Jelek és rendszerek II.

I. házi feladat villamosmérnök szakos hallgatók részére

Név	Szabó Norbert
Neptun kód	AJD5YL
Házi feladat kódja	3335100901
Beadási határidő:	7. oktatási hét

Megjegyzések: *Le kell töltenie a feladatlapot (a hálózat és a gerjesztőjel adataival együtt), továbbá a hálózat ábráját, és ezeket a megoldással együtt írásban kell benyújtani. Ha javítás, illetve részfeladat külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is* és a feladatlapot is be kell adni. *Javítás esetén a hibás részt kicserélni nem szabad még akkor sem, ha valamelyik feladat megoldását elölről kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni,* nem elegendő a végeredményeket közölni*! A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE stb.), de* a megoldás elvi lépéseit *ekkor is* részletesen *ismertetni kell.*

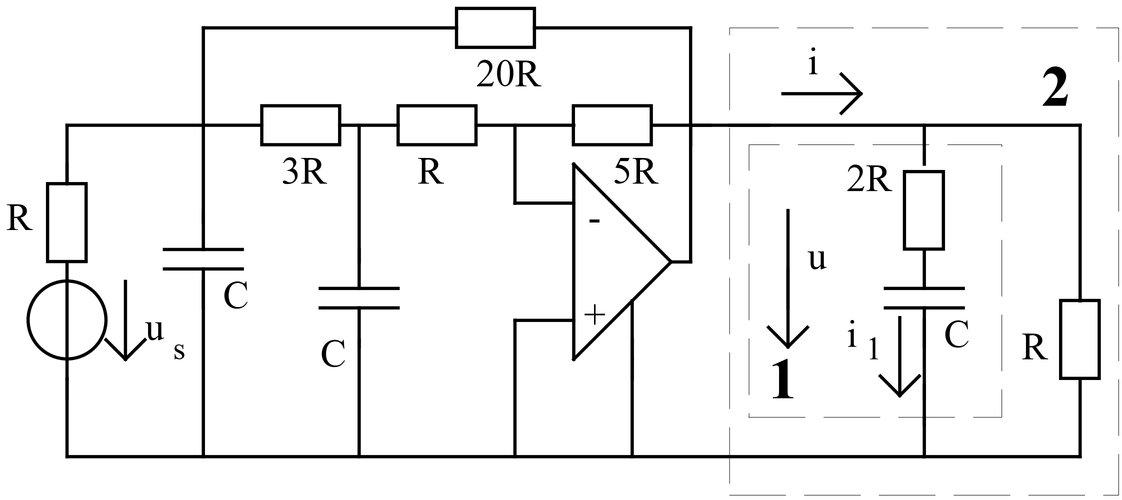
Gyakorlatvezető neve:

Javító véleménye (elfogadás, javítások):

Az ábrán megadott lineáris invariáns hálózat **gerjesztése a feszültségforrás feszültsége**, **válasza a 01** kimeneti jel.

H33

Válaszjel: u, i, i_1 A vizsgált kétpólus: 1, 2



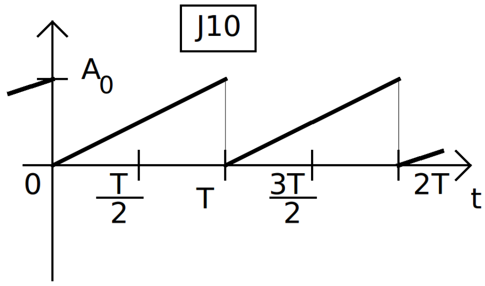
R =

C =

R	C
60Ω	$200nF$

1. feladat

A hálózat gerjesztése az alábbi periodikus jel:



A_0	T/τ	τ
15 V	1.2	$\tau = 1 \cdot CR$

1.1 Határozza meg ezen periodikus jel legalább négy (nem zérus) harmonikust tartalmazó Fourier-polinomját! Írja fel a Fourier-polinomot komplex és valós együtthatós alakban!

1.2 Határozza meg a jel effektív értékét pontosan és a választott Fourier-polinom közelítésben is! Adja meg a közelítés relatív hibáját!

1.3 Határozza meg a rendszer átviteli karakterisztikáját!

1.4 Határozza meg a válasz Fourier-polinomját az előző feladatban számított közelítésben! Határozza meg közelítőleg a válasz effektív értékét!

1.5 (Nem kötelező!) Rajzolja fel az átviteli karakterisztika Bode- és Nyquist-diagramját!

2. feladat

A gerjesztés az 1. feladatban megadott jel első periódusa; a $(0, T)$ intervallumon kívül zérus a jel értéke.

2.1 Határozza meg az aperiodikus gerjesztő jel komplex spektrumát!

2.2 Ábrázolja az amplitúdóspektrumot, és ennek alapján adja meg a jel sávszélességét! $(\varepsilon = 0.05)$

2.3 Írja fel a válasz komplex spektrumát!

3. feladat

3.1 Határozza meg az átviteli függvényt! Számítsa ki az átviteli függvény pólusait és zérusait, vázolja fel a pólus-zérus elrendezést!

3.2 Határozza meg az impulzusválaszt az átviteli függvény alapján, és vázolja az impulzusválasz időfüggvényét!

3.3 Határozza meg a választ, ha a gerjesztőjel $A_0\varepsilon(t)\left(1 - e^{-t/T}\right)$! Vázolja a válaszjelet!

4. feladat

A feladat megoldása nem kötelező! Ellenőrizze a számításokat a TINA hálózatanalízis program segítségével!

A koherens mértékegységek: [V, mA, kΩ, nF, Mrad/s, μs] $\left(k\Omega = \frac{V}{mA} = \frac{1}{\frac{Mrad}{s}\cdot nF} \qquad \mu s = k\Omega\cdot \mathrm{nF}\right)$

1.1

$R = 60\Omega = 0{,}06\ k\Omega \qquad C = 200\ nF$

$\boldsymbol{T} = 1{,}2\cdot\tau = 1{,}2\cdot R\cdot C = \mathbf{14{,}4}\ \mathrm{\mu}\boldsymbol{s} \qquad \boldsymbol{\omega_0} = \frac{2\pi}{T} = \frac{5}{36}\pi = \mathbf{0{,}4363}\ \frac{\boldsymbol{Mrad}}{\boldsymbol{s}}$

A jel 0 és T között: $\boldsymbol{x(t)} = \frac{\boldsymbol{A_0}}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{t} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{24}}\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{V}, ahol\ A_0 = 15\ V$

Fourier-sorfejtés valós együtthatós alakban:

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{A_0}{T^2}\int_0^T t\,dt = \frac{A_0}{2} = \mathbf{7{,}5}\ \boldsymbol{V}$$

$$X_k^A = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\,dt = \frac{2A_0}{T^2}\int_0^T t\cdot\cos(k\omega_0 t)\,dt = \mathbf{0}$$

$$X_k^B = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\sin(k\omega_0 t)\,dt = \frac{2A_0}{T^2}\int_0^T t\cdot\sin(k\omega_0 t)\,dt = \cdots = -\frac{A_0}{k\pi} = -\frac{\mathbf{15}}{\boldsymbol{k\pi}}\ \boldsymbol{V}$$

Tehát:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[X_k^A\cdot\cos(k\omega_0 t) + X_k^B\cdot\sin(k\omega_0 t)] = \mathbf{7{,}5} + \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\infty}\left[-\frac{\mathbf{15}}{\boldsymbol{k\pi}}\cdot\mathbf{sin}(\boldsymbol{k\omega_0 t})\right]\ V$$

Közelítés 5 harmonikust tartalmazó Fourier-polinommal:

$$\boldsymbol{x(t)} \approx 7{,}5 - \frac{15}{\pi}\cdot\sin(\omega_0 t) - \frac{15}{2\pi}\cdot\sin(2\omega_0 t) - \frac{15}{3\pi}\cdot\sin(3\omega_0 t) - \frac{15}{4\pi}\cdot\sin(4\omega_0 t) - \frac{15}{5\pi}\cdot\sin(5\omega_0 t)\ \ V$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{5}{36}\pi = 0{,}4363\ \frac{Mrad}{s}$$

Fourier-sorfejtés komplex együtthatós alakban:

$$X_0^C = X_0 = \mathbf{7{,}5}$$

$$X_k^C = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot \mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}dt = \cdots = \boldsymbol{j}\frac{\mathbf{15}}{\boldsymbol{2k\pi}}\ \ ,\boldsymbol{k}\neq\mathbf{0}$$

Tehát:

$$x(t) = X_0^C + \sum_{k=-\infty}^{\infty}[X_k^C\cdot \mathrm{e}^{jk\omega_0 t}] = \mathbf{7{,}5} + \sum_{\boldsymbol{k=-\infty}}^{\infty}[\boldsymbol{j}\frac{\mathbf{15}}{\boldsymbol{2k\pi}}\cdot\mathbf{e}^{\boldsymbol{jk\omega_0 t}}]\ \ ,\boldsymbol{k}\neq\mathbf{0}$$

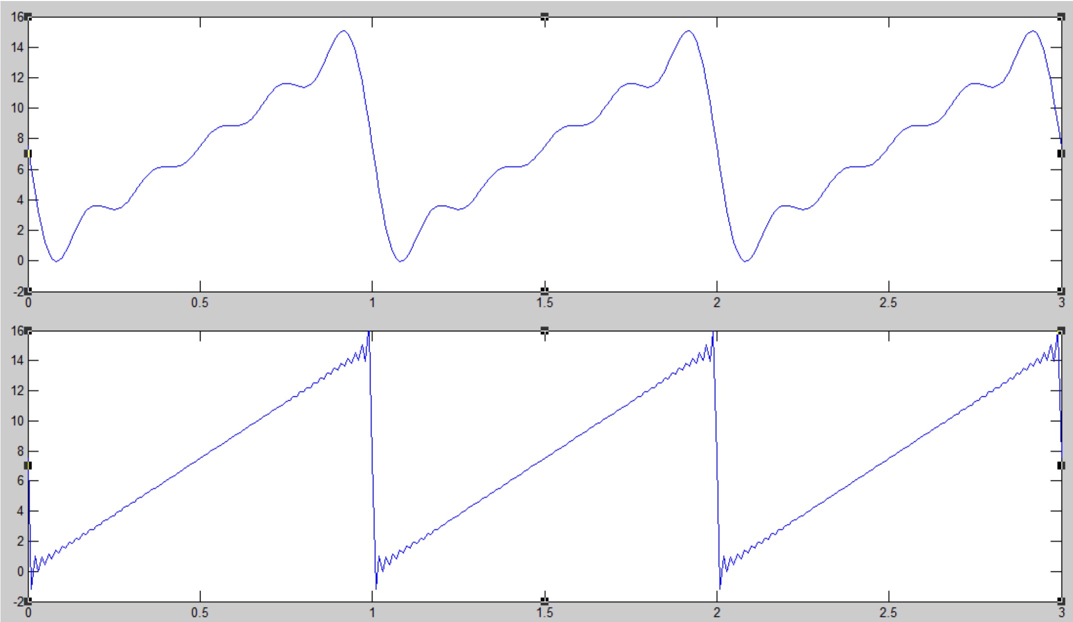
Közelítés:

$$x(t) \approx 7{,}5 + j\frac{15}{2\pi}\cdot \mathrm{e}^{j\omega_0 t} - j\frac{15}{2\pi}\cdot \mathrm{e}^{-j\omega_0 t} + j\frac{15}{4\pi}\cdot \mathrm{e}^{j2\omega_0 t} - j\frac{15}{4\pi}\cdot \mathrm{e}^{-j2\omega_0 t} + j\frac{15}{6\pi}\cdot \mathrm{e}^{j3\omega_0 t} - j\frac{15}{6\pi}\cdot \mathrm{e}^{-j3\omega_0 t} +$$

$$+j\frac{15}{8\pi}\cdot \mathrm{e}^{j4\omega_0 t} - j\frac{15}{8\pi}\cdot \mathrm{e}^{-j4\omega_0 t} + j\frac{15}{10\pi}\cdot \mathrm{e}^{j5\omega_0 t} - j\frac{15}{10\pi}\cdot \mathrm{e}^{-j5\omega_0 t} + \cdots$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{5}{36}\pi = 0{,}4363\ \frac{Mrad}{s}$

A Fourier-közelítés alakja 5, illetve 50 harmonikus esetén:



1.2

A jel effektív értéke pontosan és 5 harmonikus Fourier közelítésben:

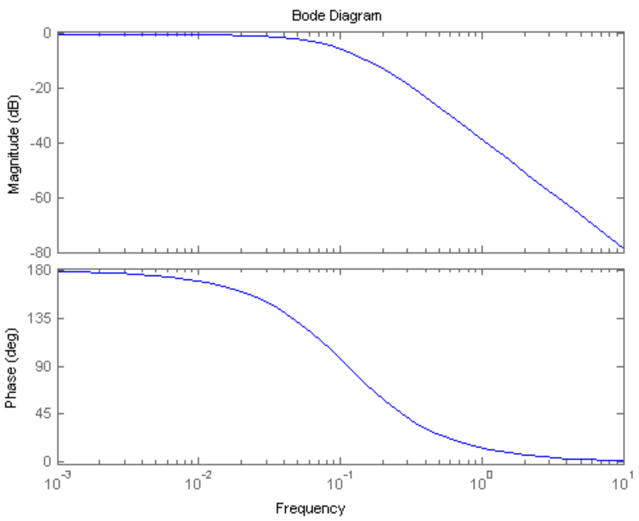
$$X_{eff,pontos} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T x^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T \left(\frac{15}{T}t\right)^2 dt} = \frac{\mathbf{15}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\,\boldsymbol{V} \approx \mathbf{8,6603}\,\boldsymbol{V}$$

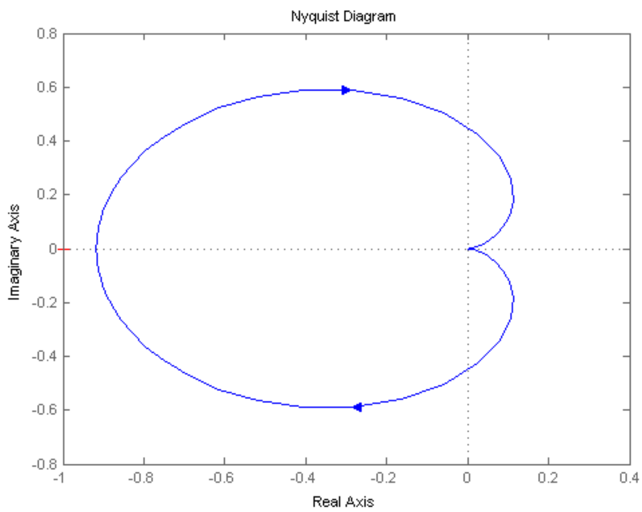
$$X_{eff,fourier} = \sqrt{7{,}5^2 + \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{-\frac{15}{k\pi}}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx \mathbf{8,5401\ V}$$

A közelítés relatív hibája: $\frac{\mathbf{8,6603-8,5401}}{\mathbf{8,6603}} = 0{,}0139 = \mathbf{1,39}\%$

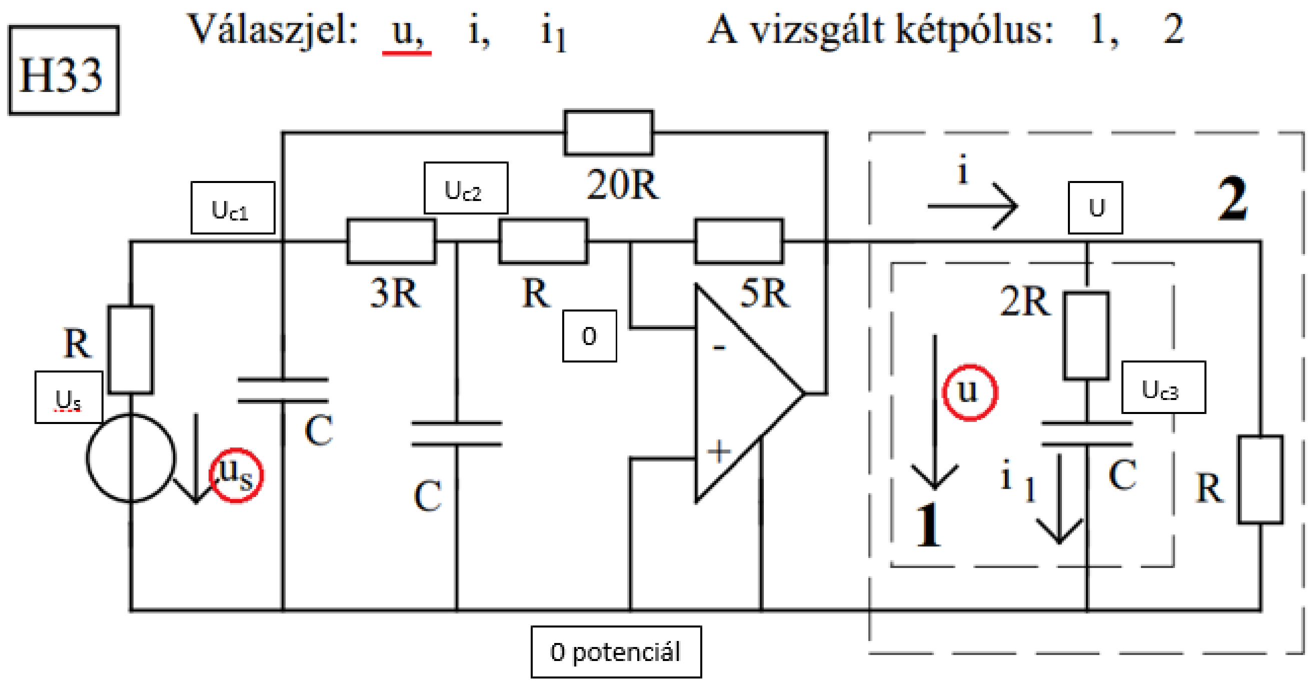
1.5

Bode és Nyquist diagram





1.3



R = 60 Ω = 0,06 kΩ C = 200 nF

Csomóponti potenciálok módszere:

$$C \cdot U'_{c1} = \frac{U_s - U_{c1}}{R} + \frac{U - U_{c1}}{20R} + \frac{U_{c2} - U_{c1}}{3R}$$

$$C \cdot U'_{c2} = \frac{U_{c1} - U_{c2}}{3R} + \frac{0 - U_{c2}}{R}$$

$$C \cdot U'_{c3} = \frac{U - U_{c3}}{2R}$$

$$\frac{U_{c2} - 0}{R} = \frac{0 - U}{5R}$$

$\longrightarrow$

$$U'_{c1} = \frac{-83}{60RC} U_{c1} + \frac{1}{12RC} U_{c2} + \frac{1}{RC} U_s$$

$$U'_{c2} = \frac{1}{3RC} U_{c1} + \frac{-4}{3RC} U_{c2}$$

$$U'_{c3} = \frac{-5}{2RC} U_{c2} + \frac{-1}{2RC} U_{c3}$$

$$U = -5 \cdot U_{c2}$$

Átviteli karakterisztika számolása Matlab segítségével:

```
a=[-83/(60*R*C) 1/(12*R*C) 0;1/(3*R*C) -4/(3*R*C) 0;0 -5/(2*R*C) -1/(2*R*C)]
b=[1/(R*C);0;0]
c=[0 -5 0]
d=0
[num,den]=ss2tf(a,b,c,d)
```

$$\boldsymbol{H(j\omega)} = \frac{-1{,}1574 \cdot 10^{-2}(j\omega) - 4{,}8225 \cdot 10^{-4}}{(j\omega)^3 + 2{,}6806 \cdot 10^{-1}(j\omega)^2 + 2{,}2049 \cdot 10^{-2}(j\omega) + 5{,}2566 \cdot 10^{-4}}$$

$$= \frac{-1{,}1574 \cdot 10^{-2} \cdot [(j\omega) + 4{,}1667 \cdot 10^{-2}]}{[(j\omega) + 1{,}2724 \cdot 10^{-1}] \cdot [(j\omega) + 9{,}9150 \cdot 10^{-2}] \cdot [(j\omega) + 4{,}1667 \cdot 10^{-2}]}$$

$$= \frac{\boldsymbol{-1,1574 \cdot 10^{-2}}}{\boldsymbol{(j\omega)^2 + 2,2639 \cdot 10^{-1}(j\omega) + 1,2616 \cdot 10^{-2}}}$$

1.4

$$\boldsymbol{T} = 1{,}2 \cdot \tau = 1{,}2 \cdot R \cdot C = \mathbf{14{,}4}\ \mu\boldsymbol{s} \qquad \boldsymbol{\omega_0} = \frac{2\pi}{T} = \frac{5}{36}\pi = \mathbf{0{,}4363}\ \frac{\boldsymbol{Mrad}}{\boldsymbol{s}}$$

$$U_S(t) \approx 7{,}5 - \frac{15}{\pi} \cdot \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{15}{2\pi} \cdot \cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{15}{3\pi} \cdot \cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$- \frac{15}{4\pi} \cdot \cos\left(4\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{15}{5\pi} \cdot \cos\left(5\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\ V$$

A linearitás miatt alkalmazhatjuk a szuperpozíció elvét!

$$\overline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{jk\omega_0}) \cdot \overline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{S,k}}$$

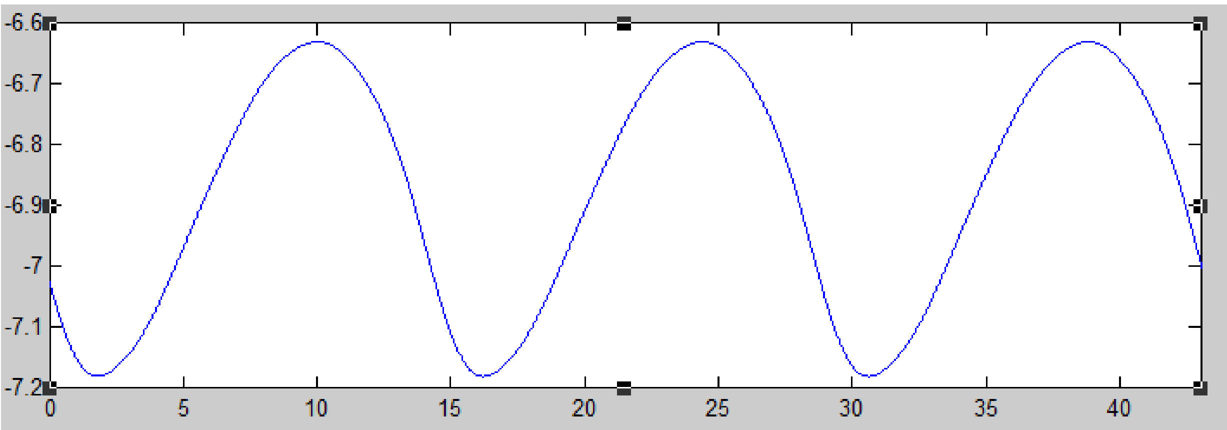
k	$\overline{U}_{S,k}$ (gerjesztés)	$H(jk\omega_0)$	$\overline{U}_k$ (válasz)
0	$7{,}5$	$-0{,}9174$	$-6{,}8805$
1	$-4{,}7746 \cdot e^{-j90°}$	$0{,}0569 \cdot e^{j29{,}060°}$	$-0{,}2717 \cdot e^{-j60{,}940°}$
2	$-2{,}3873 \cdot e^{-j90°}$	$0{,}0149 \cdot e^{j14{,}778°}$	$-0{,}0356 \cdot e^{-j75{,}222°}$
3	$-1{,}5915 \cdot e^{-j90°}$	$0{,}0067 \cdot e^{j9{,}884°}$	$-0{,}0107 \cdot e^{-j80{,}116°}$
4	$-1{,}1937 \cdot e^{-j90°}$	$0{,}0038 \cdot e^{j7{,}421°}$	$-0{,}0045 \cdot e^{-j82{,}579°}$
5	$-0{,}9549 \cdot e^{-j90°}$	$0{,}0024 \cdot e^{j5{,}940°}$	$-0{,}0023 \cdot e^{-j84{,}060°}$

Válasz: $u(t) \approx -6{,}8805 - 0{,}2717 \cdot \cos(\omega_0 t - 60{,}940°) - 0{,}0356 \cdot \cos(2\omega_0 t - 75{,}222°) -$
$0{,}0107 \cdot \cos(3\omega_0 t - 80{,}116°) - 0{,}0045 \cdot \cos(4\omega_0 t - 82{,}579°) - 0{,}0023 \cdot \cos(5\omega_0 t - 84{,}060°)\ \boldsymbol{V}$

A válasz effektív értéke:

$$U_{eff} \approx \sqrt{6{,}8805^2 + \frac{0{,}2717^2}{2} + \frac{0{,}0356^2}{2} + \frac{0{,}0107^2}{2} + \frac{0{,}0045^2}{2} + \frac{0{,}0023^2}{2}} \approx \mathbf{6{,}8832\ V}$$

A válasz egy kondenzátor feszültségének függvénye, ezért nem lehet szakadás az alakjában.($U = -5 \cdot U_{c2}$)



2.1

$$\boldsymbol{x(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{A_0}{T} t}, & \boldsymbol{ha\ 0 < t < T} \\ \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{egyébként} \end{cases}$$

$T = 14{,}4\ \mu s \qquad A_0 = 15\ V$

$$\boldsymbol{X(j\omega)} = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^T \frac{A_0}{T} t \cdot e^{-j\omega t} dt = \boldsymbol{A_0 T \cdot \left(-\frac{e^{-j\omega T}}{j\omega T} - \frac{e^{-j\omega T}}{(j\omega T)^2} + \frac{1}{(j\omega T)^2}\right)}$$

<u>Másik módszer:</u>

$$x(t) = \varepsilon(t) \cdot \frac{A_0}{T} t - \varepsilon(t-T) \cdot \frac{A_0}{T}(t-T) - \varepsilon(t-T) \cdot A_0$$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{A_0}{s^2 \cdot T} - \frac{A_0}{s^2 \cdot T} \cdot e^{-sT} - \frac{A_0}{s} \cdot e^{-sT}$$

Mivel a jel belépő és abszolút integrálható: $X(j\omega) = X(s), ha\ j\omega = s$ helyettesítjük

Átrendezéssel ugyanazt az eredményt kapjuk!

2.3

<u>A válasz komplex spektruma:</u>

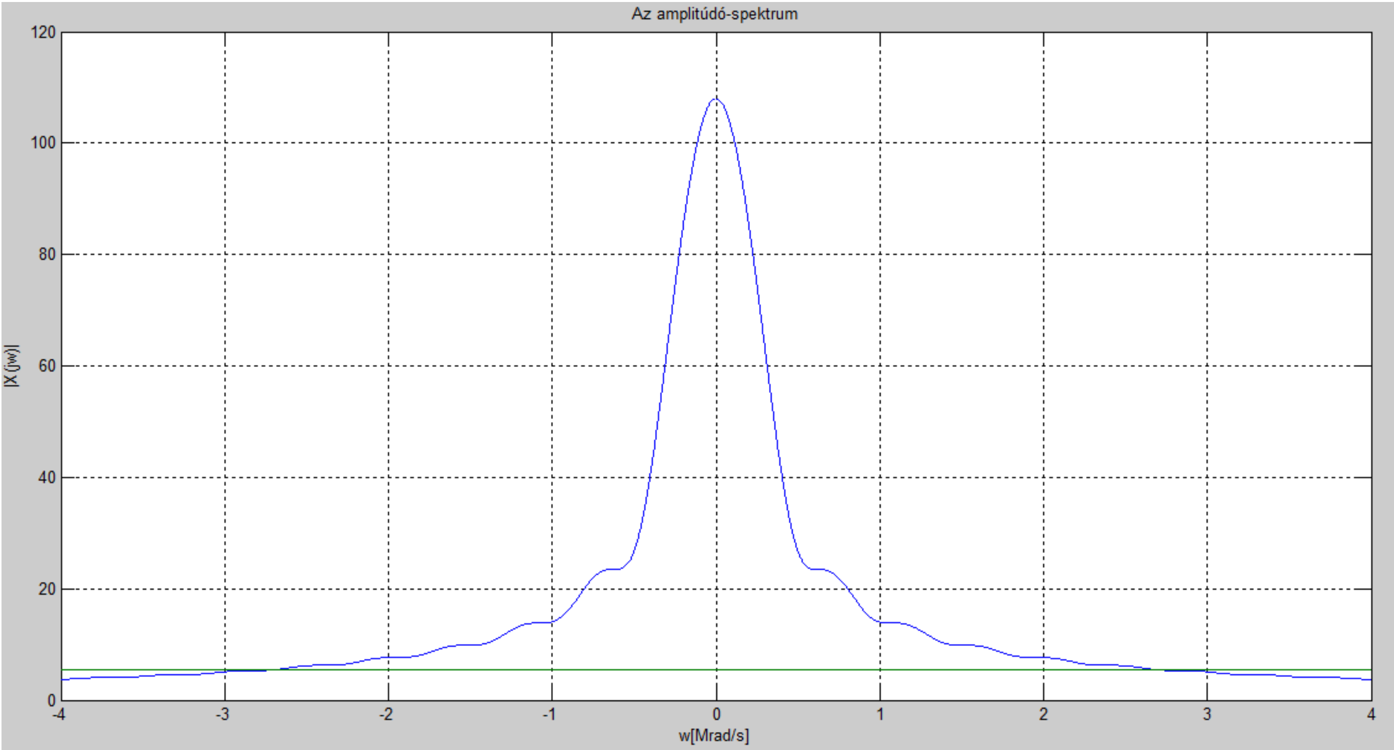
$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega) = \frac{-1{,}1574 \cdot 10^{-2}}{(j\omega)^2 + 0{,}2264 \cdot (j\omega) + 1{,}2616 \cdot 10^{-2}} \cdot 15 \cdot \left(\frac{e^{-j\omega T}}{-j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{(j\omega)^2 T} + \frac{1}{(j\omega)^2 T}\right)$$

$$\boldsymbol{Y(j\omega) = \frac{0,1736\ \cdot e^{-14{,}4(j\omega)} \cdot (j\omega) + 1,2056 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-14.4(j\omega)} - 1,2056 \cdot 10^{-2}}{(j\omega)^4 + 0,2264 \cdot (j\omega)^3 + 1,2616 \cdot 10^{-2} \cdot (j\omega)^2}}$$

2.2

Matlab kód:

```
w=-4:0.001:4;
X=1.04167./((j.*w).^2)-15./(j.*w).*exp(-j.*w.*14.4)-1.04167./((j.*w).^2).*exp(-j.*w.*14.4);
Xabs=abs(X);
Kmax=max(Xabs);
eps=0.05.*Kmax;
plot(w, Xabs, [-4 4], [eps eps]);
grid
title('Az amplitúdó-spektrum');
xlabel('w[Mrad/s]')
ylabel('|X(jw)|')
```



Az amplitúdó spektrum maximuma:

$$\lim_{\omega\to 0} K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \frac{A_0 T}{2} = 108 = K_m \qquad \varepsilon = 0{,}05 \qquad \text{Burkológörbe: } \left|\frac{A_0}{\omega}\right|$$

<u>A jel sávszélessége:</u>

$$\left|\frac{A_0}{\omega}\right| = \frac{A_0 T}{2}\cdot\varepsilon \qquad \omega T = \frac{2}{\varepsilon} = 40$$

$$\Delta\omega_\varepsilon = \frac{40}{T} = \frac{25}{9}\frac{Mrad}{s} \approx 2{,}7778\frac{Mrad}{s}$$

A sávszélességet csak a pozitív frekvenciákon nézzük!

3.1

Mivel a rendszer kauzális: $H(s) = H(j\omega), ha\ j\omega = s$

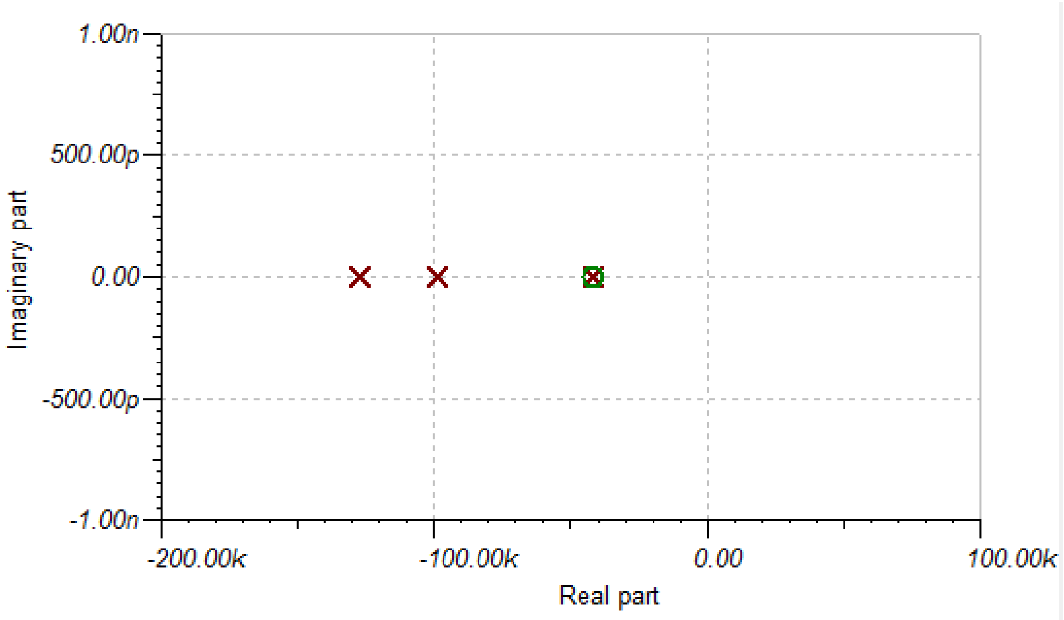
$$\boldsymbol{H(s)} = \frac{-1{,}1574 \cdot 10^{-2} \cdot s - 4{,}8225 \cdot 10^{-4}}{s^3 + 2{,}6806 \cdot 10^{-1} \cdot s^2 + 2{,}2049 \cdot 10^{-2} \cdot s + 5{,}2566 \cdot 10^{-4}}$$

$$= \frac{-1{,}1574 \cdot 10^{-2} \cdot [s + 4{,}1667 \cdot 10^{-2}]}{[s + 1{,}2724 \cdot 10^{-1}] \cdot [s + 9{,}9150 \cdot 10^{-2}] \cdot [s + 4{,}1667 \cdot 10^{-2}]}$$

$$= \boldsymbol{\frac{-1,1574 \cdot 10^{-2}}{s^2 + 2,2639 \cdot 10^{-1} \cdot s + 1,2616 \cdot 10^{-2}}}$$

Zérus: $\boldsymbol{z_1 = -4,1667 \cdot 10^{-2}}$

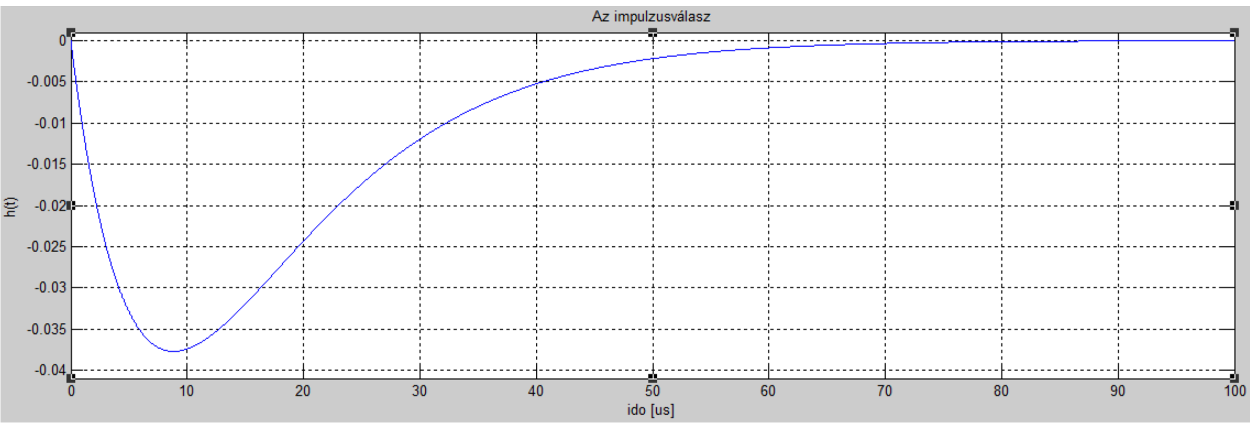
Pólusok: $\boldsymbol{p_1 = -1,2724 \cdot 10^{-1}}$ $\boldsymbol{p_2 = -9,9150 \cdot 10^{-2}}$ $\boldsymbol{p_3 = -4,1667 \cdot 10^{-2}}$



3.2

$$\boldsymbol{h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}}\left\{\frac{-1{,}1574 \cdot 10^{-2}}{[s + 1{,}2724 \cdot 10^{-1}] \cdot [s + 9{,}9150 \cdot 10^{-2}]}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4{,}1206 \cdot 10^{-1}}{s + 1{,}2724 \cdot 10^{-1}} + \frac{-4{,}1206 \cdot 10^{-1}}{s + 9{,}9150 \cdot 10^{-2}}\right\} = \boldsymbol{\varepsilon(t) \cdot 0,41206 \cdot (e^{-0{,}12724 \cdot t} - e^{-0{,}09915 \cdot t})}$$



3.3

$T = 14{,}4\ \mu s \qquad A_0 = 15\ V$

A gerjesztésem: $x(t) = A_0 \cdot \varepsilon(t) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad \rightarrow \quad X(s) = \frac{A_0}{s} - \frac{A_0}{s + \frac{1}{T}}$

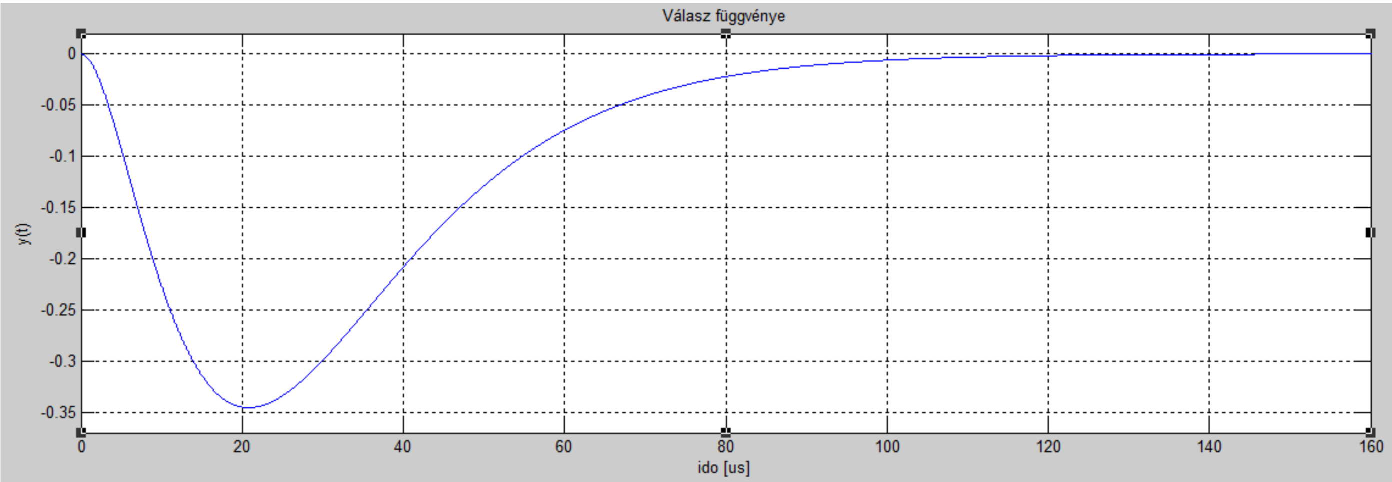
$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{s}) = \left(\frac{15}{s} - \frac{15}{s + \frac{1}{14{,}4}}\right) \cdot \frac{-1{,}1574 \cdot 10^{-2}}{s^2 + 2{,}2639 \cdot 10^{-1} \cdot s + 1{,}2616 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= \frac{-1{,}2056 \cdot 10^{-2}}{s \cdot (s + 6{,}9444 \cdot 10^{-2}) \cdot (s + 1{,}2724 \cdot 10^{-1}) \cdot (s + 9{,}9150 \cdot 10^{-2})}$$

$$= \frac{-7{,}0217}{s + 6{,}9444 \cdot 10^{-2}} + \frac{-7{,}4298}{s + 1{,}2724 \cdot 10^{-1}} + \frac{14{,}4515}{s + 9{,}9150 \cdot 10^{-2}}$$

Részlettörtekre bontás MATLAB-bal: >> [r,p,k]=residue(num,den)

$$\boldsymbol{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \varepsilon(t) \cdot \left[-7{,}0217 \cdot e^{-0{,}06944 \cdot t} - 7{,}4298 \cdot e^{-0{,}12724 \cdot t} + 14{,}4515 \cdot e^{-0{,}09915 \cdot t}\right]}$$



A válasz egy kondenzátor feszültségének függvénye, ezért a konstanshoz tartó gerjesztés hatására a válasz 0-hoz tart!