Jelek és jelfeldolgozás (BMEVIHVBB01)
4. előadásvázlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Bálint Péter, BME-HVT

2022.04.03.

1. Vizsgálójelek módszere diszkrét idejű rendszerek analízisében

1.1. Diszkrét idejű jelek

Def: $y = f[k], \quad y \in \mathbf{R}, \quad k \in \mathbf{Z}$ Megj.: y és k általában mértékegység nélküli mennyiség.

1.2. Néhány példa

a.) Egységimpulzus: $\delta[k] = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = 0 \\ 0, & \text{ha } k \neq 0 \end{cases}$

b.) Egységugrás: $\varepsilon[k] = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \geq 0 \\ 0, & \text{ha } k < 0 \end{cases}$

Megj.: $\varepsilon[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta[k]$

c.) Exponenciális: $x[k] = A \cdot q^k$

d.) Szinuszos: $x[k] = A\cos(\vartheta k + \varphi)$, ahol

- A - amplitúdó
- ϑ - diszkrét körfrekvencia [rad]
- φ - kezdőfázis

Megj.: a FI szinuszos jelekkel ellentétben ez nem feltétlenül periodikus, csak ha $\frac{\vartheta}{2\pi}$ racionális szám.

1.3. Műveletek DI jeleken

a.) Eltolás

$$x[k] \to x[k-i] \equiv x^{(i)}[k], \quad i > 0 : \text{késleltetés}, i > 0 : \text{siettetés}$$

Spec. eset: $i = -1 : x[k+1] = x^{(-1)}[k] = x'[k]$ (ld. ÁVLNA)

Alk.: Egységugrás felbontása

$$\varepsilon[k] = \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + ... = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[k-i]$$

Általánosítás:

$$x[k] = x[-1]\delta[k+1] + x[0]\delta[k] + x[1]\delta[k-1] + x[2]\delta[k-2] + ... = \sum_{i=-\infty}^{infty} x[i]\delta[k-i]$$

Ami nem más mint a DI konvolúció. Ebből következik, hogy egy DI függvény konulúciója $\delta[k]$-val önmaga.

b.) Levágás, ablakozás Példa:

$$\varepsilon[k] \cdot x[k] = \begin{cases} x[k], & \text{ha } k \geq 0 \\ 0, & \text{ha } k < 0 \end{cases}$$

Az eredmény egy belépő jel.

Derékszögű ablak:

$$\varepsilon[k-a] - \varepsilon[k-(b+1)] = \begin{cases} 1, & \text{ha } a \leq k \leq b \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Példa:

$$(\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3]) \cdot 4 \cdot 0,5^k$$

1.4. Az impulzusválasz és alkalmazásai

a.) Ha egy DI LTI rendszer gerjesztése $u[k] = \delta[k]$, akkor válasza az $y[k] = h[k]$ impulzusválasz. Formálisan $h[k] = \mathcal{W}\{\delta[k]\}$.

b.) FIR (finitie impulse response - véges impulzusválaszú) rendszerek. Mindig kauzális és GV stabil.

$$h[k] = 0, \text{ha } k < 0 \text{ és } k \geq L$$

Köv.:

$$h[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]) \cdot h[k] = h_0\delta[k] + h_1\delta[k-1] + ... + h_{L-1}\delta[k-L-1]$$

c.) GV stabilitás feltétele az absz. összegezhetőség: $= \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

1.5. Az ugrásválasz

a.) Ha egy DI LTI rendszer gerjesztése $u[k] = \varepsilon[k]$, akkor válasza az $y[k] = g[k]$ ugrásválasz. Formálisan $g[k] = \mathcal{W}\{\varepsilon[k]\}$.

Megj.:

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]$$

Köv. (linearitás, invariancia):

$$h[k] = g[k] - g[k-1]$$

Illetve:

$$\varepsilon[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta[i] \rightarrow g[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} h[k]$$

2. A válasz kifejezése

$u[k]$ felbontása "pálcikákra":

$$u[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\delta[k-i]$$

Válasz tetszőleges gerjesztésre:

$$\begin{aligned}
\delta[k] &\rightarrow h[k] \text{ (def.)} \\
\delta[k-i] &\rightarrow h[k-i] \text{ (invariancia)} \\
u[i]\delta[k-i] &\rightarrow u[i]\delta[k-i] \text{ (linearitás)} \\
\sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\delta[k-i] &\rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]h[k-i] \text{ (linearitás)}
\end{aligned}$$

Konvolúció:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]h[k-i] = u[k] * h[k]$$

Spec. eset: $u[k]$ és $h[k]$ is belépő:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k} u[i]h[k-i] = u[k] * h[k]$$

"Lépésről lépésre", behelyettesítéssel:

$$\begin{aligned}
y[0] &= u[0]h[0] \\
y[1] &= u[0]h[1] + u[1]h[0] \\
y[2] &= u[0]h[2] + u[1]h[1] + u[2]h[0] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

3. A DI impulzusválasz mint rendszerjellemző függvény

a.) A válasz kifejezhető a segítségével: ld. konvolúció

b.) A rendszer kauzális akkor és csak akkor, ha $h[k]$ belépő

c.) A rendszer gerjesztés-válasz stabil, ha $h[k]$ abszolút összegezhető:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$