02/009 (p26): Vegyszerrel szúnyogírtást végeznek. Az első permetezés után a szúnyogok 80%-a elpusztul, de az életben maradottakban annyi a jobb ellenálló képességű, hogy a második permetezéskor az életben maradt szúnyogoknak már csak a 40%-a pusztul el, a harmadik írtásnál pedig csak a maradék 20%-a. (A) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szúnyog túléli mindhárom permetezést? (B) Feltéve, hogy egy szúnyog túlélte az első permetezést, mennyi a valószínűsége annak, hogy a másodikat és a harmadikat is túléli? (C) Alkalmazható-e a független eseményekre vonatkozó szorzástétel?

(p228): Jelentsék rendre B_1, B_2, B_3 események azt, hogy az illető szúnyog túléli az első, második, harmadik permetezést.

(A) Feltételes valószínűségek szorzástétele alapján:

$$P(B_1 \wedge B_2 \wedge B_3) \;=\; P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) \cdot P(B_3|B_2 \wedge B_1) \;=\; 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.8 \;=\; 0.096$$

(B) Feltételes valószínűségek összefüggései alapján:

$$P(B_1 \wedge B_2 \wedge B_3|B_1) \;=\; \frac{P\left(\big(B_1 \wedge B_2 \wedge B_3\big) \wedge B_1\right)}{P(B_1)} \;=\; \frac{0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.8}{0.2} \;=\; 0.048$$

(C) Nem alkalmazható a független eseményekre vonatkozó szorzástétel, mert a látókörünkben lévő események nem függetlenek.

02/014 (p27): Két út vezet az A városból a B városba, és szintén két út a B városból a C városba. Mind a négy út egymástól függetlenül, p valószínűséggel járhatatlan a hó miatt. Feltéve, hogy A-ból C-be nincs járható út, mennyi a valószínűsége, hogy A-ból B-be van járható út?

(p229): Jelölje PQ illetve $\overline{PQ}$ azt az eseményt, hogy P és Q városok köztt van illetve nincs járható út.

$$\begin{aligned}
P(AB|\overline{AC}) &= \frac{P(AB \cap \overline{AC})}{P(\overline{AC})} \\
&= \frac{P(AB \cap \overline{BC})}{P(AB \cap \overline{BC}) + P(\overline{AB} \cap \overline{BC}) + P(\overline{AB} \cap BC)} \\
&= \frac{P(AB) \cdot P(\overline{BC})}{P(AB) \cdot P(\overline{BC}) + P(\overline{AB}) \cdot P(\overline{BC}) + P(\overline{AB}) \cdot P(BC)} \\
&= \frac{(1-p^2) \cdot p^2}{(1-p^2) \cdot p^2 + p^2 \cdot p^2 + p^2 \cdot (1-p^2)} \\
&= \frac{1-p^2}{2-p^2}
\end{aligned}$$

02/016 (p28): Valaki a céltábla 10-es, 20-as, 30-as, 50-es körgyűrűibe rendre 1/3, 1/6, 1/6, 1/3 valószínűséggel talál. Mennyi a valószínűsége, hogy 15 lövésből 5 a 10-es, 3 a 20-as, 4 a 30-as, 3 az 50-es gyűrűbe talál?

(p230):

$$\frac{(5+3+4+3)!}{5! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

02/022 (p28): Egyetlen szelvénnyel lottózom. Számaim között a nagyság szerinti középső szám a 40-es. A következő három esemény bekövetkezése közül melyik növeli jobban az ötösöm esélyét? (A) a sorsoláson az urnából először kihúzott szám a 40-es. (B) a kihúzott számok között szerepel a 40-es. (C) A kihúzott számok között a nagyság szerinti középső a 40-es.

(p231): Az (A) kérdés megfogalmazása pontosítást igényel: a lottóhúzás klasszikus kivitelezése hogyan is eredményez egyenletes eloszlást a lehetséges $\binom{90}{5}$ húzási eredményen. Pontosítás után az (A) kérdés a (B) kérdéssé válik.

(B) P(öttalálatot húztak) $=$ P(40-est húztak)$\cdot P$(öttalálatot húztak | 40-est húztak)

$$\frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} \cdot \text{„a keresett feltételes valószínűség (B) esetén''}$$

(C) P(öttalálatot húztak) $=$ P(C eset) $\cdot$ P(öttalálatot húztak | C eset)

$$\frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{\binom{39}{2}\cdot\binom{50}{2}}{\binom{90}{5}} \cdot \text{„a keresett feltételes valószínűség (C) esetén''}$$

Döntés: a (C) eset feltételes valószínűsége a legnagyobb, mert

$$\binom{89}{4} = 2441626 > 907725 = \binom{39}{2}\cdot\binom{50}{2}$$

02/042 (p33): Legyenek A, B, C teljesen független eseményeket leíró halmazok egy eseménytérben. Tegyük fel, hogy $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/8$, $P(C) = 1/8$. Mennyi a $P(A\cup B|B\cup C)$ feltételes valószínűség?

(p235):

$$P(A\cup B|B\cup C) = \frac{P((A\cup B)\cap(B\cup C))}{P(B\cup C)} = \frac{P(B\cup(A\cap C))}{P(B)+P(C)-P(B\cap C)} =$$

$$= \frac{P(B)+P(\overline{B}\cap A\cap C)}{P(B)+P(C)-P(B)\cdot P(C)} = \frac{\frac{1}{8}+\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{8\cdot 4+7\cdot 1\cdot 1}{8\cdot 4+8\cdot 4-4} = \frac{39}{60}$$

02/046 (p33): 1000 papagájból 800 kék, ezek közül pedig 500 tud beszélni. Mely valószínűségeket tudja kiszámítani a következők közül? (A) egy papagály tud beszélni. (B) Egy papagály beszélni is tud, és kék is. (C) egy beszélő papagály kék. (D) egy kék papagály tud beszélni. +1: van-e különbség a B éd D esemény között?

(p235): (A) nem. (B) igen. (C) nem. (D) igen. +1: van különbség.

02/056 (p35): Két ember mindegyike addig dob fel egy-egy érmét, amíg az első fej kijön. Mennyi a valószínűsége, hogy ugyanannyi dobást végeznek?

(p236):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}$$