Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok megoldása
2007. április 16.

Ez a példamegoldás minden feladatra csak egy lehetséges megoldást ad, természetesen bármely más jó megoldást is elfogadunk. Ha hibát találtok valahol, azt kérlek jelezzétek nekem emailben! Köszönöm!

Schlotter Ildi

1. Egy $2k$ csúcsú G egyszerű gráfban minden pont foka $k-1$ (ahol $k>1$ egész). Bizonyítsuk be, hogy G-hez hozzá lehet venni k darab új élet úgy, hogy a kapott gráf tartalmazzon Hamilton-kört!

Megoldás.

Jelölje G komplementerét $\overline{G}$. Mivel egy $2k$ pontú gráfban egy pontból legfeljebb $2k-1$ él indulhat ki, ezért $\overline{G}$-ben minden pont foka $(2k-1)-(k-1)=k$. Ez épp a pontok számának fele, így $\overline{G}$-ben a Dirac-tétel miatt van Hamilton-kör. (Itt felhasználtuk azt is, hogy $\overline{G}$ egyszerű gráf.) Mivel $\overline{G}$ pontjainak a száma páros, ezért a Hamilton-kör minden második élét véve éppen egy teljes párosítást kapunk $\overline{G}$-ben. Jelöljük ezt M-mel.

M tehát k darab független élet tartalmaz $\overline{G}$-ben. Mivel ezen élek egyike sem szerepel G-ben, ezért M-et G-hez hozzávéve a kapott G' gráf egyszerű marad, és minden fokszám épp eggyel nő meg. Emiatt G'-re már alkalmazható a Dirac-tétel, így azt kapjuk, hogy G'-ben van Hamilton-kör. Ez igazolja az állítást.

Megjegyzés: fontos megmutatni, hogy $\overline{G}$-ben van teljes párosítás, mert ez szavatolja számunkra, hogy a behúzott k új él nem hoz létre többszörös éleket a gráfban!

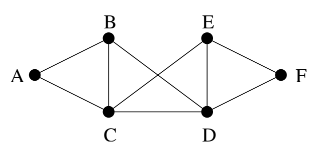
2. A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G)=2007$. Készítsük el a G' gráfot a következőképpen: G'-be vegyük fel G minden csúcsát és élét, továbbá G minden v csúcsa esetén vegyünk fel egy új v' csúcsot, amelyet kössünk össze v-vel; végül G minden $\{u,v\}$ élére G'-ben a megfelelő u' és v' csúcsokat is kössük össze. Határozzuk meg a kapott G' gráf $\chi(G')$ kromatikus számát!

Megoldás.

Mivel G'-nek részgráfja G, ezért nyilván $\chi(G')\geq\chi(G)=2007$. Megmutatjuk, hogy G' kiszínezhető 2007 színnel.

Legyen G'-ben a G-ben is szereplő pontok halmaza V, a vesszős pontok halmaza (azaz a maradék ponthalmaz) pedig V'. Legyen adott G-nek egy helyes színezése 2007 színnel. G'-ben a V-beli csúcsokat színezzük ki ennek megfelelően, V' színezéséhez pedig „permutáljuk" ezt a színezést, azaz színezzünk a következő stratégia szerint: ha v színe a k-adik szín, akkor v' színe legyen a $(k+1)$-edik szín, ahol a 2008. szín legyen azonos az 1. színnel. Ez könnyen láthatóan egy jó színezés lesz, mégpedig 2007 színnel. Azaz $\chi(G)=2007$.

3. Döntsük el, hogy az alábbi gráf intervallumgráf-e!



Megoldás.

Azt, hogy a megadott gráf intervallumgráf, könnyen igazolhatjuk úgy, hogy minden csúcsának megfeleltetünk egy-egy intervallumot oly módon, hogy pontosan azon intervallumok messék egymást, melyekre a megfelelő csúcsok össze vannak kötve a gráfban. Például a következő hozzárendelés megfelelő:

A csúcs $\longrightarrow$ $[1,2]$ intervallum,
B csúcs $\longrightarrow$ $[1,4]$ intervallum,
C csúcs $\longrightarrow$ $[1,6]$ intervallum,
D csúcs $\longrightarrow$ $[3,8]$ intervallum,
E csúcs $\longrightarrow$ $[5,8]$ intervallum,
F csúcs $\longrightarrow$ $[7,8]$ intervallum.

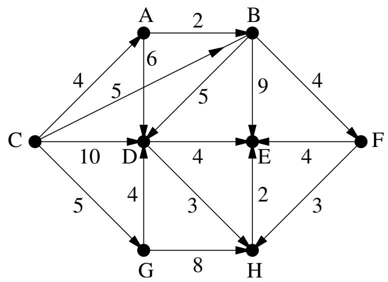
4. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x - y| = 1$ vagy $|x - y| = 50$. Határozzuk meg a G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát!

Megoldás.

Jelöljük gráfban E_1-el azon éleket, melyek végpontjainak különbsége 1, illetve E_2-vel azokat, melyek végpontjainak különbsége 50. Vegyük észre, hogy E_1 élei egy Hamilton-utat alkotnak a gráfban, E_2 élei pedig független élek, hiszen nincs olyan pont, melyre két E_2-beli él is illeszkedne. (Ezt könnyen láthatjuk, ha meggondoljuk, hogy nincs olyan 1 és 100 közötti x szám, melyre $x - 50$ és $x + 50$ is 1 és 100 közé esne.)

G-ben tehát a maximális fokszám 3, ezért $\chi_e(G) \geq 3$. Most megmutatjuk, hogy G élei kiszínezhetők 3 színnel. Színezzük E_1 éleit felváltva az 1-es és 2-es színekkel, majd színezzük E_2 éleit egy harmadik színnel. Mivel E_2 független, ezért ez egy jó színezés lesz. Emiatt $\chi_e(G) = 3$.

5. Bontsuk emeletekre a PERT diagram irányított gráfját, majd határozzuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges minimális időt és a kritikus részfeladatokat!



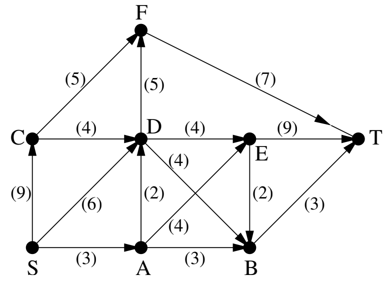
Megoldás.

Egy lehetséges emeletekre bontás: $C \mid A \left| \begin{array}{c} G \\ D \end{array} \right| \begin{array}{c} B \\ F \end{array} \left| H \mid E \right.$. Innen egy lehetséges topologikus sorrend a következő: C, A, G, B, D, F, H, E. Az egyes csúcsokhoz tartozó feladatok elvégzéséhez szükséges idők:

$t(C) = 0$
$t(A) = t(C) + 4 = 4$, és CA adja a maximumot,
$t(G) = t(C) + 5 = 5$, és CG adja a maximumot,
$t(B) = \max\{t(C) + 5, t(A) + 2\} = 6$, és AB adja a maximumot,
$t(D) = \max\{t(C) + 10, t(A) + 6, t(G) + 4, t(B) + 5\} = 11$, és BD adja a maximumot,
$t(F) = t(B) + 4 = 10$, és BF adja a maximumot,
$t(H) = \max\{t(G) + 8, t(D) + 3, t(F) + 3\} = 14$, és DH adja a maximumot,
$t(E) = \max\{t(B) + 9, t(D) + 4, t(F) + 4, t(H) + 2\} = 16$, és HE adja a maximumot.

Vagyis a tevékenységek elvégzéséhez szükséges összidő 16 egység. Egy kritikus út található a gráfban: $C - A - B - D - H - E$. Tehát a kritikus részfeladatok: C, A, B, D, H és E.

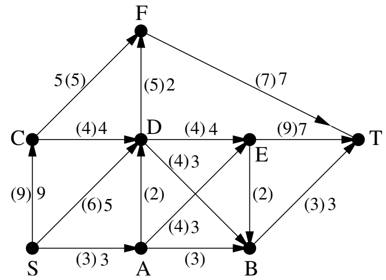
6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy minimális ST-vágást (és bizonyítsuk be róla, hogy minimális)!



Megoldás.

A minimális ST-vágást G-ben a pontok következő felosztása adja. Legyen $X = \{S, B, C, D, F\}$ és $\overline{X} = \{A, E, T\}$, ekkor a vágásban szereplő (X-ből $\overline{X}$-be mutató) élek: SA, DE, BT, FT. Innen a vágás értéke $3 + 4 + 3 + 7 = 17$.

Ennek a vágásnak a minimalitását igazolhatjuk egy 17 értékű folyam megadásával. Egy megfelelő folyamot berajzoltam az ábrán (azon az élen, ahol csak a kapacitás szerepel, a folyam 0 értéket vesz fel):



7. Legyen G egy 100 csúcsú egyszerű gráf és legyen $X \subseteq V(G)$ egy 52 csúcsból álló független csúcshalmaz G-ben. Legyen $u, v, w \in X$ három tetszőleges X-beli csúcs. Adjuk hozzá G-hez az $\{u, v\}$, az $\{u, w\}$ és a $\{v, w\}$ éleket. Van-e a kapott gráfban teljes párosítás?

Első megoldás.

Ha a kapott gráfból elhagyjuk az $\overline{X} = V(G) - X$ halmazban lévő 48 csúcsot, akkor keletkezik 49 izolált pont és egy háromszög. Ez összesen 50 darab páratlan komponens. Vagyis $\overline{X}$-et elhagyva több, mint $|\overline{X}|$ darab páratlan komponens keletkezett, így Tutte tétele miatt nincs a gráfban teljes párosítás.

Második megoldás.

X függetlensége miatt $\alpha(G) \geq 52$, így a megfelelő Gallai-tétel alapján $\tau(G) = 100 - \alpha(G) \leq 48$, hiszen G-ben nincs hurokél. Ezért $\nu(G) \leq \tau(G)$ miatt a független élek maximális számara azt kapjuk, hogy $\nu(G) \leq 48$.

A kiegészített gráf egy tetszőleges párosításába a három hozzávett él közül legfeljebb egy kerülhet be, mert ezek háromszöget alkotnak. Így a kiegészített gráfban a független élek maximális száma legfeljebb 49. Viszont egy teljes párosításhoz legalább 50 független élre lenne szükség, vagyis a kapott gráfban nem lehet teljes párosítás.

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely $k \geq 1$ esetén minden k-szorosan élösszefüggő gráfban megadható $k - 1$ darab kör úgy, hogy a körök közül bármelyik kettőnek legföljebb egy közös éle van!

Megoldás.

Hagyjunk el egy tetszőleges e élet. A kapott G' gráf ekkor még $(k-1)$-szorosan élösszefüggő lesz, mert belőle $(k - 1)$-nél kevesebb élet elhagyva összefüggő gráfot kapunk. Ezt indirekt módon láthatjuk be: ha valamely kevesebb, mint $k - 1$ élből álló F élhalmazt elhagyva G' több komponensre esne szét, akkor ez azt is jelentené, hogy F-et és e-t elhagyva G-ből (ez kevesebb, mint k él) több komponensre esne szét a gráf. Ez viszont ellentmond annak, hogy G k-szorosan élösszefüggő.

Így G'-ben elhagyott él végpontjait (legyenek a és b) összeköt? utak lefogásához legalább $k-1$ él kell, ezért Menger megfelelő tétele miatt a és b között van $k-1$ páronként éldiszjunkt út. Ezek mindegyikéhez hozzávéve az elhagyott élet éppen a feladat feltételeinek megfelelő $k-1$ darab kört kapunk, hiszen az egyes köröknek csak e lehet közös éle.