MATEMATIKA A2 1.vizsga

2014 december 22.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD

1. Feladat. Legyenek a $\mathbf{V}$ vektortérben az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan független vektorok. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $-\mathbf{a} + \mathbf{c}$ vektorok?

2. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 y e^{(x-1)^2} \, dx \, dy.$$

4. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \frac{x}{y-x}, \quad x \neq y.$$

Legyen $f(0,0) = 0$. Adjuk meg a függvény parciális deriváltfüggvényeit ahol léteznek!

5. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 < x, \text{ és } y = x^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az origóban a függvénynek nemcsak a parciális deriváltjai léteznek, hanem minden irányban van iránymenti deriváltja.

1. Feladat. Legyenek a $\mathbf{V}$ vektortérben az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan független vektorok. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $-\mathbf{a} + \mathbf{c}$ vektorok?

1. Megoldás. Legyenek α, β, γ skalárok és (2p)

$$\alpha(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{c}) + \gamma(-\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}.$$

Azt kell megvizsgálnunk, hogy ebből következik-e hogy $\alpha, \beta, \gamma = 0$ (2p). Az egyenletet rendezve kapjuk (1p)

$$(\alpha - \gamma)\mathbf{a} + (-\alpha + \beta)\mathbf{b} + (-\beta + \gamma)\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Mivel $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan független vektorok, ezért (2p)

$$\alpha - \gamma = 0,\ -\alpha + \beta = 0,\ -\beta + \gamma = 0.$$

Az első két egyenletből $\alpha = \gamma$, $\alpha = \beta$. Mivel ekkor a harmadik egyenlet azonosan teljesül, ezért nem következik, hogy $\alpha, \beta, \gamma = 0$ (2p). Tehát a kérdéses vektorok nem lineárisan függetlenek (1p).

---

2. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

2. Megoldás. A faktoriális miatt a hányados kritériummal érdemes próbálkozni (2p). A sor pozitív tagú, ha konvergens, akkor abszolút konvergens (1p).

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{1p}{=} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \overset{1p}{=} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \overset{2p}{=} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \overset{2p}{=} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow[1p]{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1,$$

így a sor abszolút konvergens.

---

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 y e^{(x-1)^2}\, dx\, dy.$$

3. Megoldás. Az integrandus az adott tartományon folytonos, tehát az integrál létezik (1p). Az e^{x^2} függvénynek nincs elemi függvényekkel kifejezhető primitívfüggvénye, következésképp $e^{(x-1)^2}$-nek sincs. Ha a tartományon fordított sorrendben integrálunk (1p),

$$\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 ye^{(x-1)^2}\, dx\, dy \overset{2p}{=} \int_1^5 \int_0^{\sqrt{x-1}} ye^{(x-1)^2}\, dy\, dx \overset{2p}{=} \int_1^5 \left[\frac{y^2}{2}e^{(x-1)^2}\right]_0^{\sqrt{x-1}} dx$$

$$\overset{2p}{=} \int_1^5 \frac{x-1}{2}e^{(x-1)^2} dx \overset{2p}{=} \left[\frac{1}{4}e^{(x-1)^2}\right]_1^5 = \frac{1}{4}(e^{16}-1).$$

---

4. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \frac{x}{y-x}, \quad x \neq y.$$

Legyen $f(0,0)=0$. Adjuk meg a függvény parciális deriváltfüggvényeit ahol léteznek!

4. Megoldás. Azoknak az (x,y) pontoknak, ahol $y \neq x$, van olyan környezetük, amelyben a feladat elején megadott képlet érvényes, tehát a parciális deriváltat megadhatjuk (formális) deriválással (1p). A függvény az y-tengely minden pontjában azonosan 0, így az origóban az y szerinti parciális derivált 0 (2p). A függvény az x-tengely mentén -1, az origóban viszont nulla, így x szerinti parciális derivált az origóban nem létezik (1p).

$$f'_x(x,y) \overset{2p}{=} \frac{y}{(y-x)^2} \quad \text{ha } x \neq y, \qquad f'_y(x,y) = \begin{cases} -\frac{x}{(y-x)^2} & \text{ha } x \neq y \,(2p) \\ 0 & \text{ha } (x,y)=(0,0)\,(2p). \end{cases}$$

---

5. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 < x, \text{ és } y = x^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az origóban a függvénynek nemcsak a parciális deriváltjai léteznek, hanem minden irányban van iránymenti deriváltja.

5. Megoldás. Az origóhoz az $y = mx$ egyenes mentén közelítve (2p) az iránymenti derivált (2p)

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h,mh)-0}{h\sqrt{1+m^2}} \overset{2p}{=} 0,$$

ugyanis $m \leq 0$ esetén a függvény azonosan 0 (2p), pozitív m esetén pedig a $h < m$ értékekre azonosan 0 (2p).