1	2	3	4	5	$\sum$

Alkalmazott algebra 1. ZH. 2021-11-11 **Neptun:** ________ **Név:** ______________________________

A dolgozat feladatainak ***eredményeit*** *mind erre az oldalra kell írni, a* ***mellékszámításokot*** *a hátoldalra, ez elvben elegendő, de ha esetleg nem, a másik lap is beadandó, melynek jobb felső sarkára írja fel a nevét, Neptun-kódját!* ***Eredmény mellékszámítás nélkül*** *nem kap pontot. A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

1. Válaszoljon az alábbi kérdésekre (mindegyik 0 vagy 1 pont)! *(4 pont)*

a) Az $\mathbb{F}^6$ tér két 4-dimenziós alterének metszete legalább hány dimenziós? Karikázzuk be a helyes választ!

0 1 2 3 4 5 6 A helyes válasz: 2

b) Tekintsük az n-dimenziós $\mathcal{V}$ teret, és az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformációt. Az L valamely λ_i sajátértékéhez tartozó sajátalterét jelölje $\mathcal{V}_i$. Az alábbiak közül melyik *szükséges és elégséges* feltétele annak, hogy az L leképezés diagonalizálható legyen? (mindegyik négyzetbe H vagy I írandó)

1. $\mathcal{V}$ minden vektora előáll az L sajátvektorainak összegeként. $\boxed{\text{I}}$
2. $\sum_i \dim(\mathcal{V}_i) = n$, azaz a sajátalterek dimenzióinak összege kiadja a tér dimenzióját. $\boxed{\text{I}}$
3. A sajátértékek páronként különbözők. $\boxed{\text{H}}$

c) Mit tudunk az alábbi négyzetes mátrixok sajátértékeiről:

Önadjungált mátrix minden sajátértéke... valós

Unitér mátrix minden sajátértéke... egy abszolút értékű

Nilpotens mátrix minden sajátértéke... 0

d) Melyek igazak (I), ill. hamisak (H) az alábbi állítások közül?

1. Ha $\mathbf{A}$ valós mátrix, akkor $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit. $\boxed{\text{I}}$
2. Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha pontosan egy olyan pozitív szemidefinit $\mathbf{B}$ mátrix létezik, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$. $\boxed{\text{I}}$
3. Ha egy mátrix minden eleme pozitív, akkor pozitív szemidefinit. $\boxed{\text{H}}$

2. *(3 pont)* Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (2, 2, 0, 0)$ vektornak a $\operatorname{span}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$ térre eső merőleges vetületét!

1. mo: A vetület $\mathbf{P}\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$, ahol a $\mathbf{P}$ vetítőmátrix

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix} \quad \text{és ahol } \mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

2. mo: Ortonormált bázissal: $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)$, a vetület:

$$(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v})\mathbf{b}_1 + (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v})\mathbf{b}_2 = \sqrt{2}\mathbf{b}_1 + \sqrt{2}\mathbf{b}_2 = (1, 1, 1, 1)$$

3. *(4 pont)* Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&5&4\\0&4&13\end{bmatrix}$$

mátrix LU-felbontását, majd abból a Cholesky-felbontását!

Az LU-felbontás: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&4&4\\0&0&9\end{bmatrix}$, ugyanis

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&5&4\\0&4&13\end{bmatrix} \xrightarrow{S_2-S_1} \begin{bmatrix}1&1&0\\1&4&4\\0&4&13\end{bmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2} \begin{bmatrix}1&1&0\\1&4&4\\0&1&9\end{bmatrix}$$

Innen a Cholesky-felbontás $\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}$, ahol

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$$

4. *(5 pont)* Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&0\\1&1\end{bmatrix}$ (redukált) QR-felbontását és (akár ezt felhasználva) a pszeudoinverzét!

GS-ortogonalizáció: $\mathbf{a}_i = \mathbf{A}_{*i}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$,
$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$
az egységvektorok: $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $\frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$,
E két vektor adja $\mathbf{Q}$-t, onnan a QR-felbontás:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\1&-1\\1&1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}$$

Pszeudoinverz (számolható az $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ képlettel is, de gyorsabb a QR-ből):

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

5. *(4 pont)* Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}16&12\\12&9\end{bmatrix}$ mátrixnak $(25, (4, 3))$ és $(0, (-3, 4))$ sajátpárjai. Ezt használva írjuk fel $\mathbf{A}$ ortogonális diagonalizálhatóságához tartozó sajátfelbontását és ebből határozzuk meg azt az egyetlen pozitív szemidefinit mátrixot, melynek négyzete $\mathbf{A}$.

A sajátfelbontás a megadott adatokból:

$$\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}4/5&-3/5\\3/5&4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}25&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4/5&3/5\\-3/5&4/5\end{bmatrix}$$

ebből a négyzetgyöke

$$\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}4/5&-3/5\\3/5&4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4/5&3/5\\-3/5&4/5\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}16&12\\12&9\end{bmatrix}$$