} = 3 + \sqrt{10} \rightarrow j \cdot 2z_1 = \ln(3 + \sqrt{10}) + j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$e^{j \cdot 2z_2} = 3 - \sqrt{10} \rightarrow j \cdot 2z_2 = \ln(3 - \sqrt{10}) + j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} \ln(3 + \sqrt{10}) + j \cdot \frac{\pi}{4\sqrt{10}}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \ln(3 - \sqrt{10}) + j \cdot \frac{\pi}{4\sqrt{10}}$$

$$z_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi - j \cdot \ln(\sqrt{10}-3)$$