Villamosmérnök A2 (2017 ősz) 1. szigorlat

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Hol és milyen lokális szélsőértékhelyei vannak az $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ függvénynek?

Megoldásvázlat. A $0 = f_x(x, y) = 3(x^2 - y)$, $0 = f_y(x, y) = 3(y^2 - x)$ egyenleteket a $(0, 0)$ és $(1, 1)$ pontok elégítik ki, tehát ezek lehetnek lokális szélsőértékhelyek.

$f_{xx}(x, y) = 6x$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -3$, $f_{yy}(x, y) = 6y$. Vagyis $D(x, y) = 36xy - 9$, és így $D(0, 0) = -9 < 0$, és ezért $(0, 0)$ nyeregpont; $D(1, 1) = 27 > 0$ és $f_{xx}(0, 0) = 6 > 0$, tehát $(1, 1)$ lokális minimumhely.

2. $\int_H \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy = ?$ ha $H = \{\, (x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \quad \text{és} \quad 0 \le y \le \sqrt{3}x \,\}$!

Megoldásvázlat. Polárkoordinátákra való áttéréssel $\int_H \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/3}\int_1^2 \frac{r}{1+r^2}\, dr\, d\varphi = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} \ln(1 + r^2)\big|_1^2\, d\varphi = \frac{\pi}{6} \ln \frac{5}{2}$.

3. Számítsa ki $\int_0^{-1} xe^x\, dx$ értékét 1/10 pontossággal!

Megoldásvázlat. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ mindenütt konvergens hatványsor, tehát $xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ is az, ezért minden zárt intervallumon egyenletesen konvergens, és így tagonként integrálható.

Ezért $\int_0^{-1} xe^x\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{-1} \frac{x^{n+1}}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!(n+2)}\Big|_0^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n!(n+2)}$ Leibniz-sor, így a hiba kisebb, mint az első elhagyott tag abszolútértéke. Pl. $n = 3$-ra $\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n!(n+2)}\right| = \frac{1}{30} < \frac{1}{10}$, ezért $\int_0^{-1} xe^x\, dx \approx \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^{n+2}}{n!(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$.

4. Határozza meg $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat!

Megoldásvázlat. A sajátértékek $\underline{\underline{A}}$ karakterisztikus egyenletének $((1-\lambda)(\lambda^2-1))$ gyökei: 1 és -1. Az 1-hez tartozó sajátaltér a $\begin{pmatrix} -1&1&0 \\ 1&-1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&-1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ mátrix magtere: $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; a -1-hez tartozó sajátaltér a $\begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 1&1&0 \\ 0&0&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \sim^* \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ mátrix magtere: $c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, de mivel az utolsó lépésben a két utolsó oszlopot kicseréltük, $\begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 1&1&0 \\ 0&0&2 \end{pmatrix}$ magtere $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vagy: $\underline{\underline{A}}$ az $y = x$ síkra való tükrözés mátrixa $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisában, ezért az $y = x$ sík sajátaltér 1 sajátértékkel, a $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ egyenes pedig sajátaltér -1 sajátértékkel.

5. Igazak-e a következő állítások?

(a) A $(0, 1)$ intervallum nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben.

(b) A $(0, 1)$ intervallum (azaz az $\{(x, 0) : x \in (0, 1)$ halmaz) nyílt halmaz $\mathbb{R}^2$-ben.

(c) Ha egy egyenletrendszerben több egyenlet van, mint ismeretlen, akkor nincs megoldása.

(d) Ha egy egyenletrendszerben több ismeretlen van, mint egyenlet, akkor több megoldása van.

(e) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.

(f) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergens.

Megoldásvázlat. (a) Igen: ha $x \in (0, 1)$, akkor x $\min\{\, |x|, |1 - x| \,\}$ sugarú környezete része $(0, 1)$-nek.

(b) Nem: a halmaz minden elemének minden környezete tartalmaz olyan pontot, aminek a második koordinátája nem 0 (pl. az $(x, 0)$ pont $\epsilon > 0$ sugarú környezete az $(x, \epsilon/2)$ pontot), tehát ami nincs a halmazban.

(c) Nem, pl. $x + y = 0, \quad 2x + 2y = 0, \quad 3x + 3y = 0$.

(d) Nem, pl. $x + y + z = 0, \quad x + y + z = 1$.

(e) Nem, pl. $a_n = 1/n$.

(f) Nem, pl. $a_n = (-1)^n/n$.