Valószínűségszámítás pótzárthelyi megoldások

2009. április 29.

1. *Az X és Y együttes sűrűségfüggvénye*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a(3x^2 + xy + y^2) & \text{, ha } 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

Mennyi az a értéke? Függetlenek-e X és Y?

Megoldás. Az egységre normáltsági feltételből számítható a értéke:

$$\begin{aligned} 1 &= a \int_0^1 \int_0^1 3x^2 + xy + y^2 dx dy = a \int_0^1 \left[x^3 + \frac{1}{2}x^2 y + xy^2 \right]_0^1 dy \\ &= a \int_0^1 1 + \frac{1}{2}y + y^2 dy = a \left[y + \frac{1}{4}y^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = a\frac{19}{12} \end{aligned}$$

A fentiek alapján tehát $a = \frac{12}{19}$. A sűrűségfüggvények az alábbiak lesznek:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{12}{19} \int_0^1 3x^2 + xy + y^2 dy = \frac{12}{19} \left[3x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \right] \\ f_Y(y) &= \frac{12}{19} \int_0^1 3x^2 + xy + y^2 dx = \frac{12}{19} \left[1 + \frac{1}{2}y + y^2 \right] \end{aligned}$$

Mivel $f_X(x) f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$, X és Y nem függetlenek.

2. *X és Y független valószínűségi változók. Számolja ki az $f_X(x) = 2$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$ és az $f_Y(y) = \frac{2y}{5}$, $y \in [2, 3]$ sűrűségfüggvények konvolúciós sűrűségfüggvényét, $f_{X+Y}(t)$-t!*

Megoldás. A keresett sűrűségfüggvény értelmezési tartománya $R_{X+Y} = \left[2, \frac{7}{2}\right]$, a függvény maga pedig a következő képlettel kapható:

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-u) du = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{4(t-u)}{5} du,$$

ahol az integrálási határok változása miatt a következő három esetet különböztetjük meg:

$$\begin{aligned} t \in \left[2, \frac{5}{2}\right] &: \quad f_{X+Y}(t) = \int_0^{t-2} \frac{4(t-u)}{5} du = \frac{1}{5} \left[4tu - 2u^2\right]_0^{t-2} = \frac{4}{5}t(t-2) - \frac{2}{5}(t-2)^2 \\ t \in \left(\frac{5}{2}, 3\right] &: \quad f_{X+Y}(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4(t-u)}{5} du = \frac{1}{5} \left[4tu - 2u^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}t - \frac{1}{10} \\ t \in \left(\frac{3}{,} \frac{7}{2}\right] &: \quad f_{X+Y}(t) = \int_{t-3}^{\frac{1}{2}} \frac{4(t-u)}{5} du = \frac{1}{5} \left[4tu - 2u^2\right]_{t-3}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}t - \frac{1}{10} - \frac{4}{5}t(t-3) + \frac{2}{5}(t-3)^2 \end{aligned}$$

3. *Legyenek az A és B független események, C pedig mindkettőjüket kizáró esemény.* $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{4}$. $\mathbf{P}(\bar{A} \cdot \bar{B} + C) =$?

Megoldás.

$$\mathbf{P}(\bar{A} \cdot \bar{B} + C) = \mathbf{P}(\bar{A} \cdot \bar{B}) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = \mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(\cdot\bar{B}) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(C) = \frac{3}{4}\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

4. *Egy dobozban 2 piros 2 fehér és 2 zöld színű golyó van. Visszatevés nélkül addig húzunk, amíg mindhárom színből nincs már legalább egy golyónk. Jelölje X a szükséges húzások számát! Adja meg X eloszlását, várható értékét és szórását!*

Megoldás. A keresett valószínűségek a következőképp kaphatók meg:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = 3) &= \mathbf{P}(pfz) = 6\frac{2}{6}\frac{2}{5}\frac{2}{4} = \frac{2}{5} \\
\mathbf{P}(X = 4) &= \mathbf{P}(ffpz \vee ppfz \vee zzpf \vee ppzf \vee zzfp \vee ffzp) \cdot 3 \\
&= 6\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}3 = \frac{2}{5} \\
\mathbf{P}(X = 5) &= \mathbf{P}(ffzzp \vee \dots) \cdot 3 \\
&= 6\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}3 = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

A várható érték, a második momentum és a szórás az alábbi módon számolhatók:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \frac{1}{5}(3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1) = \frac{19}{5} \\
\mathbf{E}X^2 &= \frac{1}{5}(9 \cdot 2 + 16 \cdot 2 + 25 \cdot 1) = \frac{75}{5} \\
\sigma^2 X &= \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{14}{25} \\
\sigma X &\approx 0.748
\end{aligned}$$

5. *Egy szabályos dobókockával addig dobok, amíg kettest vagy ötöst nem kapok. Jelölje X a dobássorozat közben dobott egyesek számát! Mennyi X várható értéke?* $\mathbf{P}(X = 0)$ *=?*

Megoldás. Jelölje Y a dobásszámot. Ekkor

$$\mathbf{P}(X = k|Y = n) = \frac{\binom{n-1}{k}3^{n-1-k}}{4^{n-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

azaz X feltételes eloszlása az $Y = n$ feltétel mellett binomiális, konkrétan $B(n-1, \frac{1}{4})$. Ezt felhasználva a keresett várható érték a következő:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{n=k+1}^{\infty} \mathbf{P}(X = k|Y = n)\mathbf{P}(Y = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} k\mathbf{P}(X = k|Y = n)\mathbf{P}(Y = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(Y = n) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k\mathbf{P}(X = k|Y = n)}_{(n-1)\frac{1}{4}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{4}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}\frac{2}{6} = \frac{1}{36}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{4}{6}\right)^{n-2} \\
&= \frac{1}{36}\frac{1}{(1-\frac{4}{6})^2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

A $\mathbf{P}(X=0)$ valószínűség szintén a teljes valószínűség tételének felhasználásával kapható:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=0) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X=0|Y=n)P(Y=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^{k} = \frac{1}{6} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$