Vizsgadolgozat
Megoldás

Tanszéki általános alapelvek A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:
   (a) Hogyan definiáljuk az $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozó kovarianciamátrixát?
   (b) Legyen X folytonos valószínűségi változó, és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amire $\mathbb{E}\left(g(X)\right)$ létezik. Fejezzük ki $\mathbb{E}\left(g(X)\right)$ értékét az X sűrűségfüggvényének segítségével.

   Megoldás:
   (a)
   (5 pont) ha megjelennek a mátrixban a páronkénti kovarianciák
   (+2 pont) ha kiderül, hogy $n \times n$-es
   (+3 pont) ha minden index jó
   (jegyzet: 10.1.6) (Ha csak n=2-re írja fel, akkor max 5 pont)

   (b)
   (10 pont)
   $$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \, \mathrm{d}x$$
   (jegyzet: 4.3.5) (Ha nincsenek integrálási határok vagy rosszak, akkor -2 pont.)

2. Béla minden héten vásárol 3 sorsjegyet. Mindig két különböző típusú sorsjegy közül választ, de mindig csak egy típusból vásárol 3 darabot. Az A típusú sorsjegyek közül átlagosan minden 12-edik nyer, míg a B típusúnál 10% a nyerési esély. Szabályos dobókockával dönti el melyik sorsjegyből vásároljon az adott héten. Ha 1-est vagy 2-est dob, akkor az A, különben a B típust választja.
   a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy Béla az adott héten legalább egy sorsjeggyel nyer?
   b) Feltéve, hogy az adott héten nyert, mennyi a valószínűsége, hogy az A típusból vásárolt?

Megoldás:
(a)
Tekintsük a következő eseményeket:
(0 pont) A = Béla az adott héten 1-est vagy 2-est dob a dobókockával, W = Béla az adott héten legalább egy sorsjeggyel nyer
(1 pont) $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$
(2 pont) Az A és $\bar{A}$ események teljes eseményrendszert alkotnak
(1 pont) ezért alkalmazható a teljes valószínűség tétele:
(2 pont)
$$\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(W \mid \bar{A})\,\mathbb{P}(\bar{A})$$
(1 pont) $\mathbb{P}(W \mid A)$ a nyerés valószínűsége 3 A típusú sorsjegy esetén
(1 pont) $\mathbb{P}(W \mid A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{W} \mid A)$
(1 pont) $\mathbb{P}(\bar{W} \mid A) = \mathbb{P}(\text{három } A \text{ típusú sorsjegy közül eggyel sem nyer }) = \left(\frac{11}{12}\right)^3$
(1 pont) $\mathbb{P}(W \mid A) = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^3 = \frac{397}{1728} \approx 0{,}2297$
(2 pont) Hasonlóan $\mathbb{P}(W \mid \bar{A}) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 0{,}271$
(1 pont) $\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W \mid A)\frac{1}{3} + \mathbb{P}(W \mid \bar{A})\frac{2}{3} \approx 0{,}2297 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}271 \cdot \frac{2}{3}$
(1 pont) $\approx 0,2572$

(b)
(1 pont) A kérdés $\mathbb{P}(A \mid W) = ?$
(1 pont) A Bayes-tételt alkalmazva
(2 pont)
$$\mathbb{P}(A \mid W) = \frac{\mathbb{P}(W \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(W)}$$
(1 pont) $\approx \dfrac{0{,}2297 \cdot \frac{1}{3}}{0{,}2572}$
(1 pont) $\approx 0{,}2977$

3. Hering kapitány 20 éves korában kezdett halászni a hajójával. Halásztársaival minden év végén összehasonlították az egy év alatt hajójukon fogott halak összsúlyát. Megállapították, hogy az egy halászhajón kifogott halak össztömegének átlaga 150 tonna, szórása pedig 30 tonna. Az évek során nem változott az eloszlás, és az egyes évek fogásai egymástól függetlenek. Valószínűségszámítási tudását felhasználva, a kapitány arra jutott, hogy egy adott hajó eddigi (attól az évtől kezdve, amikor ő elkezdett hajózni) összes fogásának össztömegének, szórása 150 tonna.
a) Hány éves a kapitány?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy az eddigi évek alatt (amióta a kaptitány halászik) egy halászhajón fogott halak össztömege több, mint 3%-kal meghaladja az egy hajóra vonatkozó összfogás tömegének várható értékét?

Megoldás:
(a)
(0 pont) Jelölje X_i az adott hajó éves fogásának össztömegét az i-edik évben, n az eltelt évek számát
(1 pont) $\mathbb{D}(X_i) = 30$
(1 pont) $\mathbb{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 150$
(1 pont) X_i-k független, azonos eloszlásúak
(2 pont) ezért $150^2 = \mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}^2(X_i) = n \cdot 30^2$
(1 pont) $n = 25$
(1 pont) A kapitány tehát $20 + 25 = 45$ éves. ($20 + 24 = 44$-re is jár a pont)

(b)
(1 pont) $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right) > 0.03 \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right)\right) = ?$
/vagy $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i > 1.03 \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right)\right) = ?$/
(1 pont) $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{25} X_i) = 25 \cdot \mathbb{E}(X_1) = 3750$
(2 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{25} X_i)}{\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{25} X_i)} > \frac{0.03 \cdot \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{25} X_i)}{\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{25} X_i)}\right) = ?$$

(1 pont) tehát a kérdés

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 3750}{150} > \frac{0.03 \cdot 3750}{150}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 3750}{150} > 0,75\right)$$

(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 3750}{150} < 0,75\right)$
(1 pont) $X_1, \ldots, X_{25}$ azonos eloszlású, együttesen független valószínűségi változók
(1 pont) ezért a centrális határeloszlás-tétel miatt
(2 pont) $\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 3750}{150}$ közelítőleg standard normális eloszlású.
(2 pont) Tehát a keresett mennyiség: $1 - \Phi(0,75)$
(1 pont) $\approx 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$.

4. A huncut manók útközben falatoztak Mikulás zsákjából, ezért az utolsó házhoz érve már csak két különböző méretű csokimikulás maradt, de a házban 4 gyerek lakott. Nem merték bevallani Mikulásnak, ezért ketten közülük gyorsan megragadták a két csokit, és egymástól függetlenül véletlenszerűen beledobták egy-egy gyerek csizmájába. A gyerekek közül ketten, Andi és Bea, mindig féltékenyen figyelték egymás ajándékát. Legyen X az Andi által kapott csokimikulások száma, és Y annak az eseménynek az indikátora, hogy ugyanannyi csokit kapott Andi és Bea.
a) Adjuk meg X és Y együttes eloszlását. Független-e a két valószínűségi változó?
b) Adjuk meg X és Y kovarianciáját, valamint $Z = -2X + 3$ szórását.

Megoldás:
(a)
(3 pont) Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat írja le:

Y \ X	0	1	2	Y peremeloszlása
0	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
X peremeloszlása	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	

(2 pont) nem függetlenek, ami pl abból látszik, hogy
$0 = \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) \neq \mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{8}$ (más jó indoklásra is jár a pont)
(b)
(2 pont) $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
(1 pont) tudja a várható érték definícióját
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{8}$
(2 pont) $\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j} i \cdot j \cdot \mathbb{P}(X = i, Y = j)$
(ha nem írja így le, de a konkrét esetben jól használja, akkor is jár a pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{8}$
(1 pont) Tehát $\mathrm{cov}(X, Y) = -\frac{1}{16}$

(2 pont) $\mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{D}^2(-2X+3) = 4\,\mathbb{D}^2(X)$
(vagy $\mathbb{D}(Z) = \mathbb{D}(-2X+3) = 2\,\mathbb{D}(X)$, de ha -2-vel szoroz 0 pont)
(2 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}\,X)^2$
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \frac{5}{8}$
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \frac{3}{8}$
(1 pont) $\mathbb{D}(Z) = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,2247$

5. Legyen (X,Y) olyan folytonos valószínűségi vektorváltozó, aminek sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-3x-2y} & \text{ha } 0 < x \text{ és } 0 < y, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) Határozzuk meg α értékét! **b)** Adjuk meg az $\mathbb{E}(X\cdot Y + 2\cdot X^2\frac{1}{Y} + 1|Y)$ regressziót!

Megoldás:
(a)
(2 pont) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$
(1 pont) Tehát $1 = \int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\cdot e^{-3x-2y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \alpha\cdot e^{-2y}\cdot\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^\infty \mathrm{d}y =$
(1 pont) $= \int_0^\infty \alpha\cdot e^{-2y}\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{d}y = \alpha\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{e^{-2y}}{-2}\right]_0^\infty = \alpha\cdot\frac{1}{6}$
(1 pont) $\alpha = 6$
(b)
(1 pont) az együttes sűrűségfüggvény szorzatalakba írható: $f_{X,Y}(x,y) = (3\cdot e^{-3x})\cdot(2\cdot e^{-2y})$
(1 pont) tehát X és Y függetlenek
(2 pont) $f_X(x) = 3\cdot e^{-3x}$, ha $x > 0 \longrightarrow X \sim E(3)$, és $f_Y(y) = 2\cdot e^{-2y}$, ha $y > 0 \longrightarrow Y \sim E(2)$
(1 pont) $\mathbb{E}(X\cdot Y + 2\cdot X^2\frac{1}{Y} + 1 \mid Y) = \mathbb{E}(X\cdot Y \mid Y) + \mathbb{E}(2\cdot X^2\frac{1}{Y} \mid Y) + 1$
(1 pont) mert...
(2 pont) $= Y\cdot\mathbb{E}(X \mid Y) + 2\cdot\frac{1}{Y}\cdot\mathbb{E}(X^2 \mid Y) + 1$
(1 pont) mert... (valahogy hivatkozik a regresszió megfelelő tulajdonságára)
(1 pont) $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2 \mid Y) = \mathbb{E}(X^2)$
(2 pont) mert függetlenek
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{9}$
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2}{9}$
(1 pont) A kérdezett regresszió tehát $= Y\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{Y}\cdot\frac{2}{9} + 1 = \frac{1}{3}Y + \frac{4}{9}\frac{1}{Y} + 1$

6.* Valahányszor Gazsi bácsi eltör egy botot, a töréspont a bot középső harmadán egyenletesen helyezkedik el. Gazsi bácsi most kézbe vesz egy 15 centiméter hosszú botot, eltöri, majd a bal kezében lévő darabot ismét eltöri. Adjuk meg a második törés után a bal kezében maradó darab hosszának sűrűségfüggvényét.

Megoldás:
(1 pont) Jelölje az első töréspontnak a bot bal végétől vett távolságát X, erre $X \sim U(5,10)$
(2 pont) A második töréspontnak a bot bal végétől vett távolsága Y, erre $Y \sim U\left(\frac{X}{3}, \frac{2X}{3}\right)$
(0 pont) a kérdés $f_Y(y) = ?$
(3 pont) folytonos teljes valószínűség tétele: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)\,\mathrm{d}x$
(1 pont) $f_X(x) = \frac{1}{5}$, ha $x \in (5,10)$, különben 0
(2 pont) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{3}{x}$, ha $5 < x < 10$ és $\frac{x}{3} < y < \frac{2x}{3}$, különben 0
(3 pont) $f_Y(y) = \int_{\max(5,\frac{3}{2}y)}^{\min(10,3y)} \frac{3}{x}\cdot\frac{1}{5}\,\mathrm{d}x$
(2 pont) $= \frac{3}{5}\cdot[\ln x]_{\max(5,\frac{3}{2}y)}^{\min(10,3y)}$,
(2 pont) ha $\frac{5}{3} < y < \frac{20}{3}$, különben 0
(2 pont) ha $\frac{5}{3} < y < \frac{10}{3}$, akkor $f_Y(y) = \frac{3}{5}\cdot[\ln x]_5^{3y} = \frac{3}{5}\cdot\ln\frac{3y}{5}$
(2 pont) ha $\frac{10}{3} \le y < \frac{20}{3}$, akkor $f_Y(y) = \frac{3}{5}\cdot[\ln x]_{\frac{3}{2}y}^{10} = \frac{3}{5}\cdot\ln\frac{20}{3y}$