1	2	3	4	5	6	$\sum$

FMInf_AlkAlg 2. vizsga 22-01-11 Neptun: __________ Név: ____________________

*A vizsga feladatainak **eredményeit erre** az oldalra kell írni, a **mellékszámításokat a hátoldalra** és ha oda nem fér, külön lapra, melynek jobb felső sarkán legyen rajta a név és a Neptun-kód! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Sikeres a vizsga ha az elért pontok száma legalább 8.*

1. Igaz–Hamis I|H *(5 pont – hibás válasz −0.5 pont)*

a) Tetszőleges valós $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy olyan optimális megoldása van, mely merőleges az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer összes megoldására. $\boxed{\text{I}}$

b) Minden unitér, önadjungált vagy ferdén önadjungált mátrix unitéren diagonalizálható. $\boxed{\text{I}}$

c) Ha a nemnegatív $\mathbf{A}$ mátrix irreducibilis és imprimitív, $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ a két Perron-vektor, akkor $\lim_{k\to\infty}(\mathbf{A}/r)^k = \dfrac{\mathbf{pq}^\mathsf{T}}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{p}}$. $\boxed{\text{H}}$

d) Ha az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonális, akkor $\mathbf{A}^{2022}$ is az. $\boxed{\text{I}}$

e) Abból, hogy egy négyzetes valós mátrix ortogonálisan diagonalizálható, nem következik, hogy szimmetrikus. $\boxed{\text{H}}$

2. Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve egészítsük ki a mondatot valamely tétel vagy definíció alapján! *(4 pont)*

a) Van-e értelme üres vektorhalmaz lineáris kombinációjáról beszélni, és ha igen, mit értünk rajta?

igen, és a $\mathbf{0}$-vektort

b) Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ kongruens $\mathbf{B}$-vel, és $\mathbf{A}$ tehetetlensége $(2, 3, 4)$. Ismerhetjük-e $\mathbf{B}$ rangját, és ha igen, az mennyi?

igen, 5 (= pozitív + negatív sajátértékek száma)

c) Adjunk meg egy olyan $\mathbf{X}$ mátrixot, melyre $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$, ahol az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ sajátfelbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\,\mathrm{diag}(16, 4, 1, 0)\mathbf{C}^{-1}$.

$\mathbf{X} = \mathbf{C}\,\mathrm{diag}(4, 2, 1, 0)\mathbf{C}^{-1}$

d) Hogyan definiáljuk a $\|.\|_a$ vektornorma által indukált mátrixnormát?

$$\|\mathbf{A}\|_a = \max_{\|\mathbf{x}\|_a=1} \|\mathbf{Ax}\|_a$$

3. Számítsuk ki a következőket! *(3 pont)*

a) A redukált szinguláris
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/5 & -4/5\end{bmatrix}$$
felbontásból határozzuk meg az $\mathbf{A}^+$ pszeudoinverzet!

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 3 & 3 & 3\\ -4 & -4 & -4 & -4\end{bmatrix}$$

b) Az $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m\times4}$ $(m \geq 4)$ mátrixra $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ sajátértékei 16, 9, 4, 1. Mik az $\mathbf{A}$ legjobb 2-rangú közelítésének szinguláris értékei?

4, 3, 0, 0

c) Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{8\times8}$ mátrix két sajátértéke 1 és 2, és mindkettőnek 4 az algebrai multiplicitása, de az 1-nek 3, a 2-nek 1 a geometriai multiplicitása. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját (elég a mátrix nemnulla elemeit leírni).

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|cccc}1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&2&1&0&0\\0&0&0&0&0&2&1&0\\0&0&0&0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0&0&0&2\end{array}\right]$$

4. Határozzuk meg az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$
mátrix Frobenius-, 2- és ∞-normáját! *(3 pont)*

$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_\infty = 4$ (F-norma az elemek négyzetösszegének négyzetgyöke, a ∞-norma a max abszolút sorösszeg, a 2-norma a legnagyobb szinguláris érték, ami az
$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix}10 & -6\\ -6 & 10\end{bmatrix}$$
legnagyobb sajátértékének négyzetgyöke, azaz 4)

5. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrix egy Jordan-bázisát és Jordan-felbontását (a felbontásban szereplő inverzet nem kell kiszámolni, elég jelezni)! *(3 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$\chi(\lambda) = (2-\lambda)^3$, így $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2 \neq \mathbf{O}$ és pl. $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2(0,1,0) \neq \mathbf{0}$, amiből egy lehetséges Jordan-bázis

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

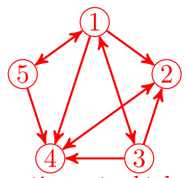
Az $\mathbf{A}$ Jordan-felbontása e bázissal ($\mathbf{CJC}^{-1}$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

6. Irreducibilis-e és primitív-e az alábbi mátrix? A választ indokoljuk néhány szóban és/vagy egy alkalmas gráffal és/vagy mátrixszal. *(2 pont)*

$$\begin{bmatrix}0 & 12 & 13 & 14 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0\\ 31 & 32 & 0 & 34 & 0\\ 0 & 42 & 0 & 0 & 0\\ 51 & 0 & 0 & 54 & 0\end{bmatrix}$$

1. mo: Reducibilis, mert nem erősen összefüggő a gráfja (a $\{2, 4\}$ halmazból nem vezet ki él), így nem primitív, azaz imprimitív.



2. mo: A 2. és 5. sorok és oszlopok cseréje után látható a reducibilitás:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}0 & 15 & 13 & 14 & 12\\ 51 & 0 & 0 & 54 & 0\\ 31 & 0 & 0 & 34 & 32\\\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 42\\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0\end{array}\right]$$